

트렌치 위를 통과하는 장파의 변형 Transformation of Long Waves Propagating over Trench

정태화* · 서경덕** · 조용식* · 박승현*

Tae-Hwa Jung*, Kyung-Duck Suh**, Yong-Sik Cho* and Sung-Hyun Park*

요 지 : 비대칭 트렌치 지형 위를 통과하는 장파의 해석 해를 유도하였다. 트렌치 내부의 수심은 트렌치 중심으로부터 거리의 멱에 비례하여 감소한다. 장파의 가정을 사용하여 지배 방정식인 환경사 방정식을 변수 계수를 갖는 이차 상미분 방정식으로 변환하였으며 멱급수를 이용하여 해석 해를 구하였다. 수치 모델과의 비교를 통하여 해석 해의 타당성을 확인하였다. 다양한 조건에서 해석 해를 계산하여 그 결과를 분석하였다.

핵심용어 : 트렌치, 해석 해, 환경사 방정식, 장파

Abstract : An analytical solution for long waves propagating over an asymmetric trench is derived. The water depth inside the trench varies in proportion to a power of distance from the center of the trench. The mild-slope equation, governing equation, is transformed into second order ordinary differential equation with variable coefficients by using the long wave assumption and then the analytical solution is obtained by using the power series technique. The analytical solution is confirmed by comparison with the numerical solution. After calculating the analytical solution under various conditions, the results are analyzed.

Keywords : trench, analytical solution, mild-slope equation, long waves

1. 서 론

지형 변화에 의한 파랑 변형 예측은 연안 시설물을 보호할 수 있는 방법 중의 하나로 인식되면서 많은 연구자들에 의해 활발히 연구되었다. 이러한 파랑 변형을 예측하는 방법으로는 크게 수치 해석 기법, 수리 모형 실험, 해석 해 등이 있다. 본 논문은 언급된 세 가지 방법중에서 비록 제한된 상황에서만 적용이 가능하지만 빠르고, 정확하고 간편하게 해를 구할 수 있는 해석 해에 관한 연구를 수행하였다. 트렌치에 관한 해석 해 연구는 Lamb(1932)에 의해 처음으로 시작되었다. Lamb은 선형파 이론에 장파의 가정을 적용하여 계단형 지형 위를 통과하는 파의 해석 해를 제시하였다. Takano(1960)는 고유함수 전개법을 사용하여 임의의 지형 위를 진행하는 파의 변형에 관한 해석 해를 제시하였으며 이 방법은 Kirby and Dalrymple(1983), Liu 등

(1992), Cho and Lee(2000) 등에 의해 활용되었다. 그러나 Takano가 제안한 고유함수 전개법은 수심이 변화하는 영역을 서로 다른 수심을 갖는 구간들의 연속으로 가정하였기 때문에 엄밀히 말하면 해석 해라고 하기에는 무리가 있다. Dean(1964)은 선형적으로 변화하는 폭과 수심을 가진 수로를 통과하는 장파의 해석 해를 제시하였다. Dean의 결과는 기울기가 급격하게 변화할 경우 Lamb의 결과에 수렴하게 된다. Lassiter(1972)는 변분법을 이용하여 돌출된 직사각형 위를 통과하는 파의 변형에 관한 연구를 하였으며 비슷한 지형에 대하여 Lee and Ayer(1981), Miles(1982) 등이 해석 해를 제시하였다. 최근에는, Bender and Dean(2003), Lin and Liu(2005) 그리고 Chang and Liou(2007)등이 Dean의 해석 해를 확장하여 선형적으로 변화하는 트렌치 위를 통과하는 장파의 해석 해를 연구하였다.

본 연구에서는 기존에 연구되었던 직사각형 또는 선형적

*한양대학교 토목공학과(Corresponding author: Tae-Hwa Jung, Department of Civil Engineering, Hanyang University, Seoul 133-791, Korea, togye176@paran.com)

**서울대학교 건설환경공학부 및 공학연구소(Department of Civil and Environmental Engineering & Engineering Research Institute, Seoul National University)

으로 변화하는 단면에 대한 해석 해를 확장하여 다양한 기울기 및 모양을 갖는 트렌치 위를 통과하는 장파의 해석 해를 유도하였다. 환경사 방정식을 지배 방정식으로 사용하였으며 맥급수를 사용하여 해를 구하였다. 맥급수를 이용한 해석 해의 연구는 Zhang and Zhu(1994)가 천퇴위를 통과하는 장파의 해석 해를 유도하면서 처음으로 사용한 이후 수평 이차원 문제에 널리 활용되었지만 연직 이차원 문제에는 적용된 바가 없다.

유도된 해석 해는 동일한 지배 방정식을 유한 요소 기법을 이용하여 구한 수치 해석 결과와 비교하여 그 타당성을 확인하였다. 다양한 단면 조건에 대해 파랑 변형을 모의하여 트렌치의 형상에 따른 파의 변형 및 Bragg 반사 특성 등을 조사하였다.

