韓國經營科學會誌
第32권 第2號
2007年 6月

워킹 휴가형 GI/M/1 대기행렬의 바쁜기간 분석

채경철*† · 임대은*

Busy Period Analysis for the GI/M/1 Queue with Working Vacations

Kyung-Chul Chae* · Dae-Eun Lim*

■ Abstract ■

We consider a GI/M/1 queue with vacations such that the server works with different rate rather than completely stops working during a vacation period. We derive the transform of the joint distribution of the length of a busy period, the number of customers served during the busy period, and the length of the subsequent idle period.

Keyword : Cycle Analysis, Multiple Vacations, Idle Period, Number Served During Busy Period

1. 서 론

휴가형 대기행렬에 대한 기존의 가정에 의하면 휴가기간 중에는 고객에게 서비스를 제공하지 않는다[1]. 이와 달리, 최근에 발표된 워킹(working) 휴가형 대기행렬에서는 휴가기간 중에도 비록 낮은 서비스율(service rate)이나마 고객에게 서비스를 제공한다고 가정한다[2, 5, 7]. 즉, 휴가기간 중에도 서버가 일(work)을 하기 때문에 워킹 휴가형 대기행렬이라 부른다. 하지만 이 대기행렬은 오히려 두 명의 서버가 교대로 근무하는 시스템에 잘 어울린다. 서비스율이 높은 주(main) 서버와 서비스율이 낮은 대리(substitute) 서버가 있다고 하자. 주 서버가 고객을 처리하다가 더 이상 처리할 고객이 없으면 휴가를 떠난다. 그리고, 주 서버의 휴가기간 중에는 대리 서버가 주 서버를 대행해서 도착하는 고

논문접수일 : 2007년 04월 01일 논문게재확정일 : 2007년 06월 01일
* 한국과학기술원 산업공학과
† 교신저자

객을 처리하는 것이다.

워킹휴가를 처음 제안한 Servi and Finn[5]은 M/M/1/MWV 모형을 분석했는데, 여기서 MWV는 복수(multiple) 워킹휴가를 의미한다. 이후 Baba[2]가 GI/M/1/MWV 모형을 분석했고, Wu and Takagi [7]가 M/G/1/MWV 모형을 분석했다. 이들은 모두 안정상태(steady-state) 고객수의 PGF(probability generating function)와 안정상태 대기시간의 LST (Laplace-Stieltjes transform)를 구했으나, 바쁜기간의 분석은 하지 않았다. 이에 본 논문에서는 GI/M/1/MWV 모형의 바쁜기간을 분석한다. 구체적으로 다섯가지 확률변수의 결합변환(joint transform)을 구하는데, 이들은 주 서버의 바쁜기간 길이, 대리 서버의 바쁜기간 길이, 각각의 바쁜기간 동안 처리하는 고객수, 그리고 바쁜기간에 후속하는 유휴기간의 길이이다.

MWV의 정의는 다음과 같다. 주 서버가 서비스를 제공하다가 더 이상 서비스 받을 고객이 없으면 휴가를 떠난다. 주 서버가 휴가 중일 때 도착하는 고객은 대리 서버가 처리한다. 휴가가 끝나서 주 서버가 시스템에 돌아왔을 때 서비스 받을 고객이 없으면 주 서버는 다시 휴가를 떠난다. 휴가를 반복하다가 언젠가 휴가가 끝났을 때 시스템 내에 고객이 있으면 대리 서버는 처리하던 고객을 주 서버에게 인계한다. 이후 주 서버는 계속해서 서비스를 제공하다가 더 이상 서비스 받을 고객이 없으면 다시 휴가를 떠난다.

[비고 1] M/M/1/MWV 모형과 GI/M/1/MWV 모형에서는 서비스 시간이 무기억 속성을 가진 지수분포를 따른다. 따라서, 대리 서버로부터 주 서버에게 인계된 고객의 잔여(remaining) 서비스 시간은 주 서버의 서비스율을 갖는 지수분포를 따른다. 그러나, M/G/1/MWV 모형에서는 주 서버에게 인계된 고객의 잔여 서비스시간의 정확한 분포를 구하기 어렵기 때문에, Wu and Takagi[7]는 주 서버가 새로 서비스를 시작한다고 가정했다. 즉, 대리 서버로부터 이미 받은 서비스는 무효로 가정한 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서 GI/M/1/MWV 모형을 수학적으로 정의한 다음 제 3장에서 GI/M/1/MWV 모형의 바쁜기간을 분석한다. 그리고, 제 4장 결론에서는 본 연구의 결과와 방법에 대한 의의를 논의한다.

