

## 감소하는 비용함수를 가진 Robust EOQ 모형\*

임 성 목\*\*

### Robust EOQ Models with Decreasing Cost Functions\*

Sungmook Lim\*\*

#### ■ Abstract ■

We consider (worst-case) robust optimization versions of the Economic Order Quantity (EOQ) model with decreasing cost functions. Two variants of the EOQ model are discussed, in which the purchasing costs are decreasing power functions in either the order quantity or demand rate. We develop the corresponding worst-case robust optimization models of the two variants, where the parameters in the purchasing cost function of each model are uncertain but known to lie in an ellipsoid. For the robust EOQ model with the purchasing cost being a decreasing function of the demand rate, we derive the analytical optimal solution. For the robust EOQ model with the purchasing cost being a decreasing function of the order quantity, we prove that it is a convex optimization problem, and thus lends itself to efficient numerical algorithms.

Keyword : EOQ Model, Robust Optimization, Uncertainty, Convex Optimization

## 1. 서 론

재고관리에서 주문량의 결정에 쓰일 수 있는 모형 중 가장 기본적인 것은 경제적 주문량(economic order quantity, EOQ) 모형이다. 이 모형에서는 단

위 기간 당 발생하는 총비용을 최소화하는데, 총비용에는 구매비용, 주문비용 및 재고유지비용이 포함된다. EOQ 모형은 간단하고 다양한 상황에서 응용될 수 있어 널리 활용되어 왔다[2].

전통적인 확정적(deterministic) EOQ 모형에서는

논문접수일 : 2006년 09월 13일 논문게재확정일 : 2007년 04월 06일

\* 본 연구는 고려대학교 특별연구비에 의하여 수행되었음.

\*\* 고려대학교 경영학부

단위시간 당 수요량  $D$ , 단위당 구매비용(purchasing cost per unit)  $C$ , 주문당 준비 비용  $S$ , 단위시간당 재고 유지비용율(inventory carrying cost rate per unit time)  $i$  등이 확정적으로 주어졌을 때 단위시간 당 총비용을 최소화하는 주문량  $Q_d$ 을 도출한다. 이 모형에서의 단위시간 당 총비용  $TC_d$ 은

$$TC_d = S \frac{D}{Q_d} + CD + iC \frac{Q_d}{2} \quad (1)$$

이며, 이를 최소화하는 주문량  $Q_d^*$ 는

$$Q_d^* = \sqrt{\frac{2SD}{iC}} \quad (2)$$

이다. 이 때 총비용은  $\sqrt{2SDiC} + CD$ 로 계산된다.

전통적인 EOQ 모형에서는 단위당 구매비용이 상수(constant)라고 가정하고 있는데 이는 많은 현실 상황에서 적합하지 못하며, 이러한 가정을 완화한 EOQ 모형을 다룬 연구가 많이 있었다[7]. 특히, Lee[8, 9]는 단위당 구매비용이 주문량의 감소함수(decreasing function)라고 가정하였는데, 이는 주문량의 증가에 따라 규모의 경제가 실현되는 것을 반영한 것이다. 또한, Cheng[6]은 단위당 구매비용을 단위시간 당 수요량의 감소함수로 가정한 EOQ 모형을 연구하였는데, 이는 수요량의 증가가 생산주체의 생산설비 개량 노력 및 적극적인 생산자원 활용으로 이어진다는 가정에 기반한다. 본 연구에서는 이와 같은 두 가지 현실적 가정을 반영하여 변형된 EOQ 모형들을 대상으로 한다.

한편, 확정적 EOQ 모형에서는 모든 매개변수(parameter)가 확정적으로 주어졌다고 가정하지만, 일반적인 현실에서는 모형에 포함되는 매개변수들의 값이 다소 변동적이거나 일정 부분 불확실성(uncertainty)을 내포하고 있다. 이러한 변동성이나 불확실성은 경영환경의 변화에 따른 변동에 기인할 수도 있고 추정 오류에 따른 것일 수도 있다. 매개변수의 변동성 또는 불확실성을 고려하여 EOQ 모형의 최적해(경제적 주문량)를 구하는 방법 중의 하나로 본 연구에서는 robust 최적화 기법을 사용

한다.

Robust 최적화(robust optimization)는 모형을 정형화할 때 매개변수가 가지는 불확실성을 직접적으로 포함시키는데, 그 방법에 따라 확률적 robust 최적화 방법(stochastic robust optimization)과 worst-case robust 최적화 방법으로 유형을 나눌 수 있다[5]. 두 가지 방법의 차이점을 좀 더 자세히 설명하기 위해 다음과 같은 최적화 문제,

$$\begin{aligned} \min & f_0(x, u) \\ \text{s.t.} & f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3)$$

를 고려하자. 이 문제에서  $x \in R^n$ 는 결정변수(decision variable)이고  $u \in R^k$ 는 불확실성을 가지는 매개변수이다.