2. 수학적 모델

연직 이차원 파랑 변형을 모의하기 위해 식 (1)로 표현되는 환경사 방정식을 사용하였다.

$$\frac{d}{dx} \left(c c_g \frac{d\eta}{dx} \right) + k^2 C C_g \eta = 0 \quad (1)$$

여기서, η 는 자유 수면 변위, C 는 파속도, C_g 는 군속도, k 는 파수이다. 장파의 가정을 사용하면 $C = C_g \approx \sqrt{gh}$ 가 되며 $\sigma^2 = gk^2h$ 의 근사식을 만족하게 된다. 여기서 g 는 중력 가속도, h 는 수심, σ 는 각 주파수를 의미한다. 따라서, 식 (1)은 천해역에서 식 (2)와 같은 근사식으로 표현할 수 있다.

$$h \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{dh}{dx} \frac{d\eta}{dx} + \frac{\sigma^2}{g} \eta = 0 \quad (2)$$

해석 해를 적용할 영역은 Fig. 1과 같으며 단면의 중심은 식 (3)과 같이 표현된다.

$$h = \begin{cases} h_1 = h_0 \left(1 - \frac{b_1^\alpha}{a^\alpha} \right) & x \leq -b_1 \\ h = h_0 \left(1 - \frac{|x|^\alpha}{a^\alpha} \right) & -b_1 < x \leq b_2 \\ h_2 = h_0 \left(1 - \frac{b_2^\alpha}{a^\alpha} \right) & x > b_2 \end{cases} \quad (3)$$

여기서, h_0 는 트렌치 내부의 최대수심, h_1, h_2 는 트렌치 밖에서의 일정 수심, b_1, b_2 는 트렌치 중심으로부터 각각 좌·우측 폭, 그리고 a 는 트렌치를 자유수면까지 연장했을 경우 자유수면에서의 반지름에 해당되며 $a = b_1 \sqrt{1 - h_1/h_0}$ 의 관계식으로부터 구할 수 있다. 트렌치 중심은 수심이 가장 큰 곳의 x 좌표를 의미하며, 본 연구에서는 원점에 해당한다. Fig. 1에서 보듯이 $\alpha = 1$ 인 경우 선형적으로 변화하며, α 가 증가함에 따라 기울기가 급격하게 변화하며 직사각형 모양으로 접근한다.

식 (3)을 식 (2)에 대입하면 다음의 지배 방정식이 나오며 이 방정식을 조합하여 트렌치 내부에서 성립하는 해석 해를 유도할 수 있다.

$$(a^\alpha \pm x^\alpha) \frac{d^2 \eta}{dx^2} \pm \alpha x^{\alpha-1} \frac{d\eta}{dx} + v^2 \eta = 0 \quad (4)$$

여기서,

$$v = \sqrt{\frac{\sigma^2 a^\alpha}{gh_0}} \quad (5)$$

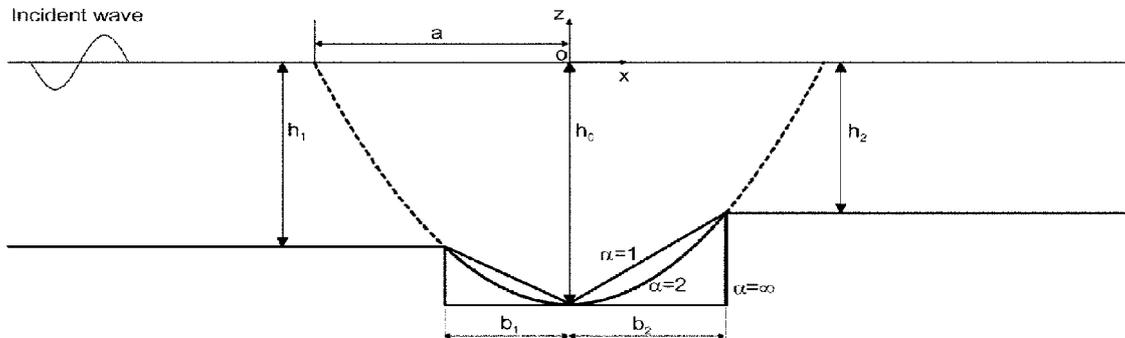


Fig. 1. Definition sketch of an asymmetric trench located in an otherwise constant water depth.

Table 1. Determination of +/- sign in the trench in Eq. 4

	홀수 차수(α)		짝수 차수(α)	
	$x < 0$	$x > 0$	$x < 0$	$x > 0$
함몰 지형	+	-	-	-

식 (4)의 \pm 부호는 함몰 지형의 차수 및 x 의 부호에 의해 Table 1과 같이 정해지며, 따라서 일반적인 차수에 대해 성립하는 해석 해를 구하기 위해서는 다음의 두 방정식을 풀어야 한다.

$$(a^\alpha - x^\alpha) \frac{d^2 \eta_1}{dx^2} - \alpha x^{\alpha-1} \frac{d\eta_1}{dx} + v^2 \eta_1 = 0 \quad (6)$$

$$(a^\alpha + x^\alpha) \frac{d^2 \eta_2}{dx^2} + \alpha x^{\alpha-1} \frac{d\eta_2}{dx} + v^2 \eta_2 = 0 \quad (7)$$

식 (6), (7)의 해석 해를 구하기 위해 수면 변위를 다음과 같이 멱급수의 형태로 가정하였다.

$$\eta_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m x^m \quad (8)$$

$$\eta_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m x^m \quad (9)$$

식 (8), (9)를 각각 식 (6), (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 β_m 및 γ_m 에 관한 일반식을 얻을 수 있으며,

$\beta_0, \beta_1, \gamma_0$ 및 γ_1 은 미지 복소수 상수 $\alpha=1$ 인 경우:

$$\beta_m = \frac{(m-1)^2 \beta_{m-1} - v^2 \beta_{m-2}}{am(m-1)} \quad (m \geq 2) \quad (10)$$

$$\gamma_m = \frac{-(m-1)^2 \gamma_{m-1} - v^2 \gamma_{m-2}}{am(m-1)} \quad (m \geq 2) \quad (11)$$

$\alpha=2$ 인 경우:

$$\beta_m = \frac{(m-2)(m-1) - v^2}{a^2 m(m-1)} \beta_{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (12)$$

$$\gamma_m = \frac{-(m-2)(m-1) - v^2}{a^2 m(m-1)} \gamma_{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (13)$$

