
채터링 감소를 위한 슬라이딩 섹터를 갖은 슬라이딩 제어

한종길* · 손영수*

Sliding Mode Control with Sliding Sector for Chattering Reduction

Jong-kil Han* · Yong-su Son**

요 약

채터링 현상은 VSS의 주요한 약점이며 이 문제를 극복하기 위하여 많은 연구들이 발표되었다. 선형 슬라이딩 섹터 이론이 최근에 발표되었으며, 본 논문에서는 섹터 내부에 연속입력함수를 가진 슬라이딩 섹터 이론을 이용하여 비선형시스템 제어하는 새로운 방식을 제안하고, 슬라이딩 섹터에 리아프노프 함수를 이용하여 안정도를 분석한다. 역진자 시스템에 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 채터링 현상의 제거를 확인한다.

ABSTRACT

Chattering phenomenon is still a large drawback of VSS. To overcome this problem, various approaches have been reported. A new notion of sliding sector has been proposed recently. In this paper, new methods of the nonlinear system control using the sliding sector theory with continued input function in the sector is proposed. This paper analyzes the stability, using Lyapunov function on the sliding sector. computer simulation for inverted pendulum results in elimination of the chattering phenomenon.

키워드

Variable Structure Control, Sliding Sector Control, Sliding Sector, Nonlinear Control, Tracking Control.

1. 서 론

슬라이딩제어이론은 제어계의 구조가 상태전환면에 의해 변하는 이론으로 슬라이딩 면을 따라 채터링을 가지는 특징 때문에 슬라이딩모드제어라 말한다. 시스템의 불확실성과 외란에 대한 강인한 특성을 가지고 있기 때문에 최근에 많은 제어 분야에 적용되고 있다. 그러나 실제 적용에 있어 제어입력이 어떤 값에서 다른 값으로 무한 속도로 전환하는 채터링 입력은 실제의 시스

템의 있어 제어입력이 어떤 값에서 다른 값으로 무한 속도로 전환하는 채터링 입력은 실제의 시스템의 응용에 있어 물리적 한계 등으로 인해 구현하기 어렵다.

이와 같은 채터링 현상은 슬라이딩모드제어이론의 큰 단점으로 채터링 현상을 줄이거나 제거하기 위한 많은 연구들이 선행되었다. 예를 들면, 슬라이딩 평면에 경계층을 형성하고 경계층 내부에서 연속함수를 이용하는 방법, 보간법 또는 저역통과필터를 이용한 연속제어입력을 설계하는 방법, 잡음 관측기를 이용하는 방법

* 한려대학교 멀티정보통신학과
심사완료일자 : 2007. 08. 22

접수일자 : 2007. 07. 17

등이 제안되었다[1][2][3][4].

본 논문은 채터링 현상을 줄이기 위하여 슬라이딩 섹터 내부에 연속함수 입력을 사용하는 방법으로, 가변구조제어의 장점을 다 가지고 있고 채터링에 강한 새로운 개념의 가변구조제어라고 할 수 있다. 본 논문에서는 비선형 시스템에 대한 제어기를 만들고 일반적인 비선형 시스템의 예로 많이 사용되는 역진자 시스템에 적용하여 슬라이딩모드제어의 문제점인 채터링 현상이 감소됨을 고찰한다.

II. 선형시스템에 대한 슬라이딩 섹터

일반적인 다음과 같은 선형 시불변 단일입력 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

여기서 상태는 $x(t) \in R^n$ 이며 입력은 $u(t) \in R^1$ 이고, A, B 는 적당한 크기의 상수행렬이고, (A, B) 는 제어 가능하다. 그리고 상태 $x(t)$ 는 측정 가능하다고 가정한다.

시스템의 상태에 대한 P-norm $\| \cdot \|_P$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{1/2}, \quad x \in R^n \quad (2)$$

여기서 $P \in R^{n \times n}$ 는 positive definite symmetric 행렬이다.

Lyapunov 후보함수와 같은 모습을 가진 P- norm의 제곱은 다음과 같이 표시된다.

$$L(t) = \|x\|_P^2 = x^T P x > 0, \quad \forall x \in R^n, x \neq 0 \quad (3)$$

만약 시스템(1)에 입력이 없을 때 안정하다면, 다음 식을 만족하는 P 를 찾을 수 있다.

$$\dot{L}(t) = x^T (A^T P + P A) x \leq 0, \quad \forall x \in R^n \quad (4)$$

그러나 시스템 (1)에 입력이 없을 때 불안정하다면,

위 식은 보장할 수 없다. 불안정한 시스템에서는 어떤 $x(t) \in R^n$ 에 대하여 $\dot{L} \geq 0$ 이고 어떤 $x(t) \in R^n$ 에 대하여 $\dot{L} \leq 0$ 이 가능하다. 그래서 입력이 없을 때 P-norm $\|x\|_P$ 이 감소하는 특별한 영역을 정의하고 이것을 슬라이딩 섹터(sliding sector)라고 하며 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} S_{ca} = \{x \mid \dot{L}(t) = \frac{d}{dt}(x^T P x) = x^T (A^T P + P A) x \\ \leq -x^T R x, \quad x \in R^n \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $R \in R^{n \times n}$ 은 positive semidefinite symmetric 행렬이다.