확률적 robust 최적화 방법에서는 불확실성을 가지는 매개변수를 확률변수로 표현하고, 모형이 가지는 제약식과 목적함수의 평균값을 이용한다. 즉, 제약식을 평균적으로 만족하는 해 중에서 목적함수의 평균값을 최적화시키는 해를 찾는다. 이를 수식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \min & \mathbf{E} f_0(x, u) \\ \text{s.t.} & \mathbf{E} f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

와 같다. 여기서  $\mathbf{E}$ 는 확률변수  $u$ 에 대한 해당 함수의 평균을 의미한다.

Worst-case robust 최적화 방법에서는 불확실성을 가지는 매개변수의 값의 범위를 표현하는 불확실성 집합(uncertainty set)을 구성하고, 최악의 경우를 최적화하는 해를 찾는다[3, 4]. 이를 수식으로 표현하면,

$$\begin{aligned} \min & \sup_{u \in U} f_0(x, u) \\ \text{s.t.} & \sup_{u \in U} f_i(x, u) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

와 같다. 여기서  $U$ 는 매개변수  $u$ 에 대한 불확실성 집합이다. 본 논문에서는 앞으로 특별한 언급이 없는 한 robust 최적화란 worst-case robust 최적화를 지칭하는 것으로 한다.

본 논문에서는 앞에서 설명한 두 가지 현실적 고려사항을 반영한 EOQ 모형을 다룬다. 즉, 주문량 또

는 수요량이 커짐에 따라 구매 비용(purchase cost)이 감소한다고 가정하고, 또한 구매 비용 함수를 표현하기 위해 포함될 매개변수에 변동성 내지는 불확실성이 존재하는 상황을 가정한다. 이러한 가정을 반영한 worst-case robust EOQ 모형을 수립하고 그 특성을 분석한다. 이 모형은 최악의 상황을 최대한 나쁘지 않게 만들어주는 해를 출력한다. 다시 말해, 제어할 수 없는 일정량의 매개변수 변동성 또는 불확실성을 감안할 때 최악의 경우로 발생할 수 있는 총비용을 최대한 낮추고자 하는 상황에서 이 모형은 활용될 수 있다.

## 2. 기본 모형

본 연구에서 다룰 EOQ 모형은 두 가지인데 공통적으로 사용될 기호를 다음과 같이 정의한다.

- $D$  : 단위 시간 당 수요량(단위/시간)
- $Q$  : 주문량 또는 생산량(단위, 결정변수)
- $C$  : 단위당 생산 또는 구매 비용(원/단위)
- $S$  : 준비 비용(원/랫취)
- $i$  : 재고 유지 비용율(%/시간)

서론에서도 밝혔듯이, 첫 번째 EOQ 모형(모형 1)에서의 단위당 구매 비용은 수요량의 크기에 따라 감소하는 함수로 가정하는데, Jung[7]의 연구에서와 같이 수요량의 거듭제곱함수로 표현한다. 즉,  $C(D) = bD^{-\beta}$ ,  $b > 0$ ,  $\beta > 0$ 이다. 모형 1은 다음과 같이 표현되는 총비용 함수  $TC_1$ 을 최소화한다.

### 모형 1

$$\min_{Q > 0} TC_1 = SDQ^{-1} + bD^{1-\beta} + 0.5i b D^{-\beta} Q$$

여기서  $b$ 는 규모화 매개변수이고  $\beta$ 는 수요량에 따른 규모의 경제 정도를 표현하는 매개변수이다.

두 번째 EOQ 모형(모형 2)에서는 단위당 구매 비용이 주문량의 크기에 따라 감소하는 함수라고 가정하는데, 모형 1과 동일하게 주문량의 거듭제곱함수로 표현한다. 즉,  $C(Q) = dQ^{-\delta}$ ,  $d > 0$ ,  $0 < \delta < 1$ 이다. 모형 2는 다음과 같이 표현되는 총비용 함수

$TC_2$ 를 최소화한다.

### 모형 2

$$\min_{Q > 0} TC_2 = SDQ^{-1} + dQ^{-\delta} D + 0.5idQ^{1-\delta}$$

여기서  $d$ 는 규모화 매개변수이고  $\delta$ 는 주문량에 따른 할인율을 표현하는 매개변수이다.

한편, 현실 상황에서는 모형 1과 모형 2에 포함된 매개변수들,  $b, \beta, d, \delta$ 의 값들을 정확히 알아내기 힘든 경우가 많다. 이러한 상황을 반영하기 위해, 본 연구에서는 이들 매개변수들에 일정 정도의 불확실성이 내재되어 있다고 가정한다. 즉, 각 매개변수들의 값이 어떤 집합에 포함된다고 가정한다. 다음 3장에서는 이러한 집합을 구성하기 위해 개발한 방법에 대해 설명하고, 4장에서는 worst-case robust 최적화 모형과 그 특성을 설명한다.

