韓國經營科學會誌
第32권 第2號
2007年 6月

링 네트워크에서의 최대 다품종정수흐름문제와 최소 다중절단면문제에 대한 해법*

명 영 수**

Algorithms for Maximum Integer Multiflow and Multicut in a Ring Network*

Young-Soo Myung**

■ Abstract ■

We study the maximum integer multiflow problem and the minimum multicut problem in a ring network. Both problems in a general network are known to be NP-hard. In this paper, we develop polynomial time algorithms to solve the problems. We also prove that even in a ring network, maximum multiflow is not always integral, which implies that the amount of maximum integer flow does not always reach the minimum capacity of multicut.

Keyword : maximum integer multiflow, minimum multicut, ring network

1. 서 론

최대흐름문제(maximum flow problem)와 최소절단면문제(minimum cut problem)는 네트워크 최적화 분야의 핵심적인 문제이다. 마디(node)와 무방향호(undirected arc 또는 edge)로 이루어진 그래프에서 각 무방향호에 용량(capacity)이 주어져 있을 때, 최대흐름문제는 하나의 공급원마디(source node)에서 하나의 수요지마디(sink node)로 보낼 수 있는 최대흐름의 양과 보내는 경로를 결정하는 문제이다. 그래프에서 일부의 무방향호들이 제거되었을 때 적어도 한 쌍의 마디사이에는 두 마디를 연결하

논문접수일 : 2006년 09월 12일 논문게재확정일 : 2007년 04월 06일
* 이 논문은 2005년도 단국대학교 대학연구비에 의하여 연구되었음.
** 단국대학교 경상학부

는 경로가 존재하지 않게 되는 경우에, 그러한 무방향호들의 집합을 절단면(cut)이라고 부르고, 절단면에 포함된 무방향호들의 용량의 합을 절단면의 용량으로 정의한다. 최소절단면문제는 공급원과 수요지를 분리할 수 있는 최소용량의 절단면을 구하는 문제이다. 최대흐름문제와 최소절단면문제는 네트워크 최적화 분야의 중요한 연구과제가 되어 왔다. 이는 각각의 문제가 많은 응용 예를 갖고 있고, 또한 최대흐름과 최소절단면의 관계가 여러 종류의 네트워크 최적화문제를 분석하는 이론적 도구로 사용되었기 때문이다. 두 문제에 대한 자세한 내용은 Ahuja et al.[3]의 책에 잘 정리되어 있다.

전통적인 최대흐름, 최소절단면문제는 하나의 공급원과 수요지를 가정하고 있으나 현실문제를 모형화한 네트워크에서는 공급원-수요지의 쌍이 둘 이상 복수로 존재하고, 복수의 공급원-수요지 쌍에서 동시에 흐름이 보내져야 하는 경우가 있다. 이러한 문제를 다루기 위하여 공급원-수요지의 쌍이 둘 이상 복수로 존재하는 확장된 형태의 최대흐름, 최소절단면문제가 정의되었다. 확장된 문제는 통신망이나 교통망의 운용과 설계, VLSI(very large scale integrated)회로의 설계 등에서 응용 예를 발견할 수 있다[3, 5, 18, 19, 23]. 확장된 문제에서는 서로 다른 쌍의 공급원과 수요지 사이에 흐르는 흐름을 구별하기 위하여, 각 쌍의 공급원과 수요지의 흐름에 상품(commodity)을 대응시킨다. 이렇게 확장된 문제가 다품종흐름문제(multicommodity flow problem)와 다중절단면문제(multicut problem)이다. 다중절단면은 절단면의 확장된 개념으로 다중절단면에 포함된 무방향호를 제거하는 경우에 모든 공급원-수요지 쌍에서 공급원과 수요지가 분리되는 무방향호들의 집합이다.

