

## 論文

## 극직교 이방성 회전원판의 진동에 대한 횡전단변형 및 회전관성 효과

김동현\*, 구교남\*\*+

**Effects of Transverse Shear Deformation and Rotary Inertia  
on Vibration of Rotating Polar Orthotropic Disks**

Dong-Hyun Kim\*, Kyo-Nam Koo\*\*+

**ABSTRACT**

Dynamic instability of rotating disks is the most significant factor to limit its rotating speed. Application of composite materials to rotating disks may enhance the dynamic stability leading to a possible design of rotating disks with lightweight and high speed. Whereas much work has been done on the effect of transverse shear and rotary inertia, called Timoshenko effect, on the dynamic behavior of plates, there is little work on the correlation between the effect and the rotation of disk, especially nothing in case of composite disks. The dynamic equations of a rotating composite disk are formulated with the Timoshenko effect and the vibrational analysis is performed by using a commercial package MSC/NASTRAN. According to the results, the Timoshenko effect goes seesaw in some modes, unlike the well-known fact that the effect decreases as the rotating speed increases. And it can be concluded, based only on the present results, that decrement of the Timoshenko effect by disk rotation grows larger as the thickness ratio decreases, the diameter ratio increases, the modulus ratio increases, and the mode number increases.

**초 록**

회전원판의 동적 불안정성은 회전속도를 제한하는 가장 중요한 요인이다. 복합재료를 회전원판에 적용시킬 경우 동적 안정성을 증가시킬 수 있어 경량화와 고속화를 동시에 이룰 수 있다. 티모셴코 효과라고 불리는 횡전단변형과 회전관성이 판 구조물의 동적거동에 미치는 영향은 많은 연구가 진행되어왔으나 원판의 회전이 이 효과에 미치는 영향에 대한 연구는 극히 제한적이며 복합재료 원판의 경우는 전무한 실정이다. 본 연구에서는 티모셴코 효과를 고려한 직교이방성 회전원판의 동적 방정식을 유도하였으며 상용 유한요소 프로그램인 MSC/NASTRAN을 이용하여 진동해석을 수행하였다. 해석결과에 따르면 특정 모드에서는 일반적으로 알려진 바와는 달리 회전수의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소하다 증가하는 현상을 보였다. 또한 데이터만을 기초로 회전증가에 따른 티모셴코 효과의 감소는 두께비가 작아질수록 증가하고, 반경비, 탄성계수 대 전단계수 비, 진동 모드 수가 커질수록 증가하는 것으로 결론지을 수 있다.

**Key Words** : 회전원판(Rotating Disk), 복합재료(Composite Materials), 유한요소법(Finite Element Method), 횡전단변형(Transverse Shear Deformation), 회전관성(Rotary Inertia)

**1. 서 론**

섬유강화 복합재료는 높은 비강성과 비강도를 갖추고 있어 항공우주 구조물에는 물론 자동차, 소형선박 그리고 각종 스포

\* 울산대학교 항공우주공학과 대학원

\*\*+ 울산대학교 항공우주공학과, 교신저자(E-mail:knkoo@mail.ulsan.ac.kr)

츠용품 등 널리 사용되고 있으며 현재는 구조재료뿐만 아니라 거의 모든 기기에 그 사용 영역을 넓히기 위한 연구가 시도되고 있다. 원형 전기톱, 터빈, 브레이크 디스크와 CD(compact disk), DVD(digital versatile disk)등의 정보저장기기 등에 응용되고 있는 회전원판에 복합재료를 적용시킬 경우, 정적강도의 증가는 물론이고 동적 안정성도 대폭 증가되어 회전원판의 고속화와 경량화가 이루어질 수 있음이 밝혀졌다[1-4].

회전하지 않는 보와 판의 동적 거동의 예측에 있어서 횡전단변형(transverse shear)과 회전관성(rotary inertia)의 고려는 각각 구조물의 유연성과 관성을 증가시켜 고유진동수를 낮추는 역할을 한다 [5-6]. 이는 매우 잘 알려진 현상이며 티모센코(TIMOSHENKO) 효과라고 부르기도 한다. 그러나 회전과 티모센코 효과에 대한 정량적인 상관관계는 극히 제한적이며 등방성 보 또는 원판에 대한 연구만 이루어져 있다. 예를 들어 등방성 보에 대한 연구들에서는 회전에 의한 강성화(stiffening) 효과로 회전이 증가할수록 티모센코 효과가 줄어든다는 사실만을 제시하고 있다 [7-10]. 이들 연구 중 특별히 Yokohama의[10] 논문을 주목할 필요가 있는데 그는 유한요소법을 이용하여 회전하는 티모센코 보의 고유진동수를 계산한 결과, 회전에 의해 횡전단변형 효과는 모든 모드에서 줄어들고 회전관성 효과는 2차 이상의 모드에서 증가한다고 밝혔으며 이를 종합한 티모센코 효과는 결과적으로 줄어든다는 결과를 제시하였다.