## 3. 모형 매개변수에 대한 불확실성 집합 구성

### 3.1 모형 매개변수의 추정

모형 1과 모형 2에 포함된 매개변수들은 과거의 데이터를 활용하여 선형회귀를 통해 추정할 수 있는데[1], 논의의 완결성을 위해 자세한 선형회귀 모형을 설명하도록 한다. 모형 1의 경우, 단위당 구매 비용함수는  $C(D) = bD^{-\beta}$ 인데 양변에 로그를 취하면

$$\log C(D) = \log b + \beta \log \frac{1}{D} \quad (6)$$

이 된다. 수요량에 따른 구매 비용에 대한  $n$ 쌍의 과거 데이터,  $(D_1, C_1), (D_2, C_2), \dots, (D_n, C_n)$ 가 주어졌을 때, 선형회귀모형은

$$\log C_i = \log b + \beta \log \frac{1}{D_i} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (7)$$

이 되고,  $\log b$ 와  $\beta$ 에 대한 추정치인  $\widehat{\log b}$ 와  $\widehat{\beta}$ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= \frac{S_{DC}}{S_{DD}}, \quad \widehat{\log b} = \overline{\log C} - \hat{\beta} \overline{\log \frac{1}{D}}, \\ S_{DD} &= \sum_{i=1}^n (\log \frac{1}{D_i} - \overline{\log \frac{1}{D}})^2, \\ S_{DC} &= \sum_{i=1}^n (\log \frac{1}{D_i} - \overline{\log \frac{1}{D}})(\log C_i - \overline{\log C}).\end{aligned}\quad (8)$$

여기서  $\overline{\log C}$ 는  $\log C_1, \log C_2, \dots, \log C_n$ 의 평균이고,  $\overline{\log \frac{1}{D}}$ 는  $\log \frac{1}{D_1}, \log \frac{1}{D_2}, \dots, \log \frac{1}{D_n}$ 의 평균이다.

$\log b$ 에 대한 불편추정치인  $\widehat{\log b}$ 는 확률변수이며  $n$ 이 충분히 클 때 다음과 같이 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\widehat{\log b} \sim N(\log b, [\frac{1}{n} + \frac{(\log \frac{1}{D})^2}{S_{DD}}]MSE). \quad (9)$$

여기서  $MSE$ 는  $\sigma^2$ 에 대한 불편추정치로서

$$\begin{aligned}MSE &= \frac{SSE}{n-2}, \\ SSE &= \sum_{i=1}^n (\log C_i - \widehat{\log C}_i)^2 = S_{CC} - (S_{DC})^2/S_{DD}, \\ S_{CC} &= \sum_{i=1}^n (\log C_i - \overline{\log C})^2,\end{aligned}\quad (10)$$

와 같이 계산된다. 단,  $\widehat{\log C}_i = \widehat{\log b} + \hat{\beta} \log \frac{1}{D_i}$ 이다.

한편,  $\log b$ 에 대한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은

$$\widehat{\log b} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{[\frac{1}{n} + \frac{(\log \frac{1}{D})^2}{S_{DD}}]MSE} \quad (11)$$

이다.  $z_{\alpha}$ 는 표준정규분포의  $100(1-\alpha)\%$  백분위수이다.

$\beta$ 에 대한 불편추정치인  $\hat{\beta}$ 는 확률변수이며  $n$ 이 충분히 클 때 다음과 같이 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{MSE}{S_{DD}}) \quad (12)$$

또한,  $\beta$ 에 대한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은

$$\hat{\beta} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{MSE}{S_{DD}}} \quad (13)$$

이다.

한편, 두 확률변수  $\widehat{\log b}$ 와  $\hat{\beta}$ 의 공분산에 대한 불편추정량은

$$Cov(\widehat{\log b}, \hat{\beta}) = -\frac{(\log \frac{1}{D})^2}{S_{DD}}MSE \quad (14)$$

와 같다.

모형 2의 매개변수  $\log d$ 와  $\delta$ 에 대한 선형회귀 분석도 모형 1과 동일하게 할 수 있으며, 그 결과는 다음과 같다. 단위당 구매 비용함수는  $C(Q) = dQ^{-\delta}$ 이며, 이에 대한 과거의 데이터  $(Q_1, C_1), (Q_2, C_2), \dots, (Q_n, C_n)$ 가 주어졌을 때, 선형회귀 모형은

$$\log C_i = \log d + \delta \log \frac{1}{Q_i} + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (15)$$

와 같이 구성할 수 있다.  $\log d$ 와  $\delta$ 에 대한 추정치  $\widehat{\log d}$ 와  $\hat{\delta}$ 는

$$\begin{aligned}\hat{\delta} &= \frac{S_{QC}}{S_{QQ}}, \quad \widehat{\log d} = \overline{\log C} - \hat{\delta} \overline{\log \frac{1}{Q}}, \\ S_{QQ} &= \sum_{i=1}^n (\log \frac{1}{Q_i} - \overline{\log \frac{1}{Q}})^2, \\ S_{QC} &= \sum_{i=1}^n (\log \frac{1}{Q_i} - \overline{\log \frac{1}{Q}})(\log C_i - \overline{\log C}),\end{aligned}\quad (16)$$