다품종흐름문제에서는 하나의 공급원-수요지 쌍을 갖는 전통적인 흐름문제, 즉 단일품종흐름문제에서 성립되던 특성 중 일부는 유효하지 않게 된다. 우선 단일품종흐름문제에서는 공급원-수요지 쌍에 요구되는 흐름수요를 만족시킬 수 있는지 여부는 최대흐름을 구해서 최대흐름이 수요를 초과하는지 점검하면 된다. 그러나 공급원-수요지 쌍이 다수인 다품종흐름문제에서는 각각의 수요를 만족하는 것과 총 흐름을 최대화하는 것과는 연관 관계가 없게 된다. 그래서 다품종흐름문제에서는 각 공급원-수요지 쌍의 수요를 만족시킬 수 있는 흐름이 가능한지를 판정하는 문제와 총 흐름의 양을 최대화하는 문제를 별도로 정의한다. 전자를 실행가능문제 후자를 최대화문제라고 부른다. 실행가능 다품종흐름문제는 최대화문제로 변형시킬 수 있다. 즉 각 공급원 마디별로 대응하는 마디를 하나씩 추가하고, 추가된 마디와 대응되는 공급원마디를 무방향호로 연결한 다음, 추가된 무방향호의 용량을 해당 공급원마디에서 공급해야 할 양으로 정한다. 그러면, 최대화문제의 최대흐름이 총 수요의 합이 되는 경우에는 원래의 다품종흐름문제의 실행가능해가 존재하게 된다. 그러나 유의할 점은 다품종흐름문제의 실행가능문제와 최대화문제는 문제의 복잡성(problem complexity)의 관점에서 동등한(equivalent) 문제는 아니라는 점이다. 최대화문제에 대해서 다항시간(polynomial time) 안에 풀 수 있는 해법이 있다면 실행가능문제도 다항시간 안에 해결 가능하지만, 역은 항상 성립하지 않게 된다.

단일품종문제와 다품종흐름문제의 또 다른 큰 차이점은 정수흐름과 관련된 내용이다. 다품종흐름문제는 무방향호의 용량이 정수로 주어져도, 단일품종흐름문제와는 달리 경로별 흐름의 양이 정수조건을 갖지 않을 수 있다. 세분해서 이야기하면 정수흐름으로 보낼 수 있는 최대흐름의 양이 실수흐름으로 보낼 수 있는 최대흐름의 양보다 적을 수 있고, 실수흐름으로는 수요를 만족시킬 수 있는 무방향호의 용량이 정수흐름으로는 부족한 경우가 발생하게 된다. 이러한 차이 때문에 다품종흐름문제에서는 경로별 흐름에 대해서 정수조건을 요구하는 경우에 다품종정수흐름문제(multicommodity integral flow problem)라고 별도로 부른다. 정수조건이 없는 다품종흐름문제는 선형계획모형(linear programmimg model)으로 표현할 수 있어서 선형계획문제의 해법을 이용하여 다항시간 안에 풀 수 있다. 그러나 일

반적인 그래프에서의 다품종정수흐름문제의 실행가능문제는 NP-complete에 속하는 문제이다[9]. 특별히 무방향호의 용량과 공급원-수요지 쌍의 수요가 모두 1로 주어지는 경우에 다품종정수흐름문제의 실행가능문제는 무방향호가 중복되지 않는 경로(edge disjoint path)를 찾는 문제가 된다. 이 문제도 공급원-수요지 쌍의 중복이 허용되어서 총 수요량의 합이 고정되지 않는 경우에는 NP-complete에 속하는 문제이다[9]. 또한 앞에서 언급한대로 다품종흐름문제의 최대화문제의 해법을 이용하면 실행가능문제도 다항시간 안에 풀 수 있으므로, 다품종정수흐름문제의 최대화문제는 NP-hard에 속하는 문제가 된다.