2. GI/M/1/MWV 모형에 대한 정의 및 가정

본 논문에서는 GI/M/1/MWV 모형에 대한 Baba [2]의 가정을 따른다. 고객의 도착과정은 재생과정 (renewal process)인데, 도착간격 A의 분포함수를 $A(t)=\Pr\{A\le t\}$라 하고 LST를 $A^*(\theta)=E[e^{-\theta A}]$라 한다. 서비스 시간들은 서로 독립인 지수(exponential) 확률변수로서, 주 서버와 대리 서버의 서비스율은 각각 μ와 η이다(비고 : 기대치는 각각 μ^{-1}와 η^{-1}임). 휴가의 길이 $V_1, V_2, \cdots$는 서로 독립인 지수 확률변수이고 기대치는 v^{-1}이다. 그리고 도착과정, 서비스 시간, 휴가의 길이 세 가지는 서로 독립이다(비고 : 안정상태가 존재할 조건은 $E[A]>\mu^{-1}$과 $v>0$임).

GI/M/1/MWV 모형의 재생성 주기(regeneration cycle)를 다음과 같이 정의한다. 주기의 시작시점은 주 서버가 휴가 중이고 시스템 내에 고객이 없을 때 고객 한 명이 도착하는 시점이다. 즉, 주기의 시작점은 대리 서버의 바쁜기간의 시작점과 일치한다. 그런데, 대리 서버의 바쁜기간은 주 서버의 바쁜기간으로 이어질 수도 있고 이어지지 않을 수도 있다. 전자는 대리 서버의 바쁜기간 중에 주 서버의 휴가가 끝나는 경우이고, 후자는 휴가가 끝나지 않는 경우이다. 전자의 경우 주 서버의 바쁜기간이 끝나면 주 서버는 휴가를 떠난다. 이 경우 유휴기간은 주 서버가 휴가를 떠난 시점으로부터 다시 대리 서버의 바쁜기간이 시작될 때까지의 기간이다. 후자의 경우 유휴기간은 대리 서버의 바쁜기간이 끝난 시점으로부터 다시 대리서버의 바쁜기간이 시작될 때까지의 기간이다.

[비고 2] 편의상 주기를 다음과 같이 정의할 수도 있다. 대리 서버의 바쁜기간에 주 서버의 바쁜기간이 이어지고 이에 유휴기간이 이어지되, 대리 서버의 바쁜기간 중에 주 서버의 휴가가 끝나지 않는 후자의 경우에는 주 서버의 바쁜기간의 길이를 0으로 간주하는 것이다.

3. GI/M/1/MWV 모형의 바쁜기간 분석

대리 서버와 주 서버의 바쁜기간의 길이를 각각 B_1^S와 B_1^M이라 하고, B_1^S와 B_1^M 동안에 처리하는 고객수를 각각 Γ_1^S와 Γ_1^M이라 하자(비고 : S와 M은 각각 대리(substitute)와 주(main)를 의미함). 그리고, 후속하는 유휴기간을 I_1이라 하자. 본 논문에서 구하려는 것은

$$\Omega_1^{MWV} = E[e^{-\theta_1 B_1^S - \theta_2 B_1^M - \theta_3 I_1} z_1^{\Gamma_1^S} z_2^{\Gamma_1^M}]$$

이다. 즉, Ω_1^{MWV}는 5개의 확률변수 B_1^S, B_1^M, I_1, Γ_1^S, Γ_1^M의 결합변환인데, B_1^S, B_1^M, I_1에 대해서는 LST 형태이고 Γ_1^S, Γ_1^M에 대해서는 PGF 형태이다. 그런데, Ω_1^{MWV}을 구하기 위해서 식을 세우려면

$$\Omega_n^{MWV} = E[e^{-\theta_1 B_n^S - \theta_2 B_n^M - \theta_3 I_n} z_1^{\Gamma_n^S} z_2^{\Gamma_n^M}],\ n \ge 2$$