와 같이 계산되며,  $\widehat{\log d}$ 의 분포는  $n$ 이 충분히 클 때 정규분포를 따른다.

$$\widehat{\log d} \sim N(\log d, [\frac{1}{n} + \frac{(\log \frac{1}{Q})^2}{S_{QQ}}]MSE), \quad (17)$$

$$MSE = \frac{SSE}{n-2},$$

$$SSE = \sum_{i=1}^n (\log C_i - \widehat{\log C}_i)^2 = S_{CC} - (S_{QC})^2/S_{QQ},$$

$$S_{CC} = \sum_{i=1}^n (\log C_i - \overline{\log C})^2.$$

한편,  $\log d$ 에 대한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은

$$\widehat{\log d} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{[\frac{1}{n} + \frac{(\log \frac{1}{Q})^2}{S_{QQ}}]MSE} \quad (18)$$

이다.

$\delta$ 에 대한 불편추정치인  $\hat{\delta}$ 는 확률변수이며  $n$ 이 충분히 클 때 다음과 같이 근사적으로 정규분포를 따른다.

$$\hat{\delta} \sim N\left(\delta, \frac{MSE}{S_{QQ}}\right). \quad (19)$$

또한,  $\delta$ 에 대한  $100(1-\alpha)\%$  신뢰구간은

$$\hat{\delta} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{MSE}{S_{QQ}}} \quad (20)$$

이고, 두 확률변수  $\widehat{\log d}$ 와  $\hat{\delta}$ 의 공분산에 대한 불편 추정량은

$$Cov(\widehat{\log d}, \hat{\delta}) = -\frac{\overline{(\log \frac{1}{Q})^2}}{S_{QQ}} MSE \quad (21)$$

이다.

### 3.2 모형 상수에 대한 타원체 불확실성 집합 (ellipsoidal uncertainty set) 구성

모형 1과 모형 2는 불확실성 집합 구성 방법에서 동일하므로, 모형 1을 기준으로 설명한다. 앞 절에서 설명했듯이 모형 1의 매개변수  $\log b$ 와  $\beta$ 는 선형 회귀를 통해 추정할 수 있을 뿐 그 정확한 값을 알지 못한다. 즉, 매개변수들에 불확실성이 존재한다고 할 수 있다.

본 연구에서는 매개변수의 불확실성 집합을 타원체로 표현하는데, 타원체를 이용한 불확실성 집합의 표현은 분석의 용이성 등을 이유로 일반적이기 때문이다. 불확실성을 가지는 매개변수 벡터  $u \in R^k$ 가 있을 때  $u$ 가 가질 수 있는 값들의 집합을 상수  $\bar{u} \in R^k$ 를 중심으로 하는 타원체  $F$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$F = \{ \bar{u} + Pw \mid \|w\|_2 \leq 1 \}. \quad (22)$$

단,  $P \in R^{k \times k}$ 는 대칭 양정치(symmetric positive definite) 행렬이다. 그러나 불확실한 매개변수가 가질 수 값들이 모두 포함되는 타원체  $F$ 를 구성하는 것이 불가능하거나 큰 의미를 가지지 못하는 경우

가 많이 있다. 따라서 본 연구에서는 Lim[10]이 제안한 “ $p$ -확실성 타원체 표현법”을 사용한다.

**정의 1.** 불확실성을 가진 매개변수 벡터  $u$ 에 대한 불확실성 집합으로 타원체  $F$ 가 주어졌을 때,  $F$ 의 확실성 수준(certainty level)  $p_F$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$p_F = Prob(u \in F)$$

**정의 2.** 불확실성을 가진 매개변수 벡터  $u$ 에 대한 불확실성 집합이 타원체  $F$ 로 주어졌을 때, 다음 두 가지 조건을 만족할 때  $F$ 를 매개변수 벡터  $u$ 에 대한  $p$ -확실성 타원체 표현( $p$ -certainty ellipsoidal representation)이라고 한다.

- (a)  $F$ 의 확실성 수준이  $p$  이상이다.
- (b) 조건 (a)를 만족하는 타원체 중에서  $F$ 의 부피가 가장 작다.