티모센코 효과를 고려한 등방성 회전원판의 진동해석을 다룬 연구는 그리 많지 않으며 Sinha와[11] Côté 등[12]에 의해서 수행되었다. Sinha는[11] 회전원판에 대하여 민들린(Mindlin) 판이론을 적용하여 두께비, 내경 대 외경비 그리고 진동 모드의 매개변수의 변화가 회전속도에 따라 고유진동수에 미치는 영향을 살펴보았다. 그는 원판의 회전에 의한 강성 증가가 횡전단변형에 의한 강성 감소보다 우세하다고 제시하였을 뿐 각 매개변수와 회전속도에 대한 티모센코 효과를 정량적으로 비교 제시하지는 않았다. Côté는[12] 원판의 회전이 티모센코 효과에는 별다른 영향을 미치지 않는다는 결론을 내렸다.

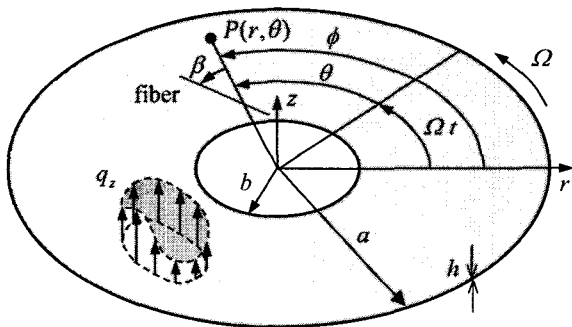


Fig. 1 Coordinates and geometry of rotating disk.

앞서 언급한 바와 같이 과거의 연구들에서는 원판의 회전이 티모센코 효과에 미치는 영향에 대해 뚜렷한 결론이 없으며 복합재료 원판에 대한 연구는 진무한 실정이다. 따라서 본 연구에서는 복합재료 원판이 회전할 때 지배방정식을 유도하였다. 상용 유한요소해석 프로그램인 MSC/ NASTRAN을 이용하여 진동해석을 수행하였다. 등방성 재료와 극직교 이방성 회전원판의 두께비와 회전속도에 따라 티모센코 효과를 제시 비교하였다. 등방성 재료로는 일반 CD의 기판 재료인 폴리카보네이트(polycarbonate)를, 복합재료로는 대표적인 유리섬유 복합재료(GFRP)인 E-glass /Epoxy를 사용하였다.

## 2. 운동방정식과 유한요소해석

### 2.1 운동방정식

극직교 이방성 회전원판의 운동방정식은 Fig. 1과 같이 정의된 회전 좌표계 (r, theta)에 대해 해밀턴(Hamilton)의 원리를 이용하여 유도할 수 있다. 티모센코 효과를 고려한 회전원판의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\theta}{\partial r} \left[ r D_{11} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + D_{12} \left( \phi_r + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} \right) \right] - D_{12} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} - D_{22} \left( \frac{\phi_r}{r} + \frac{\partial \phi_\theta}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ D_{66} \left( -\frac{\phi_\theta}{r} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} \right) \right] - r A_{45} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - r A_{55} \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = r I_2 \frac{\partial^2 \phi_r}{\partial t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ D_{12} \frac{\partial \phi_r}{\partial r} + D_{22} \left( \frac{\phi_r}{r} + \frac{\partial \phi_\theta}{r \partial \theta} \right) \right] + D_{66} \left( -\frac{\phi_\theta}{r} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} \right) + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r D_{66} \left( -\frac{\phi_\theta}{r} + \frac{\partial \phi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \phi_r}{r \partial \theta} \right) \right] - r A_{44} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) - r A_{55} \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) = r I_2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2} \quad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ A_{44} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + A_{45} \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ r A_{45} \left( \phi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) + r A_{55} \left( \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \bar{N}_r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \bar{N}_\theta \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) = r I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1c)$$