도 필요하다. 즉, Ω_1^{MWV}뿐만 아니라 Ω_2^{MWV}, Ω_3^{MWV}, …도 필요한데, 이의 정의는 다음과 같다. 대리 서버의 바쁜기간 중에 시스템 내의 고객수가 $(n-1)$이라 하자, $n \ge 2$. 이 때 고객이 한 명 도착해서 총 고객수가 n이 된 시점으로부터 대리 서버의 바쁜기간이 끝날 때까지의 시간이 B_n^S이고, 이에 이어지는 주 서버의 바쁜기간의 길이가 B_n^M이다(비고 : 주 서버의 바쁜기간으로 이어지지 않는 경우에는 $B_n^M = 0$으로 간주함([비고 2] 참조)). 그리고, B_n^S와 B_n^M동안 처리하는 고객수가 각각 Γ_n^S와 Γ_n^M이며, B_n^M에 이어지는 유휴기간의 길이가 I_n이다.

[비고 3] Ω_n^{MWV}의 의미는 다음과 같다. 대리 서버에게 소위 n-정책을 적용한다고 하자[1]. 그러면, 대리 서버는 주 서버가 휴가를 떠난 후 n명의 고객이 도착할 때까지 서비스를 제공하지 않다가 고객수가 n명이 되는 순간에 고객을 처리하기 시작하게 된다. 아울러, MWV의 정의를 다음과 같이 수정한다. 휴가가 끝나서 주 서버가 시스템에 돌아왔을 때 대리서버가 서비스를 제공하지 않고 있으면 주 서버는 다시 휴가를 떠난다. 휴가를 반복하다가 언젠가 휴가가 끝났을 때 대리 서버가 고객을 처리하고 있으면 대리 서버는 처리하던 고객을 주 서버에게 인계한다. 이후 주 서버는 계속해서 고객을 처리하다가 더 이상 서비스 받을 고객이 없으면 다시 휴가를 떠난다. 이와 같은 모형에서 대리 서버가 주 서버의 바쁜기간의 길이는 각각 B_n^S와 B_n^M과 확률적으로 일치한다. 그리고, 대리 서버와 주 서버의 바쁜기간 동안에 처리하는 고객수는 각각 Γ_n^S와 Γ_n^M과 확률적으로 일치한다(비고 : 대리 서버의 바쁜기간이 주 서버의 바쁜기간으로 이어지지 않는 경우에는 $B_n^M = \Gamma_n^M = 0$으로 간주함([비고 2] 참조)). 다만, 이와 같은 모형에서 유휴기간은 I_n과 확률적으로 일치하는 것이 아니라 $I_n + \Sigma_{i=1}^{n-1} A_i$와 확률적으로 일치할 따름이다.

Ω_n^{MWV}에 대한 식은 주 서버가 휴가 중일 때 고객이 도착함으로 인해서 총 고객수가 n이 된 시점으로부터, $n \ge 1$, 다음 도착까지의 도착 간격 A시간 동안 일어나는 사건들에 조건을 걸어서 세운다. 이 때 가능한 네 가지 경우는 다음과 같다.

경우 1 : A동안 휴가가 끝나지 않고, n명 미만 이탈
경우 2 : A동안 휴가가 끝나지 않고, n명 모두 이탈
경우 3 : A동안 휴가가 끝나고, n명 미만 이탈
경우 4 : A동안 휴가가 끝나고, n명 모두 이탈

경우 1은 새로운 고객이 도착할 때까지 대리 서버의 바쁜기간이 지속되는 경우로서, 이 경우 B_n^S, B_n^M, I_n, Γ_n^S, Γ_n^M에 대한 조건부 결합변환은 다음과

같다.

$$E\left[e^{-\theta_1 B_n^S - \theta_2 B_n^M - \theta_3 I_n} z_1^{\Gamma_n^S} z_2^{\Gamma_n^M} \,\middle|\, \begin{array}{c} V > A = t, \\ t\text{동안 } k(<n)\text{명이탈} \end{array}\right]$$

$$= E\left[e^{-\theta_1\left(t + B_{n-k+1}^S\right) - \theta_2 B_{n-k+1}^M - \theta_3 I_{n-k+1}} z_1^{\left(k + \Gamma_{n-k+1}^S\right)} z_2^{\Gamma_{n-k+1}^M}\right]$$

$$= e^{-\theta_1 t} z_1^k \Omega_{n-k+1}^{MWV} \tag{1}$$

경우 2는 새로운 고객이 도착하기 전에, 아울러 주 서버의 휴가가 끝나기 전에, 대리 서버의 바쁜기간이 끝나는 경우이다. 따라서, 이 경우에는 $B_n^M = \Gamma_n^M = 0$인데([비고 2] 참조) 조건부 결합변환은 다음과 같다.