한편, 3.1절에서 보았듯이  $\log b$ 와  $\beta$ 는 선형회귀에 의해  $\widehat{\log b}$ 와  $\hat{\beta}$ 로 추정되는데,  $\widehat{\log b}$ 와  $\hat{\beta}$ 는 통계량(statistics)으로서 확률변수이며 정규분포를 따른다. 따라서  $\log b$ 와  $\beta$ 의 불확실성을 다음과 같이 표현하는 것은 타당하다.

$$\begin{aligned} \log b &\sim N\left(\widehat{\log b}, \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{(\log \frac{1}{D})^2}}{S_{DD}}\right]MSE\right), \\ \beta &\sim N\left(\hat{\beta}, \frac{MSE}{S_{DD}}\right), \\ Cov(\log b, \beta) &= -\frac{\overline{(\log \frac{1}{D})^2}}{S_{DD}}MSE. \end{aligned} \quad (23)$$

단, 위의 표현에서  $\widehat{\log b}$ 와  $\hat{\beta}$ 는 하나의 특정 표본으로부터 식 (8)에 의해 구해진 특정 추정치이다. 그리고 모형 상수  $(\log b, \beta)^T$ 의 불확실성 집합을 타원체  $F$ 로 표현하면

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \log b \\ \beta \end{pmatrix} \in F &= \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{\log b} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mid \|w\|_2 \leq 1 \right\}, \\ \text{where } P \in R^{2 \times 2} &\text{는 대칭 양정치 행렬} \end{aligned} \quad (24)$$

와 같다.

$p$ -확실성 타원체 표현인 타원체  $F$ 를 구하는 것 (즉, 행렬  $P$ 를 구하는 것)은 Lim[10]에서 제안된 몬테카를로 시뮬레이션과 유전자 알고리즘 기반의 방법을 사용할 수 있다. 논의의 완결성을 위해 간략히 그 방법을 설명하면 다음과 같다. 우선, 임의의 타원체  $F$ 의 확실성 수준을 계산하기 위해 몬테카를로 시뮬레이션을 이용한다. 즉, 다변수 정규분포 (multivariate normal distribution)를 따르는 점  $(\log b, \beta)$ 을 다수 개 생성하고 주어진 타원체  $F$ 에 포함되는 점의 비율을 계산하여, 그 값을  $F$ 의 확실성 수준으로 추정한다.  $p$ -확실성 타원체 표현을 찾기 위해서는 확실성 수준이  $p$ 이상인 타원체 중에서 최소의 부피를 가지는 타원체를 찾아야 하는데, 이를 위해 유전자 알고리즘을 적용한다. 타원체  $F$ 의 부피는  $\det(P)$ 에 비례하므로, 유전자 알고리즘에서 적합도 함수는  $\det(P)$ 를 최소화하는 것으로 구성된다.

## 4. Robust 최적화 모형

### 4.1 모형 1

모형 1에 대해 robust 최적화 모형을 수립해 보자. 매개변수  $\log b$ 와  $\beta$ 에 대한 불확실성 집합은

$$\left\{ \begin{pmatrix} \log b \\ \beta \end{pmatrix} \in F = \left\{ \begin{pmatrix} \widehat{\log b} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mid \|w\|_2 \leq 1 \right\}, \right.$$

where  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 대칭 양정치 행렬 (25)

와 같이 주어졌고, 이에 따른 robust 최적화 모형은

$$\min_{Q>0} \sup_{(\log b, \beta) \in F} \{SDQ^{-1} + bD^{1-\beta} + 0.5ibD^{-\beta}Q\} \quad (26)$$

와 같다. 이를 다시 쓰면,

$$\min_{Q>0} \{SDQ^{-1} + (D+0.5iQ) \sup_{(\log b, \beta) \in F} \frac{b}{D^\beta}\} \quad (27)$$

이다.

**보조정리 1.**  $\sup_{(\log b, \beta) \in F} \frac{b}{D^\beta}$ 의 값은

$$e^{(1-\log D)\left(\frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}}\right) + \|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2}$$

(증명) 주어진 함수에 로그를 취하여 동치 문제인 문제를 구성하면

$$\sup_{(\log b, \beta) \in F} (\log b - \beta \log D) \quad (28)$$

이 얻어지는데,  $x := \log b, y := \beta$ 로 변수치환을 하면

$$\begin{aligned} & \max_w x - y \log D \\ & \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\log b} \\ \widehat{\beta} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ & \quad \|w\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

와 같은 문제로 변환된다. 이를 다시 쓰면,

$$\begin{aligned} & \max_w (1 - \log D) \left( \frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}} \right) + (1 - \log D) P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ & \text{s.t.} \quad \|w\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

이다. 따라서 식 (28)의 값은

$$(1 - \log D) \left( \frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}} \right) + \|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2$$

이고,  $\sup_{(\log b, \beta) \in F} \frac{b}{D^\beta}$ 의 값은

$$e^{(1-\log D)\left(\frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}}\right) + \|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2}$$

이다. ■

위 보조정리를 활용하여 식 (27)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \min_{Q>0} SDQ^{-1} + (D+0.5iQ) e^{(1-\log D)\left(\frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}}\right) + \|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2} \\ & \Leftrightarrow \min_{Q>0} SDQ^{-1} + (D+0.5iQ) e^{(1-\log D)\left(\frac{\widehat{\log b}}{\widehat{\beta}}\right) + \|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2} \\ & \Leftrightarrow \min_{Q>0} SDQ^{-1} + \widehat{b}(D+0.5iQ) D^{-\beta} e^{\|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2}, \\ & \quad \text{where } \widehat{b} = e^{\widehat{\log b}}, \end{aligned} \quad (29)$$