$\alpha > 2$ 인 경우:

$$\beta_m = \frac{-v^2}{a^\alpha m(m-1)} \beta_{m-2} \quad (2 \leq m < \alpha) \quad (14)$$

$$\beta_m = \frac{(m-\alpha)(m-1) \beta_{m-\alpha} - v^2 \beta_{m-2}}{a^\alpha m(m-1)} \quad (m \geq \alpha) \quad (15)$$

$$\gamma_m = \frac{-v^2}{a^2 m(m-1)} \gamma_{m-2} \quad (2 \leq m < \alpha) \quad (16)$$

$$\gamma_m = \frac{-(m-\alpha)(m-1) \gamma_{m-\alpha} - v^2 \gamma_{m-2}}{a^\alpha m(m-1)} \quad (m \geq \alpha) \quad (17)$$

이 값들을 이용하여 다음과 같이 해석 해를 구할 수 있다.

$$\eta_1 = \beta_0 X_1(x) + \beta_1 X_2(x) \quad (18)$$

$$\eta_2 = \gamma_0 X_3(x) + \gamma_1 X_4(x) \quad (19)$$

트렌치 전면과 후면에서의 수면 변위는 다음과 같이 나타낼 수가 있다. η_U 와 η_D 는 각각 입사 영역과 투과 영역에서의 수면 변위이며 모두 Sommerfeld 방사경계조건을 만족한다.

$$\eta_U = \exp(ik_1(x+b_1)) + R \exp(-ik_1(x+b_1)) \quad (x \leq -b_1) \quad (20)$$

$$\eta_D = T \exp(ik_2(x-b_2)) \quad (x \geq b_2) \quad (21)$$

여기서, R 및 T 는 입사율과 투과율을 의미하는 미지 복소수 상수이며 k_1, k_2 는 각각 트렌치 전면(h_1)과 후면(h_2)에서의 파수이다.

식 (18)~(21)의 미지 상수값을 구하기 위하여 $x = -b_1, 0, b_2$ 인 지점에서 다음과 같은 정합 조건을 사용한다.

$$\eta_U = \eta_1 \quad \text{at } x = -b_1 \quad (22)$$

$$\frac{d\eta_U}{dx} = \frac{d\eta_1}{dx} \quad \text{at } x = -b_1 \quad (23)$$

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{at } x = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d\eta_1}{dx} = \frac{d\eta_2}{dx} \quad \text{at } x = 0 \quad (25)$$

$$\eta_2 = \eta_D \quad \text{at } x = b_2 \quad (26)$$

$$\frac{d\eta_2}{dx} = \frac{d\eta_D}{dx} \quad \text{at } x = b_2 \quad (27)$$

식 (22)는 물리적으로 압력이 연속임을 의미하며, 식 (23)은 수평방향의 흐름율이 연속임을 의미한다. 식 (18)~(21)를 식 (22)~(27)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 미지수를 구할 수 있으며,

$$R = a_{11} + ik_1 \cdot a_{12} \quad (28)$$

$$\beta_0 = a_{21} + ik_1 \cdot a_{22} \quad (29)$$

$$\beta_1 = a_{31} + ik_1 \cdot a_{32} \quad (30)$$

$$\gamma_0 = a_{41} + ik_1 \cdot a_{42} \quad (31)$$

$$\gamma_1 = a_{51} + ik_1 \cdot a_{52} \tag{32}$$

$$T = a_{61} + ik_1 \cdot a_{62} \tag{33}$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & X_1(-b_1) & X_2(-b_1) & 0 & 0 & 0 \\ ik_1 & X_1'(-b_1) & X_2'(-b_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_1(0) & X_2(0) & -X_3(0) & -X_4(0) & 0 \\ 0 & X_1'(0) & X_2'(0) & -X_3'(0) & -X_4'(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X_3(b_2) & X_4(b_2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X_3'(b_2) & X_4'(b_2) & -ik_2 \end{bmatrix}^{-1} \tag{34}$$

여기서 결정된 계수값을 다시 식 (18)~(21)에 대입하면 전체 영역에서의 수면 변위값을 계산할 수 있다.

3. 결과 및 토의

3.1 수치 모델과의 비교

해석 해의 타당성을 확인하기 위하여 수치 해석의 결과

와 비교해 보았다. 수치 해는 동일한 지배방정식에 Galerkin 유한요소법을 적용하여 계산하였다. 대칭 및 비대칭 두 경우에 대해 각각 비교해 보았다. 대칭인 경우 다음의 조건에서 해를 구하였다. 트렌치의 형상은 $\alpha=2$ 로 하여 포물선 형태가 되도록 하였으며 트렌치 중심에서의 수심(h_0)은 6.4, 9.6 m가 되도록 하였다. 일정 수심 영역에서의 수심(h_1 및 h_2)은 3.2 m, 트렌치 중심에서 양끝까지의 폭(b_1 및 b_2)은 $0.5L_1$ 으로 고정하고, 일정 수심 영역에서의 상대수심(k_1h_1)은 0.167로 고정하여 장파의 조건을 만족하도록 하였다. 여기에서 L_1 은 수심 h_1 에 해당하는 파장을 의미한다. 비대칭의 경우에는 대칭의 경우와 동일한 조건에서 h_0 의 값을 6.4 m로 고정하고 b_2 의 값을 $0.9b_1, 1.1b_1$ 으로 변화를 주어 투과 영역에서의 일정 수심값(h_2)이 각각 3.8, 2.5 m가 되게 하였다.