여기서 w는 횡방향 변위, phi\_r와 -phi\_theta는 각각 theta축과 r축에 대한 회전각이고, A\_ij와 D\_ij는 원판의 각각 인장강성, 굽힘강성이며 N\_bar\_r과 N\_bar\_theta는 원판의 회전에 의한 평면하중이다. 또한 원판의 밀도를 rho라고 할 때 I\_0와 I\_2는 다음과 같이 정의된다.

$$(I_0, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z^2) dz \quad (2)$$

식 (1)의 정해(exact solution)를 구하는 것은 불가능하므로 본 연구에서는 유한요소해를 구하는 것이 효율적이다. 식 (1)의 유한요소 정식화 및 수치해를 구하는 것은 어려운 작업은 아니지만, 보다 안정적이고 정확한 해를 구하는 것이 바람직하다고 판단되어 본 연구에서는 검증된 상용 프로그램인 MSC/NASTRAN을 이용하여 유한요소해를 구한다. 조화운동에 대한 식 (1)의 유한요소 식은 다음과 같이 고유치 방정식이 된다.

$$([K] + \Omega^2 [K_\Omega] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\} \quad (3)$$

여기서  $[K]$ 는 강성행렬,  $\Omega$ 는 회전속도,  $[K_\Omega]$ 는 회전에 의한 강성행렬,  $[M]$ 은 질량행렬,  $\omega$ 는 고유진동수(rad/s)를 나타낸다. 회전원판의 고유진동수는 회전수  $\Omega$ 를 변화시켜 가며 계산하게 된다.

### 2.2 유한요소 모델링

본 연구에서는 내경 대 외경비( $b/a$ )에 따른 변화를 살펴보기 위해  $b/a = 0.25, 0.5$  두 가지 경우를 선택하였다. 유한요소 모델은 원통좌표계에서 CQUAD4 요소를 이용하였다. 수렴성 시험을 거쳐  $b/a = 0.25$ 인 원판은 반경방향으로 30개와 원주방향으로 120개,  $b/a = 0.5$ 인 원판은 반경방향으로 15개와 원주방향으로 120개의 요소를 사용하였으며 각각 총 3,600개와 1,800개의 요소를 사용하였다. Fig. 2는 유한요소 모델링을 보여준다. 경계조건은 내경 원주를 따라 고정지지, 외경 원주를 따라 자유운동을 할 수 있도록 설정하였다.

회전에 의한 하중은 RFORCE 필드를 이용하여 회전수를 부과하였으며 비선형 해법인 SOL 106을 이용하여 회전시의 고유진동해석을 수행하였다.

## 3. 계산결과 및 검토

### 3.1 재료의 물성치

복합재료의 섬유각의 변화에 따른 티모셴코의 효과를 알아보기 위해서 반경강화(radially reinforced: RR)원판과 원주강화(circumferentially reinforced: CR) 원판을 고려하였다. 반경강화(RR) 원판과 원주강화(CR) 원판은  $(r, \theta)$  좌표계에서 반경방향을 기준으로 각각 0도와 90도의 섬유각을 갖는 단층판(lamina)이다.

회전원판에 적용시킨 등방성 재료(polycarbonate)와 복합재료(GFRP)의 물성치를 Table 1에 제시하였다. 직교이방성 복합재료 원판의 횡전단변형을 고려하기 위해서는  $G_{23}$ 가 더 필요하나 일반적으로 제공되고 있지 않으므로 (2-3) 평면이 등방성임을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (4)$$

섬유강화 복합재료의  $\nu_{23}$ 는 일반적으로 0.4-0.6의 값을 가지며 본 연구에서는 0.5를 사용하였다.

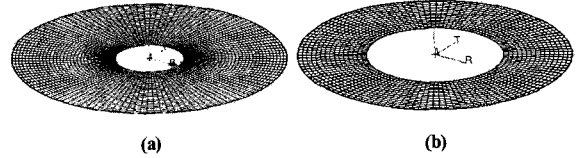


Fig. 2 Finite elements for rotating disks with (a)  $b/a=0.25$  and (b)  $b/a=0.5$ .