이다. 여기서,  $C = \widehat{b} D^{-\beta} e^{\|P^T \begin{pmatrix} 1 \\ -\log D \end{pmatrix}\|_2}$ 라고 두면, 식

(29)는

$$\min_{Q>0} SDQ^{-1} + 0.5i\bar{C}Q + \bar{C}D \quad (30)$$

이므로, 모형 1에 대한 최적해는  $Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{i\bar{C}}}$  이고  
 최적 총비용은  $\sqrt{2SDi\bar{C}} + \bar{C}D$ 이다.

### 4.2 모형 2

본 절에서는 모형 2에 대해 robust 최적화 모형을 수립한다. 매개변수  $\log d$ 와  $\delta$ 에 대한 불확실성 집합은

$$\left(\frac{\log d}{\delta}\right) \in F = \left\{ \left( \frac{\widehat{\log d}}{\hat{\delta}} \right) + P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mid \|w\|_2 \leq 1 \right\},$$

where  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 는 대칭 양정치 행렬 (31)

와 같이 타원체로 주어진다고 가정 하면, 이에 따른 robust 최적화 모형은

$$\min_{Q>0} \sup_{(\log d, \delta) \in F} SDQ^{-1} + dQ^{-\delta}D + 0.5iQ^{1-\delta} \quad (32)$$

와 같다. 이를 다시 쓰면,

$$\min_{Q>0} \left\{ SDQ^{-1} + (D + 0.5iQ) \sup_{(\log d, \delta) \in F} \frac{d}{Q^\delta} \right\} \quad (33)$$

인데, 보조정리 1에 의해 이 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \min_{Q>0} SDQ^{-1} + (D + 0.5iQ) e^{(1-\log Q)\left(\frac{\widehat{\log d}}{\hat{\delta}}\right) + \|P^T \begin{pmatrix} -1 \\ -\log Q \end{pmatrix}\|_2} \\ \Leftrightarrow \min_{Q>0} SDQ^{-1} + (D + 0.5iQ) e^{(\log d - \delta \log Q)} e^{\|P^T \begin{pmatrix} -1 \\ -\log Q \end{pmatrix}\|_2} \\ \Leftrightarrow \min_{Q>0} SDQ^{-1} + \hat{d}(D + 0.5iQ) Q^{-\delta} e^{\|P^T \begin{pmatrix} -1 \\ -\log Q \end{pmatrix}\|_2}, \end{aligned}$$

where  $\hat{d} = e^{\widehat{\log d}}$ . (34)

여기서, 대칭 양정치(symmetric positive definite) 행렬  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 를

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix}, p_1 > 0, p_3 > 0, p_1 p_3 - p_2^2 > 0 \quad (35)$$

와 같이 정의하면, 식 (34)는

$$\begin{aligned} \min_{Q>0} SDQ^{-1} + \hat{d}(D + 0.5iQ) \\ Q^{-\delta} e^{\sqrt{(p_2^2 + p_3^2)t^2 - 2(p_1 p_2 + p_2 p_3)t + (p_1^2 + p_2^2)}} \end{aligned} \quad (36)$$

가 되며,  $t := \log Q$ 로 변수 치환하면 위 식은

$$\begin{aligned} \min_t SDe^{-t} + \hat{d}(D + 0.5ie^t) \\ e^{-\delta t} e^{\sqrt{(p_2^2 + p_3^2)t^2 - 2(p_1 p_2 + p_2 p_3)t + (p_1^2 + p_2^2)}} \\ \Leftrightarrow \min_t SDe^{-t} + \hat{d}(D + 0.5ie^t) e^{-\delta t} e^{\sqrt{ft^2 + gt + h}}, \end{aligned}$$

where  $f = p_2^2 + p_3^2$ ,  $g = -2(p_1 p_2 + p_2 p_3)$ ,  $h = p_1^2 + p_2^2$ , (37)

으로 변환된다. 여기서, 식 (35)의 부등식  $p_1 p_3 - p_2^2 > 0$ 에 의해

$$\begin{aligned} f > 0, \quad g^2 - 4fh = 8p_1 p_2^2 p_3 - 4p_2^4 - 4p_3^2 p_1^2 \\ = -4(p_2^2 - p_1 p_3)^2 < 0, \end{aligned} \quad (38)$$

이 성립하므로,  $ft^2 + gt + h > 0, \forall t$ 이다.

한편,  $f(t) = \sqrt{ft^2 + gt + h}$ 는 다음의 보조정리에 의해 순볼록(strictly convex)함수이다.