정리 : (5)에 정의한 슬라이딩 섹터는 다음과 같이 간단하게 표시한다.[5]

$$\begin{aligned} S_{ca} = \{x \mid s^2(x) \leq w^2(x), \quad x \in R^n \\ = \{x \mid |s(x)| \leq |w(x)|, \quad x \in R^n \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{여기서} \quad C = B^T P \\ s(x) = Cx(t) = B^T P x(t), \\ w(x) = \sqrt{x^T(t) H x(t)} \\ H = Q - R \geq 0 \\ A^T P + P A - P B B^T P = -Q \end{aligned} \quad (7)$$

III. 비선형 시스템에 대한 제어 법칙

본 장에서는 선형 시스템에 대한 제어기인 슬라이딩 섹터 제어에 대하여 비선형 시스템을 다룬다.

일반적인 불확실한 비선형 동력학 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = (A(t, x) + \Delta A(t, x))x(t) + f(t, x, u) \\ + (B + \Delta B(t, x, u))u \\ = (A_L + A_R(t, x) + \Delta A(t, x))x(t) + f(t, x, u) \\ + (B + \Delta B(t, x, u))u \end{aligned} \quad (8)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R$ 이고, A_L 은 $A(t,x)$ 의 선형화한 항이고, $A_R(t,x)$ 는 $A(t,x)$ 의 선형화 후 나머지 항이며, $\Delta A(t,x)$ 는 시스템의 불확실한 항이고, $f(t,x,u)$ 는 시스템의 모든 외란을 고려한 항이며, ΔB 는 입력의 불확실성을 고려한 항이다.

모든 선형화 후 나머지 항 및 불확실성과 잡음이 정합조건을 만족한다고 가정하면, (9)은 존재한다.

$$\begin{aligned} A_R(t,x) &= Br(t,x), \quad \Delta A(t,x) = Bh(t,x,u) \\ \Delta B(t,x)u &= Bw(t,x,u), \quad f(t,x,u) = Bd(t,x,u) \end{aligned} \quad (9)$$

위와 같은 가정 하에 (8)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_Lx(t) + Bu(t) + B(r(t,x)x(t) \\ &\quad + h(t,x,u)x(t) + w(t,x,u) + d(t,x,u)) \end{aligned} \quad (10)$$

여기에서 $\eta(t,x,u)$ 에 대하여 다음과 같은 함수가 존재한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \eta(t,x,u) &= r(t,x)x(t) + h(t,x,u)x(t) + w(t,x,u) \\ &\quad + d(t,x,u) \\ \rho(x,t) &\geq |\eta(t,x,u)| \end{aligned} \quad (11)$$

(10)에 식(11)을 대입하면 다음과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\dot{x}(t) = A_Lx(t) + Bu(t) + B\eta(t,x,u) \quad (12)$$

슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$s(x) = Cx(t) = B^T Px(t) \quad (13)$$

제어입력은 다음의 슬라이딩 조건을 만족해야한다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(x)^2 \leq -k|s(t)|, \quad k > 0 \quad (14)$$

슬라이딩 섹터에 근거한 채터링을 줄이는 새로운 슬라이딩 섹터 제어법칙은 다음과 같다.

$|s(x)/\Phi| \leq 1$ 에서

$$u = -(s(x)/\Phi)\rho(x)$$

$|s(x)/\Phi| > 1$ 과 $x \notin S_{ect}$ 에서

$$\begin{aligned} u &= -(CB)^{-1}(CA_Lx + ks(x)) \\ &\quad - sgn(s(x))\rho(x) \end{aligned}$$

$|s(t)/\Phi| > 1$ 과 $x \in S_{ect}$ 에서

$$u = -(s(x)/w(x))\rho(x) \quad (15)$$

Φ 는 고정된 경계층 폭이며, $CB > 0$ 는 역행렬이 존재하며, $k > 0$ 는 충분히 커다란 수이다.