Table 1 Material properties

Properties	Polycarbonate	E-glass/Epoxy
$E_1$	2.2 GPa	38.6 GPa
$E_2$	2.2 GPa	8.27 GPa
$G_{12}$	0.846 GPa	4.14 GPa
$\nu_{12}$	0.30	0.26
$\rho$	1220 kg/m <sup>3</sup>	1800 kg/m <sup>3</sup>

Table 2 Nondimensional angular natural frequency

$$\bar{\omega} = 2\pi f \sqrt{\rho a^4 h / D}; \nu = 0.3, a/h = 5, b/a = 0.3.$$

Mode	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
Côté [11]	6.18	5.91	30.81	32.43
Sinha [12]	6.31	5.97	28.93	29.08
Present	6.20	5.87	31.64	33.20

Table 3 Nondimensional natural frequency

$$\bar{f} = f \sqrt{\rho a^4 / E_2 h^2}; a/h = 50, b/a = 0.25.$$

Rotating speed (rpm)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	
3,000	Koo [3]	0.4613	0.4618	0.5240	0.7565
	Present	0.4615	0.4621	0.5243	0.7573
5,000	Koo [3]	0.4746	0.4761	0.5393	0.7704
	Present	0.4747	0.4763	0.5396	0.7712
7,000	Koo [3]	0.4938	0.4967	0.5616	0.7908
	Present	0.4939	0.4969	0.5618	0.7916

### 3.2 해석 결과 검증

본 연구에서 사용된 유한요소 모델과 결과의 타당성을 검증하기 위하여 비회전과 회전에 대한 각 진동모드에서의 고유진동수를 기존의 연구들과 Table 2와 3에 제시하였다. Table 2에 외경 대 두께비  $a/h = 5$ , 내경 대 외경비  $b/a = 0.3$ 을 갖는 두꺼운 비회전 등방성(PC) 원판에 대해 무차원 고유진동수  $\bar{\omega}$ 를 Sinha와 [11] Côté의[12] 연구 결과와 비교하였다. 모드  $(m,n)$ 에서  $m$ 은

절원,  $n$ 은 절경의 수를 나타낸다. Table 3에서는  $a/h = 50$ ,  $b/a = 0.25$ 인 비교적 얇은 GFRP 반경강화(RR) 원판에 대하여 무차원 고유진동수  $\bar{f}$ 를 회전 속도별로 Koo의[3] 연구 결과와 비교하였다. Table 2와 3을 통하여 비교적 두꺼운 원판과 복합재료 회전원판에 대한 MSC/NASTRAN의 유한요소해석 결과가 다른 연구들의 결과와 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다.

### 3.3 비회전 원판의 티모셴코 효과

티모셴코 효과는 다음과 같은 진동수의 오차  $\bar{f}_{error}$ 로 평가될 수 있다.

$$\bar{f}_{error} = \frac{\bar{f}_{nt} - \bar{f}_t}{\bar{f}_{nt}} \times 100(\%) \quad (5)$$

여기서  $\bar{f}_t$ 와  $\bar{f}_{nt}$ 는 각각 티모셴코 효과를 고려하고 고려하지 않은 무차원 고유진동수로 다음과 같이 계산된다.

$$\bar{f} = f \sqrt{\rho a^4 / E_2 h^2} \quad (6)$$

Fig. 3과 4는 각각 두께비( $a/h$ )의 변화에 따른 GFRP 반경강화(RR) 원판과 원주강화(CR) 원판의 티모셴코 효과를 보여준다. 티모셴코 효과는 반경강화 원판과 원주강화 원판 모두 절경 모드(diametrical mode)보다는 절원 모드에서 월등히 많이 존재함을 확인할 수 있다. 절원 모드에서는 예상한 대로 원주강화 원판보다 반경강화 원판에서 티모셴코 효과가 크게 나타나고 있다. 이는 반경강화 원판이 반경방향 탄성계수와 전단계수의 비가 훨씬 크기 때문이다. 또한 일반적으로 알려진 바와