절단면과 관련해서도 단일품종문제와 다품종흐름문제는 큰 차이가 있다. 단일품종의 경우에는 최대흐름문제의 해법을 이용하여 최소절단면을 구할 수 있고, 최대흐름의 양과 최소절단면의 용량은 동일하게 된다. 그러나 다품종의 경우에는 상황이 달라진다. 설명을 위해서 다중절단면의 정의를 좀 더 명확하게 기술하면 다음과 같다. 마디의 집합 V의 부분집합들로 구성된 $(V_1, \cdots, V_p)$에 대해서, $V = V_1 \cup \cdots \cup V_p$, 이고 $V_i \cap V_j = \varnothing, \forall i,j$이며, 공급원-수요지를 이루는 두 마디가 동시에 어느 V_i에 속하지 않는다고 가정하자. 이러한 $(V_1, \cdots, V_p)$에 대해서 서로 다른 부분집합에 속하는 마디를 연결하는 무방향호들의 집합이 다중절단면이 된다. 다품종정수흐름의 최대값은 다중절단면의 최소값보다 같거나 작게 되는데, 이는 두 문제의 선형계획완화모형이 원-쌍대(primal-dual) 관계임을 통하여 쉽게 보일 수 있다. 그러나 각각의 문제에서 단일품종 때와는 달리 선형계획완화문제와 정수조건이 있는 문제는 동일한 해를 갖지 않는다. 결과적으로 최대흐름문제의 해법을 이용하여 최소절단면을 구할 수도 없고, 최대흐름의 양과 최소절단면의 용량도 일반적으로는 같지 않게 된다. 최소 다중절단면문제도 NP-hard 문제이다[9].

그 동안 다품종흐름문제와 다중절단면문제에 대해서는 많은 연구가 이루어져 왔다. 주로 다루어진 주제를 열거하면, 네트워크 구조별로 실행가능문제의 해가 존재하기 위한 필요충분조건, 다품종정수흐름의 최대값과 다중절단면의 최소값과의 관계 및 이들 관계에 네트워크 구조가 미치는 영향, 다품종흐름문제와 다중절단면문제의 해법개발 등이다. 이러한 주제에 대한 자세한 내용은 Schrijver[16]의 책에 잘 기술되어 있다.

본 논문의 목적은 네트워크가 링(ring) (그래프의 용어로는 사이클(cycle)) 구조를 갖는 경우에 최대 다품종정수흐름문제와 최소 다중절단면문제에 대한 해법을 개발하는 것이다. 앞서 언급한대로 다품종정수흐름문제는 통신망에서 루팅 방법을 찾는 경우, VLSI회로의 설계에서 와이어를 연결하는 방법 등에 응용된다. 이 경우에 대상 네트워크가 링의 구조를 갖는 경우가 많다. 통신망에서 광범위하게 활용되고 있는 동기식 광전송망(SONET, Synchronous Optical Network)은 동기식 광전송 장비인 ADM (Add-Drop Multiplexer)을 이용하여 링 구조의 네트워크를 구성한다[5, 18, 23]. 또한 VLSI회로의 설계문제도 링 네트워크 그래프에서의 다품종정수흐름문제로 모형화 할 수 있다[19]. 그리고 이러한 응용 가능성을 떠나서도 네트워크 구조에 따라서 문제의 특성이 어떻게 달라지는지에 대한 분석은 네트워크 이론분야의 중요한 연구주제이다. 따라서 그래프의 전형적인 구조인 링 구조에 대한 다품종정수흐름문제와 최소 다중절단면문제에 대한 연구는 이미 잘 알려진 연구과제이다.

다품종정수흐름의 실행가능문제는 일반적인 그래프에 대해서는 NP-complete에 속하는 문제인데 반해서 링 네트워크에서는 다항시간 안에 풀 수 있다. Suzuki et al.[19]은 Okamura and Seymour[14]의 결과와 자신들이 고안한 데이터구조를 이용하여 사이클 그래프에서 정수조건이 없는 다품종흐름문제를 선형시간 안에 풀 수 있는 해법을 제시하였다. Myung[11]은 좀 더 실용적인 방법으로 다품종흐름문제와 다품종정수흐름문제를 동시에 선형시간에 풀 수 있는 해법을 개발하였다. 링 네트워크에서의 다품종흐름문제와 유사한 문제로 링의 용량결정문제가 있다. 용량결정문제는 각 무방향호에 동일한

용량을 설치한다는 전제하에, 각 쌍의 공급원-수요지의 수요를 만족시킬 수 있는 무방향호의 용량과 흐름의 경로를 결정하는 문제이다. 링의 용량결정문제에 대한 연구로는 명영수 [1], 명영수와 김후곤 [2], Cosares and Saniee[6], Dell'Amico et al.[7], Myung[10, 11], Myung et al.[12, 13], Schrijver et al. [17], Vachani et al.[20], Wan and Yang[21], Wang [22]의 연구가 있다.