증명 :

첫 번째 : 슬라이딩 섹터 밖에서 Lyapunov 함수를 설정하였다.

$$V_1 = \frac{1}{2} s^2(x)$$

Lyapunov함수의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= s(x)\dot{s}(x) \\ &= s(x)(CA_Lx(t) + CBu(t) + CB\eta(t,x,u)) \\ &\leq -ks^2(x) \end{aligned} \quad (16)$$

두 번째 : 슬라이딩 섹터 안에서 Lyapunov 함수를 설정하였다.

$$V_2 = x^T Px$$

Lyapunov함수의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= x^T(A_L^T P + PA_L)x + 2x^T P(Bu(t) + B\eta) \\ &= x^T(A_L^T P + PA_L)x + s^T(x)\left(\frac{-s(x)}{w(t)}\rho + \eta\right) \\ &\leq x^T(A_L^T P + PA_L)x \\ &\quad + s^T(x)(-sgn(s(x))\rho + \eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^T(A_L^T P + P A_L)x - |s(x)|\rho + s(x)\eta \\
 &\leq s^2(x) - w^2(x) - x^T R x \\
 &\leq -x^T R x
 \end{aligned} \tag{17}$$

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

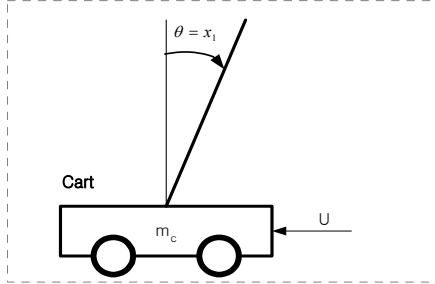


그림 1. 도립진자 시스템
Fig. 1 Inverted pendulum system

본 장에서는 제한된 제어법칙의 타당성을 입증하기 위해 비선형 시스템의 예로 많이 사용되는 그림 1과 같은 역진자 시스템에 대한 제어결과를 살펴본다.

$x_1 = \theta$ 그리고 $x_2 = \dot{\theta}$ 로 놓고 역진자 시스템의 동력학방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \cos x_1 \frac{ml}{m_c + m} x_2^2 \sin x_1}{\frac{4}{3}l - \frac{ml}{m_c + m} \cos^2 x_1} \\
 &\quad + \frac{\cos x_1}{m_c + m} u(t)
 \end{aligned} \tag{18}$$

여기서 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ 는 각각 역진자의 각도와 각 속도를 나타내며 $l = 0.5m$ 은 역진자의 길이를 나타낸다. 또한 g 는 중력가속도를, $m = 0.1kg$ 은 역진자의 질량을, $m_c = 1kg$ 는 cart의 질량을, 그리고 $u(t)$ 는 cart

에 가해지는 입력을 각각 나타낸다.

(18)을 평형점 0에서 테일러급수에 의하여 선형화 하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax(t) + bu(t) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t)
 \end{aligned} \tag{19}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 0 & a_{12} &= 1 \\
 a_{21} &= \frac{g}{(4/3)l - ml / (m_c + m)} \\
 a_{22} &= 0 & b_1 &= 0 \\
 b_2 &= \frac{1 / (m_c + m)}{(4/3)l - ml / (m_c + m)}
 \end{aligned}$$

(19)처럼 선형화된 시스템에 대한 슬라이딩 섹터는 다음과 같다.

$Q \in R^{n \times n}$ 은 대칭, 양의 부호행렬이고, $R \in R^{n \times n}$ 은 대칭, 양의 준정부호행렬이며 다음과 같은 값을 사용하였다.

$$Q = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Riccati 방정식 (7)을 만족하는 P 는 다음과 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 69.9019 & 15.0126 \\ 15.0126 & 4.26879 \end{bmatrix} \tag{21}$$

따라서 슬라이딩 섹터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= Cx = B^T P x \\
 &= [21.9697 \ 6.24701] x \\
 w(t) &= \sqrt{x^T(Q-R)x} = \sqrt{5x_1^2 + 5x_2^2}
 \end{aligned} \tag{22}$$

그리고 $\rho = 0.6$, $k = 0.3$, $\Phi = 0.01$ 로 제어기 변수로 잡았다. 시스템의 외란과 불확실항의 값이 $0.1 \sin(10t)$ 이다는 가정 하에 컴퓨터 시뮬레이션을 하여본 결과를 그림 2에서 그림 4까지 나타내었다. 그림 2은

시스템의 상태 x_1, x_2 의 출력을 나타내고 있으며, 초기 조건 $x_1 = 0.1, x_2 = 0$ 에서 원하는 궤적으로 잘 수렴함을 알 수 있다. 그림 3은 시스템의 입력을 나타낸 시뮬레이션 결과로 그림에서 보는 바와 같이 제어이득에서 처음에 원하는 궤적에 수렴하는 동안에 약간의 채터링이 있으나 수렴 후에는 슬라이딩 제어의 특징인 채터링을 거의 볼 수 없다. 채터링 현상은 슬라이딩 섹터와 경계폭 ϕ 간의 비연속 영역 때문에 발생한다. 그림 4은 슬라이딩 평면이다.