Fig. 2는 대칭인 경우의 서로 다른 수심(h_0)에 대해 해석 해와 수치 해를 비교한 그림이다. x 축은 원점부터의 거리를 입사파의 파장으로 나눈 무차원 값을 사용하였으며, y 축은 파고값을 입사파의 파고로 나눈 무차원 값을 사용하였다. 수심이 $h_0=6.4, 9.6$ m 두 경우 모두 해석 해와 수치 해가 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

Fig. 3은 비대칭인 경우에 대해 해석 해와 수치 해를 비교한 것이다. b_2 의 값이 변화함에 따라 $h_2=h_0(1-|b_2|^\alpha/a^\alpha)$ 의 공식에 의해 h_2 의 값도 변화한다. 이 경우 역시 해석 해와 수치 해가 매우 잘 일치하는 것을 관측할 수 있다.

3.2 트렌치 형상에 따른 파의 변형

트렌치 형상에 따른 파의 변형을 조사해 보았다. Fig. 4

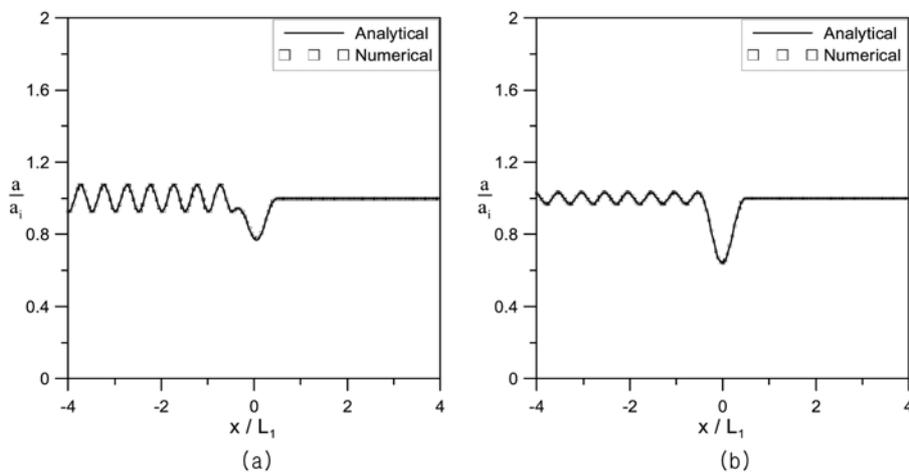


Fig. 2. Comparison between analytical and numerical solutions with $\alpha=2, h_1=h_2=3.2$ m, $b_1=b_2=0.5L_1$ and $k_1h_1=0.167$: (a) $h_0=6.4$ m; (b) $h_0=9.6$ m.

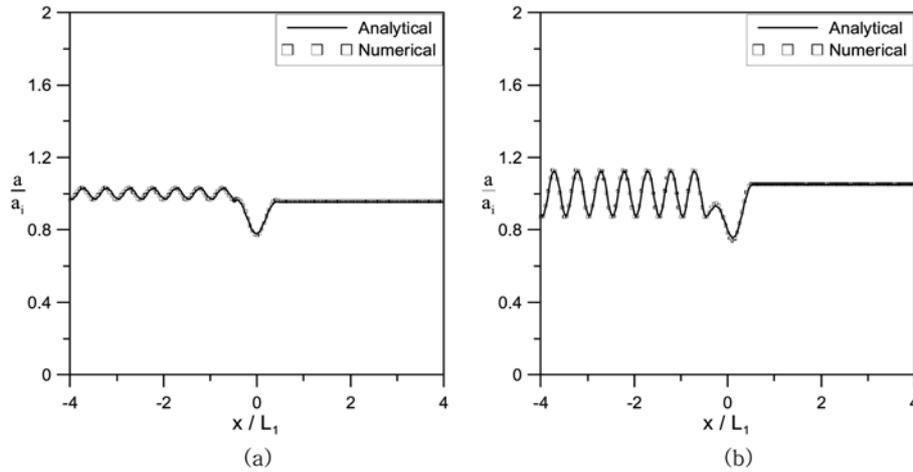


Fig. 3. Comparison between analytical and numerical solutions with $\alpha = 2$, $h_0 = 6.4$ m, $h_1 = 3.2$ m, $b_1 = 0.5L_1$ and $k_1h_1 = 0.167$: (a) $b_2 = 0.9b_1$; (b) $b_2 = 1.1b_1$ m.

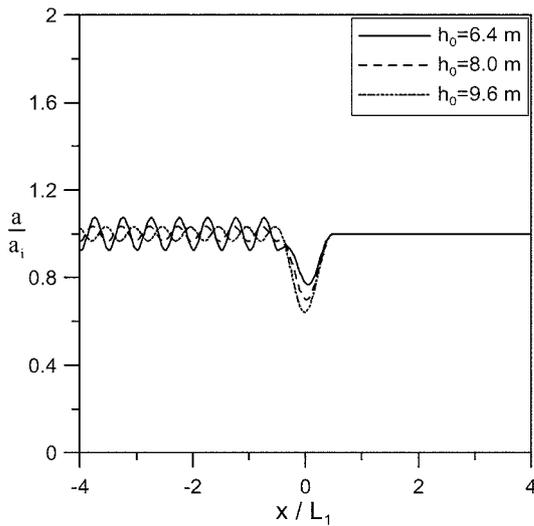


Fig. 4. Dimensionless wave amplitude of analytical solution for different central water depths with $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $b_1 = b_2 = 0.5L_1$ and $k_1h_1 = 0.167$.