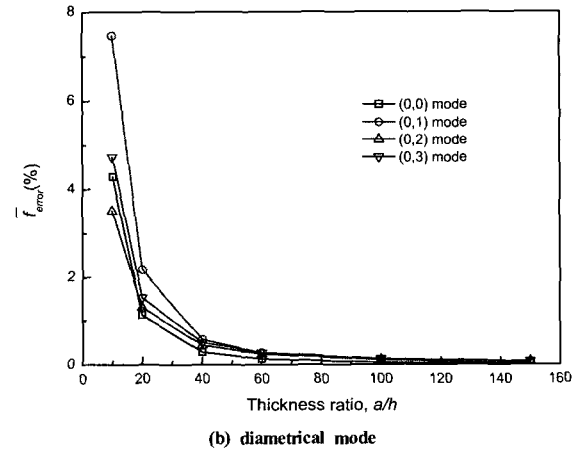
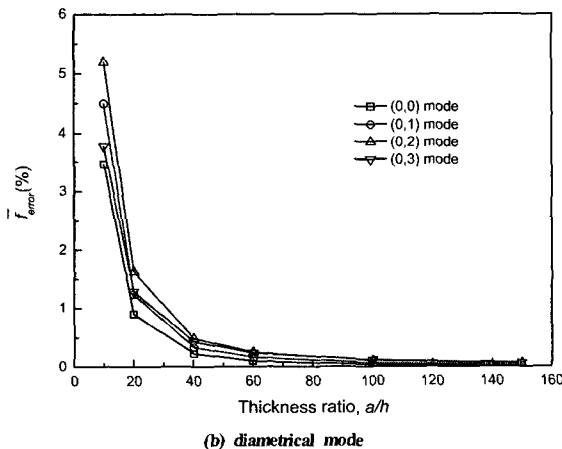
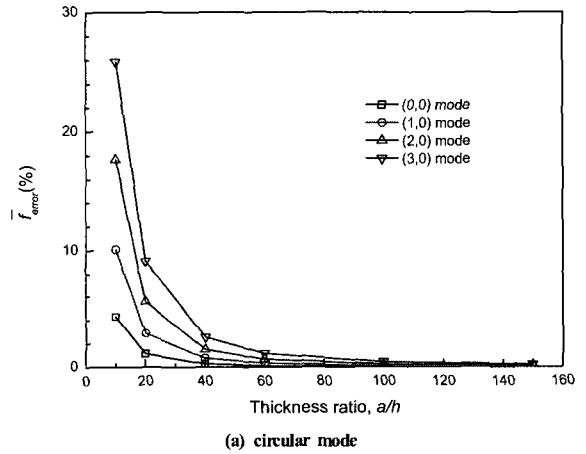
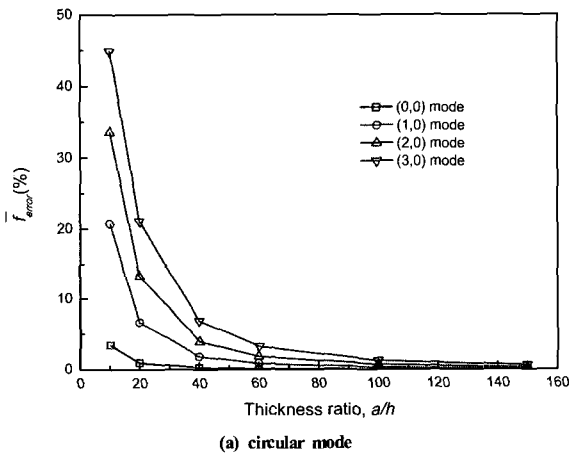