**보조정리 2.**  $f(t) = \sqrt{ft^2 + gt + h}$ 는  $t$ 에 대해 순볼록이다.

(증명) 이차 도함수를 아래와 같이 구해보면,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2ft + g}{2\sqrt{ft^2 + gt + h}}, \\ f''(t) &= \frac{4f\sqrt{ft^2 + gt + h} - (2ft + g)\frac{2ft + g}{\sqrt{ft^2 + gt + h}}}{4(ft^2 + gt + h)} \\ &= \frac{4f(ft^2 + gt + h) - (2ft + g)^2}{4(ft^2 + gt + h)^{3/2}} = \frac{4fh - g^2}{4(ft^2 + gt + h)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (39)$$

와 같다. 식 (38)과  $ft^2 + gt + h > 0, \forall t$ 에 의해  $f''(t) > 0, \forall t$ 이므로  $f(t)$ 는  $t$ 에 대해 순볼록이다. ■

**중정리 3.**  $e^{\sqrt{ft^2 + gt + h}}$ 는  $t$ 에 대해 로그볼록(log-convex)이다.

(증명) 참고문헌 [5] 참조. ■

정리 4. 식 (37)은  $t$ 에 대한 볼록 최적화 문제(convex optimization problem)이다.

(증명)  $SDe^{-t}$ 는  $t$ 에 대해 로그볼록,  $\hat{d}(D+0.5ie^t)$ 도  $t$ 에 대해 로그볼록,  $e^{-\delta t}$ 도  $t$ 에 대해 로그볼록이며, 종정리 3에 의해  $e^{\sqrt{t^2+gt+\pi}}$ 도  $t$ 에 대해 로그볼록이다. 로그볼록성(log-convexity)는 곱셈, 덧셈에 대해 닫혀있으므로[5], 식 (37)의 목적함수는 로그볼록이다. 한편, 로그볼록함수는 볼록함수이므로 결국 식 (37)은 볼록 최적화 문제이다. ■

4.3 수치 예제

본 절에서는 4.1절에서 개발한 모형 1의 worst-case robust 최적화 모형에 대한 구체적인 수치 예제를 통해, worst-case robust 최적화 모형이 가지는 의미를 살펴보고자 한다. 모형 2에 대한 수치 예제는 그 의미가 중복적이므로 생략한다.

우선 이 예제에서 모형에 포함되는 상수들의 값은 다음과 같다고 가정한다.

$$D = 5,000\text{단위/년}, S = 10\text{원/벡취}, i = 20\%/\text{년}.$$

그리고 회귀 분석을 통해 얻어진  $\widehat{\log b}$ 와  $\widehat{\beta}$ 의 값이 각각 0과 1이라고 하고, 식 (25)와 같이 주어지는  $\log b$ 와  $\beta$ 의 불확실성 집합에서 행렬  $P$ 는 3.2절에서 소개한 방법을 이용해 다음과 같이 구해졌다고 하자.

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

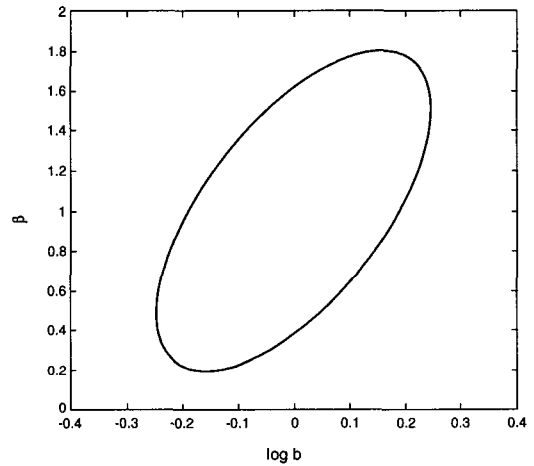
그러면 타원으로 표현되는  $\log b$ 와  $\beta$ 의 불확실성 집합은 다음 그림과 같다.

그리고  $\bar{C} = \hat{b}D^{-\beta} e^{\|P^{-1}(-\log D)\|_2} = 0.17$ 이고, 식 (30)에 의해 최적화 모형은 다음과 같다.

$$\min_{Q > 0} 50000Q^{-1} + 0.017Q + 850.1 \quad (40)$$

이 모형의 최적해는  $Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{iC}} = 1714.9$ 이고, 최

적 총비용은  $\sqrt{2SDiC} + \bar{C}D = 908.4$ 이다. 이것이 의미하는 바는 주문량을  $Q^* = 1714.9$ 로 하면  $b$ 와  $\beta$ 의 변동성 또는 불확실성을 최대한 감안하더라도 총비용이 908.4 이하가 된다는 것이다. 즉, 최악의 경우 에라도 총비용은 908.4 보다 커지지 않는다는 것이다. 한편, 최악의 경우는 매개변수  $b, \beta$ 의 값이 각각 0.8869, 0.1940의 값을 가질 때 발생하는데, 이 값들은  $\log b$ 와  $\beta$ 의 불확실성 집합 경계선과  $bD^{-\beta} = 0.17$ 의 교점을 구한 것이다.