는 트렌치 중심에서의 수심을 변화시키면서 파고값을 계산한 것이며, Table 2는 동일한 조건에서 반사율 및 투과율을 계산한 것이다. $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $b_1 = b_2 = 0.5L_1$, 및 $k_1h_1 = 0.167$ 로 고정하고 h_0 의 값을 6.4, 8.0, 9.6 m로 증가시키면서 결과값을 구하였다. 일반적인 예상과는 달리 수심 증가에 의해 트렌치 내부의 기울기가 급격해질수록 반사율은 감소, 투과율은 증가하는 것을 알 수 있다. 그 결과, $h_0 \approx 8.0$ 을 지나면서 대부분의 에너지가 투과하는 것을 볼

Table 2. Reflection and transmission coefficients of analytical solution for different central water depths with $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $b_1 = b_2 = 0.5L_1$ and $k_1h_1 = 0.167$

	$ R $	$ T $	$\frac{(EC_g)_r + (EC_g)_t}{(EC_g)_i}$
$h_0 = 6.4$ m	0.0744	0.997	1.00
$h_0 = 8.0$ m	0.0351	0.999	1.00
$h_0 = 9.6$ m	0.0331	0.999	1.00

수 있다. 에너지 보존을 확인하기 위하여 입사파, 반사파 및 투과파의 에너지 유량을 계산하여 반사파 및 투과파 유량의 합과 입사파 유량의 비율을 계산하였다. 에너지가 트렌치 내부에서 소산된다면 비율은 1보다 작은 값이 나오고 에너지 소산이 없다고 가정한다면 비율은 1의 값이 나온다. Table 2에서 보여지듯이 에너지 보존이 잘 일어나고 있는 것을 알 수 있다.

Fig. 5 및 Table 3은 $\alpha = 2$, $h_0 = 6.4$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m로 고정하고 $b_1 = b_2$ 의 값을 $0.25L_1$, $0.5L_1$, $0.75L_1$ 및 $1.0L_1$ 로 변화시키면서 파랑 변형, 반사율 및 투과율을 계산한 것이다. 트렌치의 폭이 증가할수록 기울기 값은 꾸준히 감소하지만 반사율은 감소하다가 다시 증가하는 모습을 보였으며 투과율은 증가하다가 다시 감소하였다. 이 경우에도 에너지 보존은 잘 일어난다.

Fig. 6 및 Table 4는 $h_0 = 6.4$ m, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $b_1 = b_2 = 0.5L_1$, $k_1h_1 = 0.167$ 로 고정하고 차수(α)값을 변화시키면서 파랑 변형을 조사한 것이다. α 값이 증가할수록 트렌치 내부의 평균 기울기는 증가한다. 그러나, 반사율은 Fig. 5 및

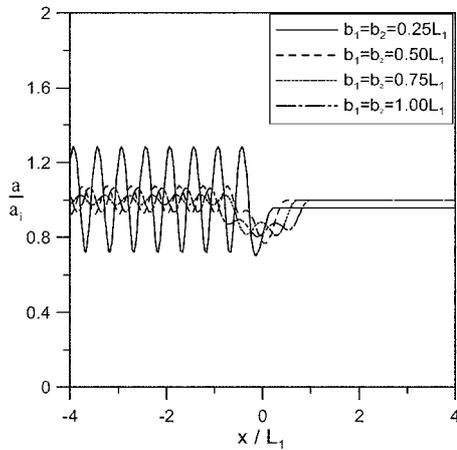


Fig. 5. Dimensionless wave amplitude of analytical solution for different half-widths of trench with $\alpha=2$, $h_0=6.4$ m, $h_1=h_2=3.2$ m and $k_1 h_1=0.167$.

Table 3. Reflection and transmission coefficients of analytical solution for different half-widths of trench with $\alpha=2$, $h_0=6.4$ m, $h_1=h_2=3.2$ m and $k_1 h_1=0.167$

	$ R $	$ T $	$\frac{(EC_g)_r + (EC_g)_t}{(EC_g)_i}$
$b_1=0.25L_1$	0.283	0.959	1.00
$b_1=0.50L_1$	0.0744	0.997	1.00
$b_1=0.75L_1$	0.0268	0.999	1.00
$b_1=1.00L_1$	0.0654	0.998	1.00

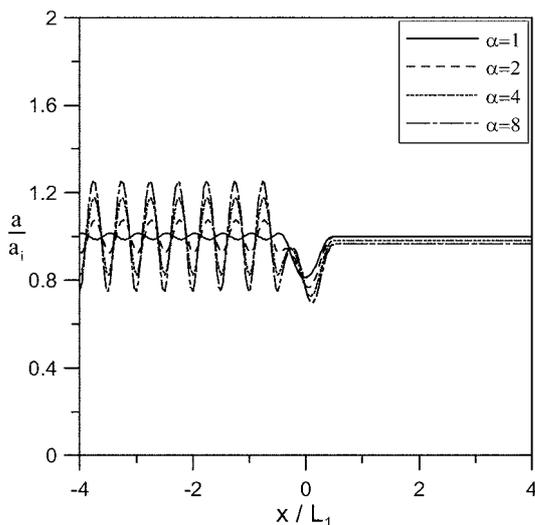


Fig. 6. Dimensionless wave amplitude of analytical solution for different powers with $h_0=6.4$ m, $h_1=h_2=3.2$ m, $b_1=b_2=0.5L_1$ and $k_1 h_1=0.167$.