Fig. 3 Timoshenko effect of stationary GFRP RR disk with  $b/a=0.25$

Fig. 4 Timoshenko effect of stationary GFRP CR disk with  $b/a=0.25$

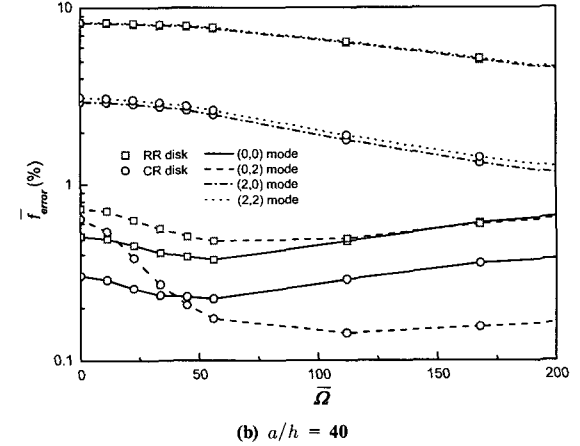
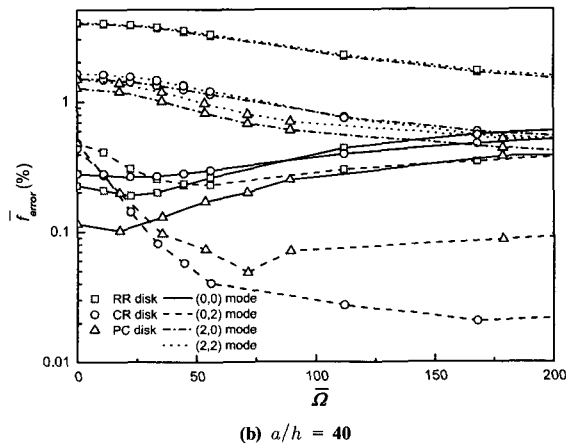
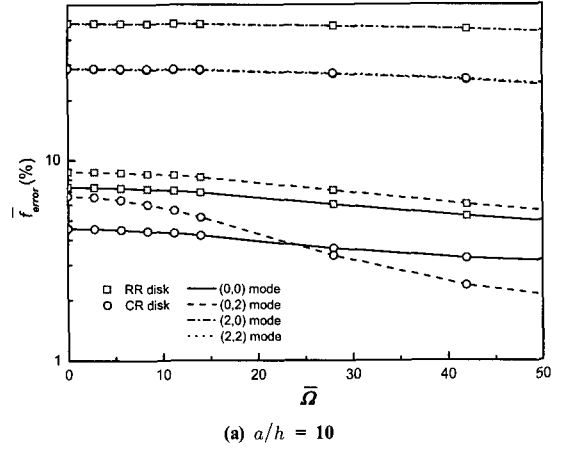
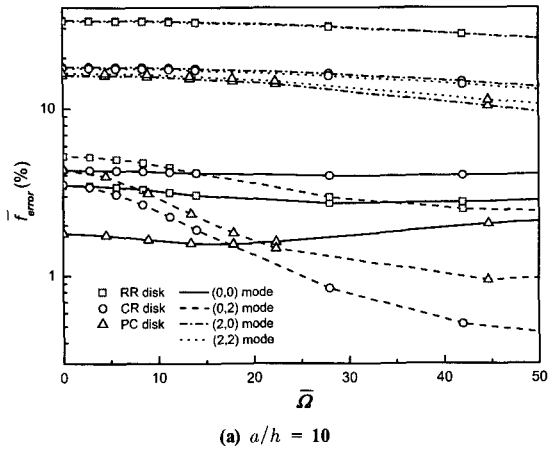


Fig. 5 Timoshenko effect of rotating disks with  $b/a=0.25$ .

Fig. 6 Timoshenko effect of rotating disks with  $b/a=0.5$ .

같이 절원 모드의 경우 티모셴코 효과는 전 두께비 영역에서 모드 수  $m$ 이 증가할수록 증가하고 있다. 그러나 특이하게 절경 모드의 경우는  $a/h < 40$  인 영역에서 모드 수  $n$ 이 증가할수록 그 효과가 반드시 증가하지 않음을 확인할 수 있다. 그 이유는 절경 모드에서 원주방향을 뿐만 아니라 반경방향으로의 횡변위 운동이 티모셴코 효과에 영향을 미치기 때문이다.

### 3.4 회전 원판의 티모셴코 효과

등방성 회전원판을 다룬 Côté 등은[12] 정량적인 분석 없이 회전속도가 티모셴코 효과에 미치는 영향은 거의 없다는 결론을 내렸다. 본 연구에서는 Côté의 결론의 타당성을 확인하고 복합재료 원판에 대해서도 회전수와 티모셴코 효과의 관계를 알아본다. 이를 위해 회전수에 따른 원판의 고유진동수를 등방성재료와 복합재료에 대해 원판의 내경 대 외경비, 두께비, 진동 모드별로

계산하였다.

회전원판의 티모셴코 효과는 다음과 같이 회전수(rpm)의 무차원화를 통해 살펴볼 수 있다.

$$\bar{\Omega} = \Omega(\text{rpm}) \sqrt{\rho a^4 / E_2 h^2} \quad (7)$$

$b/a = 0.25$ 인 등방성(PC) 원판과 극직교 이방성 복합재료(GFRP) 원판에 대해서 회전속도와 반경 대 두께비( $a/h$ )에 따른 티모셴코 효과를 각 진동 모드별로 Fig. 5에 제시하였다.