링 네트워크에서의 다품종정수흐름의 최대화문제와 최소 다중절단면문제에 대해서는 별로 진전된 연구결과가 나타나지 않고 있다. 두 문제의 복잡성은 물론, 최대 다품종정수흐름과 최소 다중절단면의 관계 및 선형계획완화문제의 특성 등에 대해서 규명된 것이 없다. 실행가능문제와 용량결정문제에 대한 연구결과와 비교하면 다소 의아한 현상이나, 최대화문제가 실행가능문제보다 더 복잡한 문제여서 일반적인 그래프와 차별되는 특성을 찾기가 쉽지 않았기 때문으로 짐작된다. 본 논문에서는 링 네트워크의 경우에도 다품종정수흐름의 최대값과 다중절단면의 최소값이 같지 않다는 것을 증명한다. 그리고 일반적인 네트워크에서 두 문제가 NP-hard 임에도 불구하고 링 네트워크에서는 각각의 문제를 네트워크흐름문제를 이용하여 다항시간 안에 풀 수 있음을 보이기로 한다.

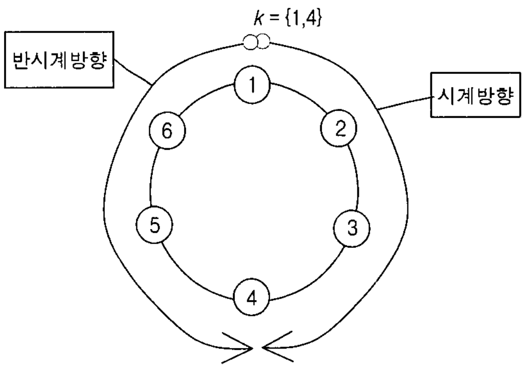
2. 용어의 정의와 수학적 모형

다품종정수흐름의 최대화문제는 다음과 같이 수리적으로 표현할 수 있다. 마디의 집합 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$와 무방향호의 집합 $E=\{(1,2), (2,3), \cdots, (n-1, n), (n,1)\}$로 이루어진 방향성이 없는 사이클 그래프 $G=(V, E)$이 주어져 있다고 가정하자. 무방향호 $(i, i+1)$과 무방향호 e_i는 동일한 무방향호를 지칭하는 것으로 정의한다. 다만 무방향호 $(n, 1)$이 무방향호 e_n으로 표시되는 것은 예외로 인정한다. K는 공급원-수요지의 쌍들의 인덱스 집합이다. 각 공급원-수요지의 쌍 $k \in K$에 대하여, $o(k)$와 $d(k)$ $(o(k) < d(k))$는 공급원-수요지의 쌍 k의 공급원과 수요지에 해당하는 마디를 각각 표시하는 것으로 정의한다. 각각의 무방향호 $e \in E$에 대해 주어진 용량을 $c(e)$로 표시한다. 그러면 다품종정수흐름의 최대화문제는 주어진 용량의 제한을 만족하면서 각 공급원에서 수요지로 보낼 수 있는 정수흐름의 최대값과 그러한 흐름의 경로를 결정하는 문제이다.