Table 4. Reflection and transmission coefficients of analytical solution for different powers with $h_0=6.4$ m, $h_1=h_2=3.2$ m, $b_1=b_2=0.5L_1$ and $k_1 h_1=0.167$

	$ R $	$ T $	$\frac{(EC_g)_r + (EC_g)_t}{(EC_g)_i}$
$\alpha=1$	0.0163	0.998	1.00
$\alpha=2$	0.0744	0.997	1.00
$\alpha=4$	0.0268	0.999	1.00
$\alpha=8$	0.0654	0.998	1.00

Table 3의 경향과 유사하게 어느 정도까지 증가하다가 다시 감소하는 추세를 보인다. 그 결과, 투과율은 증가하다가 감소하며 에너지는 보존된다. $\alpha=1$ 인 경우 트렌치 전면에서 재반사가 거의 일어나지 않아 트렌치 내부에 부분 정상파가 형성되지 않는다. 그 결과 트렌치 전면에서의 위상은 다른 결과들과 차이를 보인다.

Fig. 7 및 Table 5는 트렌치의 폭(b_1 or b_2)에 변화를 주어 비대칭인 경우에 대한 파고 변화값, 반사율 및 투과율을 조사한 결과이다. 먼저 $\alpha=2$, $h_0=6.4$ m, $h_1=3.2$ m, $b_1=0.5L_1$ 및 $k_1 h_1=0.167$ 로 고정하고 b_2 의 값을 $0.0b_1$, $0.25b_1$, $0.50b_1$ 및 $1.00b_1$ 으로 변화를 주어 h_2 의 값이 각각 6.4, 6.2, 5.6 및 4.6 m인 경우에 대하여 파랑 변화를 조사한 후 반대의 경우에 대해서도 결과값을 구하였다. b_1 또는 b_2 가 증가함에 따라 투과율은 수심의 영향을 받아 지속적으로 증가하거나 감소하는 경향을 보이지만 반사율은 두 경우 모두 증가하다가 감소를 하였다. 한가지 특이한 현상은 b_1 과 b_2 의 값을 바꾸어도 동일한 반사율을 보인다는 것이다. 즉, 트렌치 위를 $-x$ 축에서 입사하는 경우와 $+x$ 축에서 입사하는 경우 모두 동일한 반사율을 보였다.

3.3 경사면의 기울기에 따른 반사 계수의 비교

Booij(1983)는 중간수심영역($k_1 h_1=0.865$)에서 Fig. 8과 같은 일정 경사면에 입사하는 파의 반사 계수를 검토하여 환경사 방정식의 적용 가능한 기울기를 최대 1:3으로 제시한 바 있다. 본 연구에서는 $\alpha=1$, $h_0=0.6$ m, $h_2=0.2$ m, $b_1=0.0$ m의 값을 주어 트렌치의 단면을 Booij의 단면과 동일하게 만든 다음, 입사파의 주기를 8 sec로 하여 천해역의 조건($k_1 h_1=0.196$)에서 기울기 변화에 따른 반사 계수를 계산해 보았다. Fig. 9는 본 논문에서 유도한 해석 해의 결과와 Laplace 방정식을 유한요소기법을 이용하여 직접적으로 계산한 수치해석결과를 비교한 것이다. 천해역의 경우, 중간수심영역과는 달리 바다 경사향과 곡률향의 영향이 크지

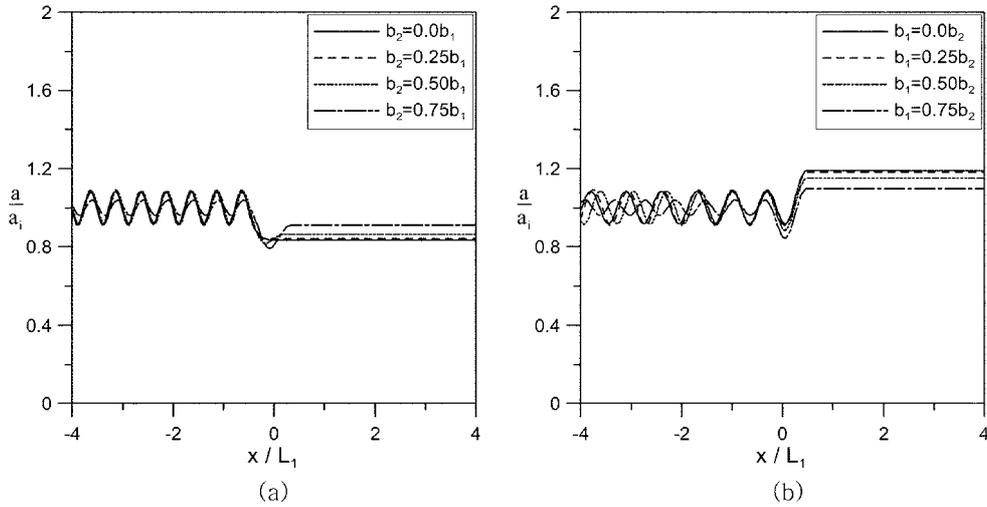


Fig. 7. Dimensionless wave amplitude of analytical solution for an asymmetric trench with $\alpha=2$ and $h_0=6.4$ m; (a) $h_1=3.2$ m, $b_1=0.5L_1$ and $k_1h_1=0.167$; (b) $h_2=3.2$ m, $b_2=0.5L_2$ and $k_1h_1=0.167$.