$$E\left[e^{-\theta_1 B_n^S - \theta_2 B_n^M - \theta_3 I_n} z_1^{\Gamma_n^S} z_2^{\Gamma_n^M} \,\middle|\, \begin{array}{c} V > A = t,\ y\text{시간이 경과된} \\ \text{시점에서 } n\text{번째 이탈}, 0 < y < t \end{array}\right]$$

$$= E\left[e^{-\theta_1 y - \theta_2(0) - \theta_3(t-y)} z_1^n z_2^0\right] = e^{-\theta_1 y - \theta_3(t-y)} z_1^n \tag{2}$$

경우 4는 새로운 고객이 도착하기 전에 대리 서버의 바쁜기간이 주 서버의 바쁜기간으로 이어지기는 하지만 주 서버의 바쁜기간이 새로운 고객이 도착하기 전에 끝나는 경우로서, 조건부 결합변환은 다음과 같다.

$$E\left[e^{-\theta_1 B_n^S - \theta_2 B_n^M - \theta_3 I_n} z_1^{\Gamma_n^S} z_2^{\Gamma_n^M} \,\middle|\, \begin{array}{c} V = x < t = A,\ x\text{동안 } k(<n) \\ \text{명 이탈}, y\text{ 시간이 경과된 시점} \\ \text{에서 } n\text{ 번째 이탈}, x < y < t \end{array}\right]$$

$$= e^{-\theta_1 x - \theta_2(y-x) - \theta_3(t-y)} z_1^k z_2^{n-k} \tag{3}$$

경우 3은 새로운 고객이 도착하기 전에 대리 서버의 바쁜기간이 주 서버의 바쁜기간으로 이어진 다음 새로운 고객이 도착할 때까지 지속되는 경우이다. 그런데, 이 경우 하에서의 조건부 결합변환을 표현하기 위해서 추가로 필요한 것은 다음과 같다. 휴가가 없는 기본적인(standard) GI/M/1 모형에서 시스템 내의 고객수가 $(n-1)$일 때 고객 한 명이 도착해서 총 고객수가 n이 된 시점으로부터, $n \ge 1$, 바쁜기간이 끝날 때까지의 시간을 β_n, β_n동안 처리하는 고객수를 τ_n, 그리고 후속하는 유휴기간의 길이를 ρ_n이라 하자. 또한, 이들의 결합변환을

$$\Omega_n^{STD} = E\left[e^{-\theta_2 \beta_n - \theta_3 \rho_n} z_2^{\tau_n}\right]$$

이라 하자. 그러면 경우 3하에서의 조건부 결합변환은 다음과 같다.

$$E\left[e^{-\theta_1 B_n^S - \theta_2 B_n^M - \theta_3 I_n} z_1^{\Gamma_n^S} z_2^{\Gamma_n^M} \,\middle|\, \begin{array}{c} V = x < t = A,\ x\text{동안 } k_1\text{명} \\ \text{이탈}, (t-x)\text{동안 } k_2\text{명 이탈}, \\ k_1 + k_2 < n \end{array}\right]$$

$$= E\left[e^{-\theta_1 x - \theta_2\left(t - x + \beta_{n-k_1-k_2+1}\right) - \theta_3 \rho_{n-k_1-k_2+1}} z_1^{k_1} z_2^{\left(k_2 + \tau_{n-k_1-k_2+1}\right)}\right]$$

$$= e^{-\theta_1 x - \theta_2(t-x)} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \Omega_{n-k_1-k_2+1}^{STD} \tag{4}$$

[비고 4] n-정책 하의 GI/M/1 대기행렬의 바쁜기간의 길이, 바쁜기간 동안에 처리하는 고객수, 유휴기간은 각각 β_n, τ_n, $\rho_n + \Sigma_{i=1}^{n-1} A_i$와 확률적으로 일치한다([비고 3] 참조).