공급원과 수요지, $o(k)$와 $d(k)$사이의 흐름은 시계방향과 반시계방향의 양방향으로 보내질 수 있다. 다시 말해서 흐름이 $\{o(k), o(k)+1, \cdots, d(k)-1, d(k)\}$ 방향으로 움직이면 시계방향경로로 흐른다고 정의하고, 흐름이 $\{o(k), o(k)-1, \cdots, 1, n, \cdots, d(k)+1, d(k)\}$ 방향으로 움직이면 반시계방향경로로 흐른다고 정의한다([그림 1] 참조). 따라서 서로 다른 경로는 $2|K|$개가 되는데 이러한 경로들의 집합을 M으로 표시한다. 각 경로별 흐름의 양에 변수 f를 대응시키면 다품종정수흐름의 최대화문제는 다음과 같이 정수계획모형으로 표현할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
(P) \qquad & \max \quad \sum_{p \in M} f_p \\
& s.t. \quad \sum_{p:\, e \in p} f_p \le c(e), \quad \forall e \in E \qquad (1) \\
& f_p \ge 0, \quad f_p : \text{정수}, \ \forall p \in M
\end{aligned}
$$

여기서 제약식 (1)은 무방향호의 용량에 대한 제약을 표현한다.



[그림 1] 링 네트워크에서의 두 가지 루팅방법

(P)에서 정수의 조건이 없는 선형계획완화모형을 (LP)라고 하자. 식 (1)에 쌍대변수 x를 대응시키면

(LP)의 쌍대문제는 다음과 같이 표현된다.

$$(DLP)\quad \min \quad \sum_{e\in E} c(e)x(e)$$

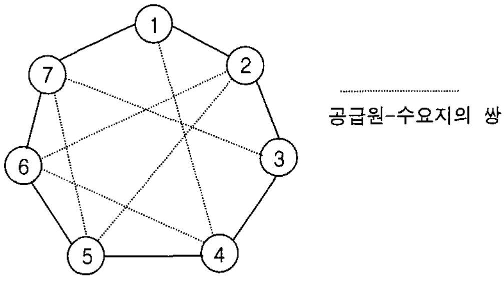
$$s.t.\quad \sum_{e\in p} x(e) \geq 1, \qquad \forall p\in M \qquad (2)$$

$$x(e) \geq 0, \qquad \forall e\in E \qquad (3)$$

만약에 (DLP)에 정수조건을 추가한 문제를 (DP)라고 정의하자. 그러면 식 (2)와 최소화문제의 특성상 $x(e)$는 0 또는 1의 값을 갖게 된다. 0-1 변수 $x(e)$를 무방향호의 선택을 의미하는 변수로 표현하면 (DP)는 최소용량의 다중절단면을 구하는 문제가 된다. 임의의 문제 (·)에 대하여 목적함수의 값을 $v(\cdot)$로 표시하기로 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$v(P) \leq v(LP) = v(DLP) \leq v(DP) \qquad (4)$$

식 (4)의 관계에 의해서 다품종정수흐름의 최대값은 다중절단면의 최소값보다 같거나 작게 된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 그러나 주어진 그래프의 종류에 따라서는 두 값이 같은 경우도 발생한다. 따라서 주어진 그래프가 링의 구조를 갖는 경우에 $v(P)$와 $v(DP)$의 관계는 흥미로운 연구과제이다. 또한 각각의 문제에 대해서 정수조건 완화문제와 정수계획문제간의 관계도 관심을 끄는 과제이다. 본 논문에서는 주어진 네트워크가 링의 구조를 갖는 경우에도 (4)의 두 부등식이 등식으로 성립하지 않는 경우가 존재함을 보이기로 한다. 이러한 사실은 다음의 예제에서 확인할 수 있다. [그림 2]와 같은 7개의 마디로 구성된 링 네트워크에 6개의 공급원-수요지 쌍, 즉 $K=\{\{1,4\}, \{2,5\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5,7\}\}$이고, 각 무방향호의 용량을 1로 가정하자. 정수흐름의 최대값은 2이다. 그리고 $v(LP)=v(DLP)=2.5$임은 다음의 해들을 통해서 확인할 수 있다. 공급원-수요지 쌍 $\{2,5\}$, $\{4,6\}$, $\{5,7\}$에 대해서는 시계방향의 흐름 0.5를 $\{2,6\}$, $\{3,7\}$에 대해서는 반시계방향의 흐름 0.5를 갖는 (LP)의 해와 무방향호 e_1, e_2, e_4, e_5, e_6에 대해서 x 변수의 값이 0.5인 (DLP)의 해는 동일한 목적함수의 값을 가지므로 각 문제의 최적해가 된다. 마지막으로 e_1, e_2, e_3가 최소용량의 다중절단면이 된다. 따라서 주어진 예제에서는 $2=v(P) \leq v(LP)=v(DLP)=2.5 \leq v(DP)=3$이다.