Table 5. Reflection and transmission coefficients of analytical solution for different half-widths of trench with $\alpha=2$, $h_0=6.4$ m; (a) $h_1=3.2$ m, $b_1=0.5L_1$ and $k_1h_1=0.167$; (b) $h_2=3.2$ m, $b_2=0.5L_2$ and $k_2h_2=0.167$

	$ R $	$ T $	$\frac{(EC_g)_r + (EC_g)_t}{(EC_g)_i}$	
$b_1 = 0.5L_1$	$b_2 = 0.0b_1$	0.0837	0.834	1.00
	$b_2 = 0.25b_1$	0.0907	0.840	1.00
	$b_2 = 0.50b_1$	0.0842	0.863	1.00
	$b_2 = 0.75b_1$	0.0390	0.909	1.00
$b_2 = 0.5L_2$	$b_1 = 0.0b_2$	0.0837	1.19	1.00
	$b_1 = 0.25b_2$	0.0907	1.18	1.00
	$b_1 = 0.50b_2$	0.0842	1.15	1.00
	$b_1 = 0.75b_2$	0.0390	1.10	1.00

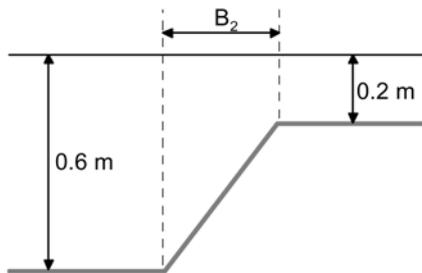


Fig. 8. Schematic diagram for numerical test of wave reflection from a plane slope.

않아 환경사 방정식만을 사용하여도 정해와 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다.

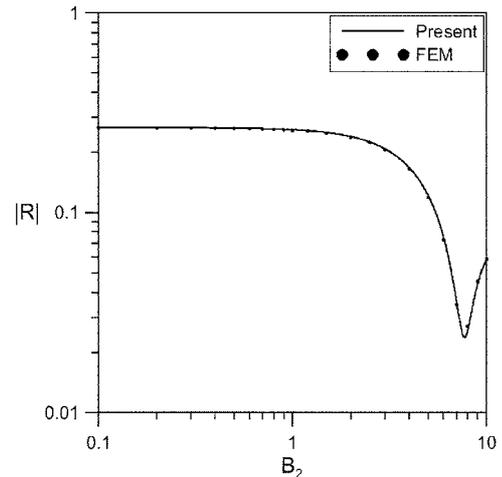


Fig. 9. Reflection coefficient versus horizontal length of a plane slope.

3.3 Bragg 반사

트렌치에 의한 입사파의 변형을 자세히 알아보기 위하여 Bragg 반사를 모의하였다. Miles(1981)는 바닥 지형의 변동 폭이 작은 경우에 대하여 반사율을 구할 수 있는 식을 다음과 같이 제시하였다.

$$R_{Miles} = \left| \frac{2k^2}{2kh + \sinh 2kh} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{2ikx} dx \right| \quad (35)$$

여기서, $\delta(x)$ 는 바닥 수심을 나타내며 본 논문의 경우

다음과 같이 표현할 수 있다.

$\alpha = 1$ 인 경우

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{h_1 - h_0}{b_1} x & (0 \leq x < b_1) \\ h_0 \left(\frac{x - 2b_1}{a} \right) & (b_1 \leq x < b_2) \end{cases} \quad (36)$$

$\alpha \geq 2$ 인 경우

$$\alpha(x) = h_0 \left(\frac{x^\alpha - 2b_1 x^{\alpha-1}}{a^\alpha} \right) \quad (0 \leq x \leq b_1 + b_2) \quad (37)$$

$\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $k_1 h_1 = 0.167$ 인 경우에 대하여 본 논문에서 유도한 해석 해와 Miles의 결과를 비교해 보았다. 식(35)에서 파수(k)값으로 입사파의 파수(k_1)값을 사용하면 식(35)은 다음과 같이 표현된다.

$$R_{Miles} = \frac{2h_0}{a^2} \frac{k_1}{2k_1 h_1 + \sinh 2k_1 h_1} \left| \frac{b_1}{2ik_1} (e^{4ik_1 h_1} + 1) + \frac{1}{4k_1^2} (e^{4ik_1 h_1} - 1) \right| \quad (38)$$

Fig. 10은 $h_0 = 3.5, 4.0, 4.5$ m에 경우에 대해 트렌치의 폭(b_1)을 변화시키면서 식(28)과 식(38)의 결과를 비교한 것이다. Miles의 이론은 바닥 경사의 변동폭이 작은 경우에만 적용이 가능하기 때문에 h_0 값이 작은 경우 매우 잘 일치하지만 증가함에 따라 두 그래프의 차이가 커지는 것

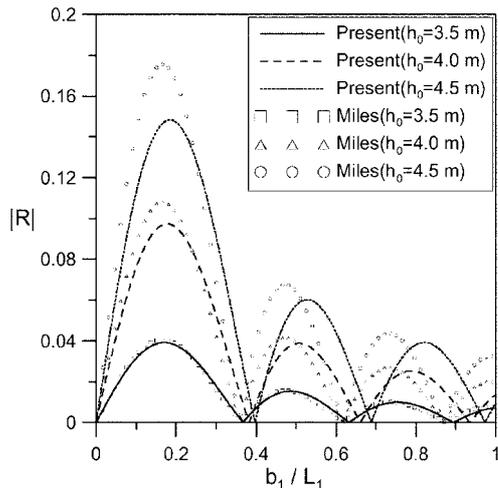


Fig. 10. Reflection coefficients of present and Miles solutions for different central water depths with $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, and $k_1 h_1 = 0.167$.

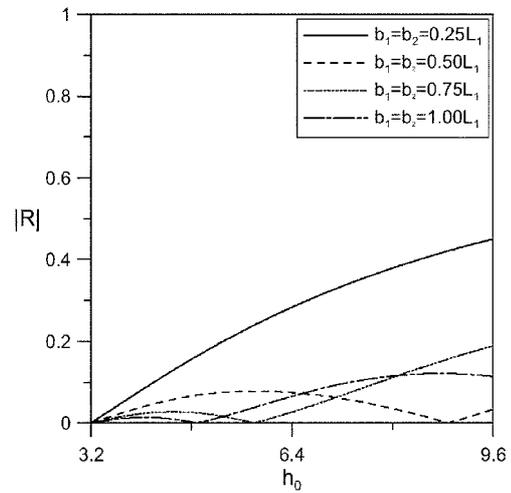


Fig. 11. Reflection coefficients of analytical solution for different half-widths of trench with $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, and $k_1 h_1 = 0.167$.