Ω_n^{MWV}을 식 (1)~식 (4)로 표현하면 다음과 같다.

$$\Omega_n^{MWV} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-vt} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\eta t} \frac{(\eta t)^k}{k!} e^{-\theta_1 t} z_1^k \Omega_{n-k+1}^{MWV}\, dA(t)$$

$$+ \int_{t=0}^{\infty} \int_{y=0}^{t} e^{-vy} \eta e^{-\eta y} \frac{(\eta y)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta_1 y - \theta_3(t-y)} z_1^n\, dy\, dA(t)$$

$$+ \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{t} v e^{-vx} \sum_{k_1=0}^{n-1} e^{-\eta x} \frac{(\eta x)^{k_1}}{k_1!} \sum_{k_2=0}^{n-1-k_1} e^{-\mu(t-x)} \frac{\{\mu(t-x)\}^{k_2}}{k_2!}$$

$$\times e^{-\theta_1 x - \theta_2(t-x)} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \Omega_{n-k_1-k_2+1}^{STD}\, dx\, dA(t)$$

$$+ \int_{t=0}^{\infty} \int_{x=0}^{t} v e^{-vx} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\eta x} \frac{(\eta x)^k}{k!} \int_{y=x}^{t} \mu e^{-\mu(y-x)} \frac{\{\mu(y-x)\}^{n-1-k}}{(n-1-k)!}$$

$$\times e^{-\theta_1 x - \theta_2(y-x) - \theta_3(t-y)} z_1^k z_2^{n-k}\, dy\, dx\, dA(t) \tag{5}$$

식 (5)에 $n = 1, 2, \cdots$ 순서로 ω, ω^2, $\cdots$을 곱한 다음 모두 합친 것을

$$\Omega^{MWV}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \Omega_n^{MWV},\ \Omega^{STD}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^n \Omega_n^{STD},$$

$$\phi = \theta_1 + v + \eta - \eta z_1 \omega,\ \psi = \theta_2 + \mu - \mu z_2 \omega$$

로 표현하면 다음과 같다(부록 참조).

$$\Omega^{MWV}(\omega) = \left\{\omega^{-1} \Omega^{MWV}(\omega) - \Omega_1^{MWV}\right\} A^*(\phi)$$

$$+ \left\{\omega^{-1} \Omega^{STD}(\omega) - \Omega_1^{STD}\right\} v \{A^*(\psi) - A^*(\phi)\}/(\phi - \psi)$$

$$+ \eta z_1 \omega \left\{A^*(\theta_3) - A^*(\phi)\right\}/(\phi - \theta_3)$$

$$- \frac{v \mu z_2 \omega}{\psi - \theta_3} \left\{\frac{A^*(\psi) - A^*(\phi)}{\phi - \psi} - \frac{A^*(\theta_3) - A^*(\phi)}{\phi - \theta_3}\right\} \tag{6}$$

식 (6)에 있는 $\{\omega^{-1}\Omega^{STD}(\omega)-\Omega_1^{STD}\}$를 먼저 구한다. 기본적인 GI/M/1 모형은 GI/M/1/MWV 모형의 특수한 경우로서 $v\to\infty$인 경우이다(비고 : $E[V]=v^{-1}=0$). 따라서, $\phi\to\infty$이고 $A^*(\phi)=0$이다. 식 (6)에 $A^*(\phi)=0$을 대입하고 $v\to\infty$와 $\phi\to\infty$의 극한을 취하면

$$\Omega^{STD}(\omega)=\{\omega^{-1}\Omega^{STD}(\omega)-\Omega_1^{STD}\}A^*(\psi)+\mu z_2\omega\{A^*(\theta_3)-A^*(\psi)\}/(\psi-\theta_3) \quad (7)$$