Fig. 5(a)에 제시된 두꺼운 원판( $a/h = 10$ )일 때의 티모셴코 효과를 보면 모든 원판들은 (0,0)모드에서 회전속도의 증가에 따라 미세하게 감소하다가 증가하고 있다. 등방성(PC) 원판과 원주강화(CR)의 감소량이 반경강화(RR) 원판보다 작게 나타나고 있다. 절경 모드인 (0,2) 모드와 절원 모드인 (2,0)

모드에서는 모든 원판이 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 연속적으로 감소하고 있다. 혼합 모드인 (2,2) 모드는 회전속도의 증가에 따른 티모셴코 효과의 크기는 조금 차이가 있을 뿐 그 경향성이 절원 모드인 (2,0)모드와 거의 유사하게 나타나고 있다. 이는 절원 모드가 절경 모드에 비해 티모셴코 효과가 매우 크기 때문이다.

Fig. 5(b)를 보면 비교적 얇은 원판( $a/h = 40$ )일 때 전체적인 티모셴코 효과의 크기가 5% 미만으로 작게 나타나고 있다. (0,0)모드에서  $a/h = 10$ 일 때처럼 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소하다가 증가하는 경향이 모든 원판에서 뚜렷이 나타나고 있다. 또한 등방성(PC) 원판의 (0,2) 모드도 회전수 증가에 따라 그 효과가 감소하다 미세하나마 증가하는 경향을 보인다. (2,0) 모드에서는 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소량이 두꺼운 원판에 비해 현저히 줄어들음을 확인할 수 있다.

Fig. 6에 원판의 내경 대 외경비( $b/a$ )의 변화가 회전속도의 증가에 따른 티모셴코 효과에 어떤 영향을 미치는지 살펴보기 위해  $b/a = 0.5$ 인 GFRP 회전원판의  $\bar{f}_{error}$ 를 나타내었다.

$a/h = 10$ 일 때의 티모셴코 효과에 대해 제시한 Fig. 6(a)를 보면 전체적인 티모셴코 효과가  $b/a = 0.25$ 일 때 보다 크게 나타나고 있다. (0,0)모드는 Fig. 5에서 제시한  $b/a = 0.25$ 일 때와는 다르게 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소하다가 증가하는 경향이 전혀 나타나지 않으며 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 연속적으로 감소하는 것을 알 수 있다. (0,2)모드에 대한 티모셴코 효과를 보면 회전속도의 증가에 따른 티모셴코 효과가 연속적으로 감소하고 있으며 회전속도가 증가할수록 그 감소량이 줄어들었던  $b/a = 0.25$ 일 때와는 다르게 티모셴코 효과가 거의 일정하게 감소하고 있다. 그리고 (0,2)모드에서의 회전에 의한 무차원 고유진동수의 증가율이 원주강화(CR) 원판에서 크게 나타나는 결과로 회전속도의 증가에 따른 티모셴코 효과의 감소량도 원주강화(CR) 원판에서 조금 더 크게 나타나고 있지만 회전속도의 증가에 따른 전체적인 효과의 감소 경향이 반경강화(RR) 원판과 비슷하게 나타나고 있다. (2,0)모드를 보면 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 연속적으로 감소하고 있으며 그 감소량이  $b/a = 0.25$ 일 때보다 작게 나타나고 있고 반경강화(RR) 원판과 원주강화(CR) 원판에서 그 감소량이 거의 동일하게 나타나고 있다. 그리고 (2,2)모드는 (2,0)모드와 거의 동일한 경향성을 나타내고 있다.

$a/h = 40$ 일 때의 티모셴코 효과를 나타낸 Fig. 6(b)를 보면 (0,0)모드는  $b/a = 0.25$ 일 때에서처럼 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소하다가 증가하는 경향이 나타나는 것을 알 수 있다. 그리고 (0,2)모드는  $b/a = 0.5$ 일 때도  $b/a = 0.25$ 일 때처럼 반경강화(RR) 원판에서 회전속도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 감소하다가 증가하는 경향성이 나타나는 것을 알 수 있다. (2,0)모드에서  $b/a = 0.25$ 일 때보다 회전속

도의 증가에 따라 티모셴코 효과가 더 일정하게 감소하고 있음을 알 수 있다.