을 관측할 수 있다. 동일한 수심(h_0)에 대해, 트렌치의 폭(b_1)이 증가할수록 반사율은 주기적으로 변화하며 h_0 의 값이 증가할수록 이러한 경향은 더욱 크게 나타난다. b_1/L_1 의 값이 작은 경우, 수심(h_0)이 증가할수록 반사율이 증가하였으나 b_1/L_1 의 값이 큰 경우 각각의 수심에서 구한 반사율 그래프가 교차하는 구간이 증가하고 이 구간에서는 수심이 증가함에 따라 반사율은 감소하다가 증가하기도 하였다. $h_1 = 4.5$ m, $b_1/L_1 \approx 0.2$ 부근에서 최대 반사가 일어나며 반사율은 약 15%정도가 된다.

마지막으로 트렌치 중심에서의 수심(h_0)값에 변화를 주면서 반사율을 계산해보았다. Fig. 11은 $\alpha = 2$, $h_1 = h_2 = 3.2$ m, $k_1 h_1 = 0.167$ 로 고정하고, b_1/L_1 이 0.25, 0.5, 0.75 및 1.0인 경우에 대해 반사율을 계산한 것이다. h_0 가 증가함에 따라 반사율은 주기적으로 변화하였으며, b_1 의 값이 증가함에 따라 주기의 폭 및 크기 모두 감소하였다. 반사율 그래프의 주기가 b_1 의 값에 따라 다르기 때문에 h_0 의 값이 작은 경우에는 b_1 의 값이 증가함에 따라 반사율은 꾸준히 감소하였으나 가장 짧은 주기가 반복되는 약 4.8 m의 값을 넘어서부터 반사율은 불규칙적으로 변화하였다.

4. 결 론

본 논문에서는 다양한 모양을 가지는 트렌치 위를 통과하는 장파의 변형에 관한 환경사 방정식의 해석 해를 유도하였다. 장파의 가정을 사용하여 환경사 방정식을 변수 계

수를 갖는 이차 상미분 방정식으로 변환하였으며 멱급수 이론을 적용하여 해석 해를 구하였다. 수치 모델과의 비교를 통하여 본 논문에서 유도된 해석 해의 타당성을 확인하였으며, 타당성이 검증된 해석 해를 이용하여 트렌치의 변화에 따른 파랑 변형 및 Bragg 반사를 모의하였다. 반사율에 영향을 끼치는 요소는 트렌치 중심에서의 수심, 트렌치의 폭, 차수 등이 있으며 이 중에서 수심 또는 폭의 값에 변화를 주면서 Bragg 현상을 조사하였다. 수심 및 폭의 변화에 반사율은 주기적으로 변화하였으나 그 관계는 명확하게 나타나지 않았다.

본 논문은 환경사 방정식에 장파의 가정을 사용하여 해석 해를 유도하였기 때문에 적용성에 한계가 있다. 따라서, 함몰형 지형에 따른 파랑 변형 및 Bragg 현상에 대해 폭넓은 이해를 하기 위해서는 해석 해의 적용성을 확장시킬 필요가 있다.

참고문헌

- Bender, C.J. and Dean, R.G. (2003). Wave transformation by two-dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions, *Coastal Eng.*, 50, 61-84.
- Booij, N. (1983). A note on the accuracy of the mild-slope equation, *Coastal Eng.*, 191-203.
- Chang, H.-K. and Liou, J.-C. (2007). Long wave reflection from submerged trapezoidal breakwaters. *Ocean Eng.*, 34, 185-191.
- Cho, Y.-S. and Lee, C. (2000). Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topographies, *J. Coastal Res.*, 16, 870-879.
- Dean, R.G. (1964). Long wave modification by linear transitions, *Rev. Mat. Hisp.-Am.*, 90(1), 1-29.
- Kirby, J. and Dalrymple, R.A. (1983). Propagation on oblique incident water waves over a trench, *J. Fluid Mech.*, 133, 47-63.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*, 6th Ed., Dover, New York.
- Lassiter, J.B. (1972). The propagation of water waves over sediment pockets, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- Lee, J.J. and Ayer, R.M. (1981). Wave propagation over a rectangular trench, *J. Fluid Mech.*, 110, 335-347.
- Lin, P. Liu, H.-W. (2005). Analytical study of linear long-wave reflection by a two-dimensional obstacle of general trapezoidal shape, *J. of Eng. Mech.*, 131, 822-830.
- Liu, P.L.-F. Cho, Y.-S. Kostense, J.K. and Dingemans, M.W. (1992). Propagation and trapping of obliquely incident wave groups over a trench with currents, *Appl. Ocean Res.*, 14, 201-212.
- Miles, J. (1981). Oblique surface-wave scattering matrix for a shelf, *Dynamics of Atmosphere and Oceans*, 6, 12-123.
- Miles, J.W. (1982). On surface-wave diffraction by a trench, *J. Fluid Mech.*, 115, 315-325.
- Takano, K. (1960). Effects d'un obstacle parallelepipede sur la propagation de la houle, *Houille Blanche*, 15, 247.
- Zhang, Y. and Zhu, S. (1994). New solutions for the propagation of long water waves over variable depth, *J. Fluid Mech.*, 278, 391-406.

Received April 4, 2007

Accepted May 30, 2007