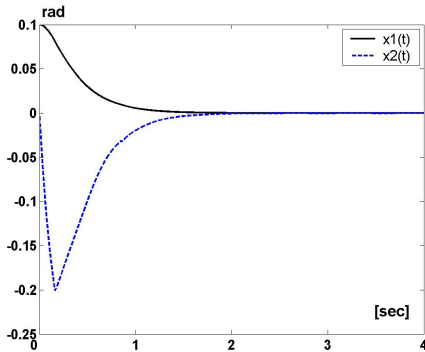


그림 2. 진자의 각도와 각속도
Fig. 2 Angular and velocity of the pole

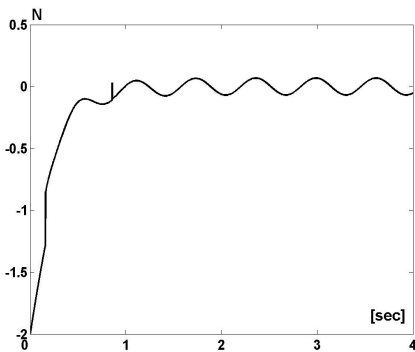


그림 3. 제어입력
Fig. 3 Control input

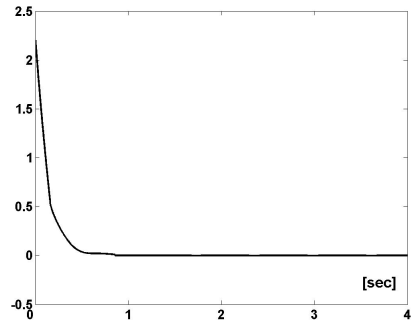


그림 4. 슬라이딩 평면
Fig. 4 Sliding surface S

V. 결 론

슬라이딩 제어는 미지의 파라미터나 미지의 외란에 강인성을 가지며 제어기 설계가 간편하지만, 슬라이딩 평면에 상태를 부디 치도록 제어함으로 채터링 현상이 발생하는데, 이로 인하여 실제 시스템에 적용하기 용이하지 않다. 그러나 슬라이딩 섹터를 사용한 제어기는 슬라이딩 평면이 아닌 슬라이딩 영역을 들으므로 채터링 현상을 현저하게 줄 일수 있다. 그러나 슬라이딩 섹터의 영역이 작아지면 채터링 현상이 발생한다.

본 논문에서는 슬라이딩 섹터 이론을 활용하여 슬라이딩 섹터영역과 경계층 내부에 연속입력함수를 사용함으로, 비선형시스템에 적용하여 슬라이딩 모드 제어의 문제점인 채터링 현상이 현저하게 감소됨을 고찰하였다.

참고 문헌

- [1] J. J. E. Slotone, S. S. Sastry, "Tracking control of nonlinear systems using sliding surfaces with application to robot manipulators", Int. J. Control, Vol. 38, pp.465-492, 1983.
- [2] G. Bartolini, A. Ferrara and E. Usai, "Chattering avoidance by second order sliding mode control", IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 43, pp.241-246, 1998.
- [3] C. G. Lhee, J. J. Lee and H. S. Ahn, "Sliding-like fuzzy logic control with self tuning

- the dead zone parameters", 1999 IEEE Int. Fuzzy Systems Control, pp.544-549, 1999.
- [4] T. K. Lee, J. K. Han and W. C. Ham, "Fuzzy-sliding mode control for chattering reduction", Journal of control, auto. and sys. Eng., Vol. 7, pp393-398, 2001.
- [5] Y. Pan and K. Furuta and S. Hatakeyama, "Invariant sliding sector for variable structure control", Proc. of the 38th Conf. Decision and Control, pp.5152-5157, 1999.
- [6] K. Furuta and Y. Pan, "Design of discrete-time vss controller based on sliding sector", 13th Tr. World Con. IFAC, pp.487-492, 1996.
- [7] K. Furuta, S. Hatakeyama and Y. Pan, "VS controller design for continuous system from sampled data", Proc. of Amer. Control Conf., pp.1032-1035, 1999.

저자 소개



한종길(Jong-kil Han)

1992년 전북대학교 전자공학과(공학사)

1994년 전북대학교 전자공학과(공학석사)

2002년 전북대학교 전자공학과(공학박사)

1997년 ~ 현재 한려대학교 멀티정보통신학과 교수

※관심분야 : 적응제어, 슬라이딩제어, 진화연산알고리즘, 슬라이딩 섹터제어, 퍼지제어 등



손영수(Young-su Son)

1988년 조선대학교 전산통계학과(이학사)

1991년 조선대학교 전산통계학과(이학석사)

1999년 조선대학교 전산통계학과(이학박사)

1996년 ~ 현재 한려대학교 멀티정보통신학과 교수

※관심분야 : 프로그래머론, 데이터베이스, 인공지능, 퍼지제어 등