를 얻는다. Rouché의 정리에 의하면([1] 참조), 방정식 $\omega=A^*(\psi)$는 단위원 내부에 유일한 근을 가지는데 이를 ω_2라 하자. 식 (7)에 $\omega=\omega_2$를 대입하면 $\Omega^{STD}(\omega_2)$가 소거되어서

$$\Omega_1^{STD}=\mu z_2\{A^*(\theta_3)-\omega_2\}/(\psi_2-\theta_3) \quad (8)$$

를 얻는데, 여기서 $\psi_2=\theta_2+\mu-\mu z_2\omega_2$ 이다(비고 : ω_2는 $\omega=A^*(\psi)$의 근이므로 $A^*(\psi_2)=\omega_2$임). 식 (8)을 식 (7)에 대입하면

$$\Omega^{STD}(\omega)=\frac{\mu z_2\omega^2}{\omega-A^*(\psi)}\left\{\frac{A^*(\theta_3)-A^*(\psi)}{\psi-\theta_3}-\frac{A^*(\psi)}{\omega}\frac{A^*(\theta_3)-\omega_2}{\psi_2-\theta_3}\right\} \quad (9)$$

를 얻고, 다시 식 (8)과 식 (9)로부터 다음을 얻는다.

$$\omega^{-1}\Omega^{STD}(\omega)-\Omega_1^{STD}=\frac{\mu z_2\omega}{\omega-A^*(\psi)}\left\{\frac{A^*(\theta_3)-A^*(\psi)}{\psi-\theta_3}-\frac{A^*(\theta_3)-\omega_2}{\psi_2-\theta_3}\right\} \quad (10)$$

Rouché의 정리에 의하면([1] 참조), 방정식 $\omega=A^*(\phi)$는 단위원 내부에 유일한 근을 가지는데 이를 ω_1이라 하자. 식 (6)에 식 (10)을 대입한 다음 $\omega=\omega_1$을 대입하면 $\Omega^{MWV}(\omega_1)$이 소거 되어서

$$\Omega_1^{MWV}=\frac{v\mu z_2}{\phi_1-\psi_1}\frac{A^*(\theta_3)-\omega_2}{\psi_2-\theta_3}+\{A^*(\theta_3)-\omega_1\}\left\{\frac{\eta z_1}{\phi_1-\theta_3}+\frac{v\mu z_2}{\psi_1-\theta_3}\left(\frac{1}{\phi_1-\theta_3}-\frac{1}{\phi_1-\psi_1}\right)\right\} \quad (11)$$

를 얻는데, 여기서 $\phi_1=\theta_1+v+\eta-\eta z_1\omega_1$이고 $\psi_1=\theta_2+\mu-\mu z_2\omega_1$이다(비고 : ω_1은 $\omega=A^*(\phi)$의 근이므로 $A^*(\phi_1)=\omega_1$임).

4. 결 론

M/G/1 모형의 바쁜기간 분석은 대부분의 교과서에 나와있는 반면에 GI/M/1 모형의 바쁜기간 분석은 주변에서 찾기가 쉽지않다. 사실 Takács[6]나 Cohen[4] 같은 책에는 나와 있지만, 이들은 오래된 책일뿐더러(각각, '62년과 '69년에 초판이 발행되었음), 너무 수학적이라서 내용을 이해하기가 쉽지 않다.

본 논문에서는 GI/M/1/MWV 모형의 바쁜기간을 분석했다. 구체적으로, 대리 서버와 주 서버의 바쁜기간의 길이와 각각의 바쁜기간 중에 처리하는 고객수와 후속되는 유휴기간의 결합 변환을 비교적 이해하기 쉬운 방법으로 구했다. 이 방법은 Chae and Kim[3]이 복수휴가형 GI/M/1 모형에 대해서 사용한 방법으로서 다른 종류의 GI/M/1 모형의 바쁜기간 분석에도 사용할 수 있을 것이다(비고 : 복수휴가형 GI/M/1 모형은 GI/M/1/MWV 모형의 특수한 경우로서 $\theta_1=\eta=0$, $\phi=v$, $\omega_1=A^*(v)$인 경우임).

참 고 문 헌

[1] 이호우, 「대기행렬 이론」, 3판, 시그마프레스, 2006.

[2] Baba, Y., "Analysis of a GI/M/1 Queue with Multiple Working Vacations," *Operations Research Letters*, Vol.33(2005), pp.201-209.

[3] Chae, K.C. and S.J. Kim, "Busy Period Analysis for the GI/M/1 Queue with Exponential Vacations," *Operations Research Letters*, Vol.35(2007), pp.114-118.

[4] Cohen, J.W., *The Single Server Queue, Revised Edition*, North-Holland, Amster-

dam, 1982.