[그림 1]  $\log b$ 와  $\beta$ 의 불확실성 집합

한편,  $b$ 와  $\beta$ 의 변동성 또는 불확실성을 감안하지 않고 회귀 분석을 통해 얻어진 추정치를 확정적인 값으로 사용하는 경우에 대해 살펴보자. 그 경우 단위당 생산 또는 구매 비용은  $C = \hat{b}D^{-\beta} = 0.0002$ 이고 최적 주문량은 모형 1을 그대로 적용하여  $Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{iC}} = 50000$ 이 된다. 그러나 이 주문량을 식 (40)에 대입해 보면 총비용이 1701.1이 된다. 이것은 주문량을  $Q^* = 50000$ 으로 하면  $b$ 와  $\beta$ 의 변동성 또는 불확실성을 감안할 때 최악의 경우( $b = 0.8869, \beta = 0.1940$ 일 때 발생)에 총비용이 1701.1이 된다는 것을 의미한다. 이 값은 worst-case robust 최적화 모형을 적용했을 때의 총비용인 908.4 보다 87% 정도 크다.



## 5. 결 론

본 연구에서는 전통적인 EOQ 모형에서 단위당 구매비용이 주문량의 감소함수로 표현되는 경우와 단위시간 당 수요량의 감소함수로 표현되는 경우에 있어서, 구매비용 함수에 포함된 매개변수에 대한 불확실성 집합이 타원체로 주어진 상황을 worst-case robust 최적화 모형으로 모형화하고 그 특징을 살펴보았다.

모형 1에 대한 robust 최적화 모형의 경우에는 별도의 최적화 알고리즘을 적용한 풀이 없이 해석적인 해(analytical solution)가 구해질 수 있는데, 전통적인 모형의 최적해인 식 (2)에서 단위당 구매비용  $C$ 의 값을

$$\bar{C} = \hat{b}D^{-\beta} e^{\|\rho^r(\frac{1}{\log D})\|_2}$$

로 바꾼 것이 최적 주문량이 되었다.

모형 2에 대한 robust 최적화 모형의 경우는 식 (37)과 같은 문제로 동치 변환되고, 이는 정리 4에서 블록 최적화 문제임이 증명되었다. 블록 최적화 문제는 내부점 방법(interior-point method)과 같은 아주 효율적인 해법이 존재하며, 식 (37)과 같이 제약식이 없고 단일 변수의 비교적 단순한 경우에는 뉴턴법(Newton's method)과 같은 해법도 충분하다[5].

한편, 단위당 구매비용이 수요 및 주문량의 크기에 따라 감소하는 함수  $C(D) = fD^{-\gamma}Q^{-\mu}$ 로 표현되는 모형을 아래와 같이 고려할 수 있다 [7].

### 모형 3

$$\min_{Q > 0} TC = SDQ^{-1} + fD^{1-\gamma}Q^{-\mu} + 0.5ifD^{-\gamma}Q^{1-\mu}$$

여기서  $f$ 는 규모화 상수이고  $\gamma$ 와  $\mu$ 는 각각 수요량에 따른 규모의 경제 정도, 주문량에 따른 할인율을 표현하는 상수이며,  $f > 0, \gamma > 0, 0 < \mu < 1$ 이다. 이 모형에 대한 robust 최적화 모형과 불록성 분석은 추후 연구과제로 고려할 수 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] 김우철 외, 「현대통계학」, 영지문화사, 1991.
- [2] 김태웅, 「생산·운영관리의 이해」, 신영사.
- [3] Ben-Tal, A. and A. Nemirovski, "Robust Solutions of Uncertain Linear Programs," *Oper. Res. Lett.*, Vol.25(1999), pp.1-15.
- [4] Ben-Tal, A. and A. Nemirovski, "Robust Convex Optimization," *Mathematics of Operations Research*, Vol.23, No.4(1998), pp. 769-805.
- [5] Boyd, S. and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [6] Cheng, T.C.E., "An economic order quantity model with demand-dependent unit cost," *European Journal of Operations Research*, Vol.40(1989), pp.252-256.
- [7] Jung, H. and C.M. Klein, "Optimal inventory policies for an economic order quantity model with decreasing cost functions," *European Journal of Operational Research*, Vol. 165(2005), pp.108-126.
- [8] Lee, W.J., "Optimal order quantities and prices with storage space and inventory investment limitations," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.26(1994), pp.481-488.
- [9] Lee, W.J., "Determining order quantity and selling price by geometric programming : Optimal solution, bounds, and sensitivity," *Decision Sciences*, Vol.24(1993), pp.76-87.
- [10] Lim, S., "Solving robust EOQ model using genetic algorithm," submitted to *International Journal of Management Science*, 2006.