회전과 극직교 이방성 원판의 형상에 대한 위의 결과를 종합해 보면 동일한 반경 대 두께비( $a/h$ )와 동일한 강성을 갖고 있는 극직교 이방성 원판의 내경 대 외경비( $b/a$ )의 변화로 인한 형상변화는 전체적인 티모셴코 효과와 무차원 고유진동수의 크기, 그리고 회전에 의한 무차원 고유진동수의 증가율을 변화시킨다는 것을 알 수 있다. 그리고 회전에 의한 무차원 고유진동수의 증가율 변화의 주된 효과는 반경강화(RR) 원판과 원주강화(CR) 원판의 회전에 의한 절대적인 무차원 고유진동수의 증가율을 변화시키는 것이라기보다는 상대적인 증가율의 차이를 변화시키는 것이며  $b/a$ 의 증가는 그 상대적인 증가율의 차이를 작게 만든다. 그로 인하여 각 진동모드에서 반경강화(RR) 원판과 원주강화(CR) 원판의 이방성으로 인한 회전에 따른 상대적인 티모셴코 효과의 차이가 증가하기도 하고 감소하기도 한다. 그리고 각 원판에서 회전에 의한 무차원 고유진동수의 증가율 변화로 상대적인 증가율의 차이를 변화시키는 방식은 각 진동모드와 두께비에 따라 다르게 나타나고 있다.

## 4. 결 론

본 연구에서는 원판의 회전에 따라 티모셴코 효과가 고유진동수에 미치는 영향을 살펴보았다. 일반적으로 회전에 의한 강성화 효과로 티모셴코 효과가 줄어드는 것으로 알려져 있었으나 본 연구를 통해 특정 모드에서는 회전수가 증가함에 따라 티모셴코 효과가 감소하다 증가하는 경향을 특별한 현상을 발견할 수 있었다. 회전수에 따른 티모셴코 효과는 두께비, 반경비, 이방성, 진동 모드에 따라 그 경향성이 다르게 나타나고 있다. 본 연구에서 얻은 해석 데이터를 기초로 판단하면 회전 증가에 따른 티모셴코 효과가 증가하는 현상은 두께비( $a/h$ )가 클수록, 반경비( $b/a$ )가 작을수록, 이방성이 작을수록, 그리고 진동 모드수가 낮을수록 강하게 나타나는 것으로 결론 지을 수 있다.

특정 모드에서 회전이 증가수록 티모셴코 효과가 감소하다 증가하는 현상에 대한 원인은 회전에 의한 응력상태의 변화라고 판단되며 본 연구에서 유도한 지배방정식인 식 (1)을 이용하여 원인을 규명하는 연구를 진행할 예정이다.

## 후 기

이 논문은 2007년 울산대학교의 연구비에 의하여 연구되었음.

## 참고문헌

- 1) 구교남, “복합재료 회전원판의 면내응력 해석,” 한국복합재료학회지, 제18권, 제4호, 2005, pp. 8-13.
- 2) 구교남, “극직교 이방성 회전원판의 진동해석 및 임계속도, I: 정식화 및 해법,” 한국소음진동공학회 논문집, 제16권, 제2호, 2006, pp. 169-175.
- 3) 구교남, “극직교 이방성 회전원판의 진동해석 및 임계속도, II: 해석결과,” 한국소음진동공학회 논문집, 제16권, 제3호, 2006, pp. 247-254.
- 4) 구교남, “복합적층 회전원판의 응력 및 진동해석,” 한국소음진동공학회 논문집, 제16권, 제9호, 2006, pp. 982-989.
- 5) Irie, T., Yamada, G., and Takagi, K., “Natural Frequencies of Thick Annular Plates,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, 1982, pp. 633-638.
- 6) Leissa, W., *Vibration of Plates*, NASA SP-160.
- 7) Du, H., Lim, M. K., and Liew, K. M., “A Power Series Solution for Vibration of a Rotating Timoshenko Beam,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 4, 1994, pp. 505-523.
- 8) Banerjee, J. R., “Dynamic Stiffness Formulation and Free Vibration Analysis of Centrifugally Stiffened Timoshenko Beams,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 247, No. 1, 2001, pp. 97-115.
- 9) Kaya, M. O., “Free Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam by Differential Transform Method,” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, Vol. 78, No. 3, 2006, pp. 194-203.
- 10) Yokohama, T., “Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beams,” *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 30, No. 10, 1988, pp. 743-755.
- 11) Sinha, S. K., “Determination of Natural Frequencies of a Thick Spinning Annular Disk Using a Numerical Rayleigh-Ritz's Trial Function,” *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 81, No. 2, 1987, pp. 357-369.
- 12) Côté, A., Atalla, N., and Nicolas, J., “Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Free Vibration of a Rotating Annular Plate,” *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 119, 1997, pp. 641-643.