[5] Servi, L.D. and S.G. Finn, "M/M/1 Queue with Working Vacations (M/M/1/WV)," *Performance Evaluation*, Vol.50(2002), pp.41-52.

[6] Takács, L., *Theory of Queues*, Oxford University Press, Oxford, 1962 (Reprinted in 1982 by Greenwood Press, Westport, CT).

[7] Wu, D.A. and H. Takagi, "M/G/1 Queue with Multiple Working Vacations," *Performance Evaluation*, Vol.63(2006), pp.654-681.

부록 : 식 (6) 증명

$\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n$ { 식 (5) 우변 첫째 항 }

$$=\int_{t=0}^{\infty} e^{-(\theta_1+v+\eta)t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\eta z_1\omega t)^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}\omega^{n-k}\Omega_{n-k+1}^{MWV}\,dA(t)$$

$$=\int_{t=0}^{\infty} e^{-(\theta_1+v+\eta-\eta z_1\omega)t}\left\{\omega^{-1}\Omega^{MWV}(\omega)-\Omega_1^{MWV}\right\}dA(t)$$

= 식 (6) 우변 첫째 항

$\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n$ { 식 (5) 우변 둘째 항 }

$$=\eta z_1\omega\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}\int_{y=0}^{t}e^{-(\theta_1-\theta_3+v+\eta)y}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\eta z_1\omega y)^{n-1}}{(n-1)!}\,dy\,dA(t)$$

$$=\eta z_1\omega\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}\int_{y=0}^{t}e^{-(\theta_1-\theta_3+v+\eta-\eta z_1\omega)y}\,dy\,dA(t)$$

$$=\frac{\eta z_1\omega}{\theta_1-\theta_3+v+\eta-\eta z_1\omega}\left\{\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}dA(t)-\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\theta_1+v+\eta-\eta z_1\omega)t}dA(t)\right\}$$

= 식 (6) 우변 셋째 항

$\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n$ { 식 (5) 우변 셋째 항 }

$$=\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\theta_2+\mu)t}\int_{x=0}^{t}ve^{-(\theta_1-\theta_2+v+\eta-\mu)x}\sum_{k_1=0}^{\infty}\frac{(\eta z_1\omega x)^{k_1}}{k_1!}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{\{\mu z_2\omega(t-x)\}^{k_2}}{k_2!}$$

$$\times\sum_{n=k_1+k_2+1}^{\infty}\omega^{n-k_1-k_2}\Omega_{n-k_1-k_2+1}^{STD}\,dx\,dA(t)$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}e^{-(\theta_2+\mu-\mu z_2\omega)t}\int_{x=0}^{t}ve^{-(\theta_1-\theta_2+v+\eta-\mu+\mu z_2\omega)x}\left\{\omega^{-1}\Omega^{STD}(\omega)-\Omega_1^{STD}\right\}dx\,dA(t)$$

$$=v\left\{\omega^{-1}\Omega^{STD}(\omega)-\Omega_1^{STD}\right\}\int_{t=0}^{\infty}e^{-\psi t}\,\frac{1-e^{-(\phi-\psi)t}}{\phi-\psi}dA(t)$$

= 식 (6) 우변 둘째 항

$\sum_{n=1}^{\infty}\omega^n$ { 식 (5) 우변 넷째 항 }

$$=v\mu z_2\omega\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}\int_{x=0}^{t}e^{-(\theta_1-\theta_2+v+\eta-\mu)x}\int_{y=x}^{t}e^{-(\theta_2-\theta_3+\mu)y}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\eta z_1\omega x)^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\{\mu z_2\omega(y-x)\}^{n-1-k}}{(n-1-k)!}dy\,dx\,dA(t)$$

$$=v\mu z_2\omega\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}\int_{x=0}^{t}e^{-(\phi-\psi)x}\int_{y=x}^{t}e^{-(\psi-\theta_3)}dy\,dx\,dA(t)$$

$$=-\frac{v\mu z_2\omega}{\psi-\theta_3}\left\{\int_{t=0}^{\infty}e^{-\psi t}\int_{x=0}^{t}e^{-(\phi-\psi)x}-\int_{t=0}^{\infty}e^{-\theta_3 t}\int_{x=0}^{t}e^{-(\phi-\theta_3)x}\right\}dx\,dA(t)$$

= 식 (6) 우변 넷째 항