[그림 2] $v(P) < v(LP) = v(DLP) < v(DP)$의 예

3. 링 네트워크에서의 최소 다중절단면을 구하는 해법

링 네트워크의 경우에 (DP)를 네트워크흐름문제를 이용하여 쉽게 풀 수 있음을 보이기로 한다. (DP)를 네트워크흐름문제를 이용하여 풀 수 있는 것은 제약식의 계수를 구성하는 0-1 행렬이 특수한 구조를 갖고 있기 때문이다. (DP)의 계수행렬은 0과 1의 값을 원소로 하고, 행은 경로에 열은 무방향호에 대응되고, 원소는 무방향호가 경로에 포함되는지를 표시한다. 따라서 계수행렬은 경로-무방향호 표현 행렬(path-edge incidence matrix)이 된다. 이 때 링 네트워크의 경로의 특성상 각 행을 구성하는 0-1 벡터는 순환벡터(circular vector)이다. 순환벡터는 1의 값이 연속적으로 나타나는 0-1 벡

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&1 \\ 1&0&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&1&1 \\ 1&1&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

[그림 3] 행순환행렬

터인데, 첫 번째 원소와 마지막 원소는 연속하는 것으로 간주한다. 0-1 행렬 중에서 모든 행이 순환벡터인 경우에는 이를 행순환행렬(row circular matrix)이라고 부른다. [그림 2]의 예제에 대한 (DP)의 계수행렬은 [그림 3]과 같고, 이 행렬은 행순환행렬이다.

Bartholdi et al.[4]은 행순환행렬을 계수행렬로 하는 정수계획문제는 네트워크흐름문제를 이용하여 다항시간 안에 풀 수 있음을 보였다. 이를 (DP)에 적용하여 보자. 우선 (DP)의 변수 x를 새로운 변수 y로 다음과 같이 치환한다.

$$y(e_i)=x(e_1)+\cdots+x(e_i), \quad i=1,2,\cdots,n$$

그러면 경로별로 구성된 제약식 (2)는 경로가 시계방향경로인지 반시계방향경로인지에 따라 다음의 두 가지 형태로 변환된다($1 \le i < j \le n$이고, $y(e_0)=0$으로 가정).

- $y(e_{j-1})-y(e_{i-1}) \ge 1$,
  경로 p가 마디 i에서 마디 j까지 시계방향인 경우
- $y(e_n)-y(e_{j-1})+y(e_{i-1}) \ge 1$,
  경로 p가 마디 j에서 마디 i까지 반시계방향인 경우

그리고 비음조건 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$y(e_i)-y(e_{i-1}) \ge 0, \quad i=1,2,\cdots,n$$

우리의 바람은 변형된 문제의 각 제약식에 1과 -1이 각각에 대해서 하나 이하로 나타나는 것이다. 왜냐하면 이 경우에 계수행렬이 TU(totally unimodular)행렬이 되어서 정수해가 나오며, 특히 이러한 행렬의 전치행렬(transpose matrix)은 마디-유방향호 표시행렬(node-arc incidence matrix)의 부분행렬이 되므로 네트워크 흐름문제로 변환시킬 수 있기 때문이다. 자세한 내용은 [15]를 참조하기 바란다. 치환된 문제에서 $y(e_n)$을 상수로 고정시킨 문제를 (DPy)로 정의하자. 그러면 (DPy)의 계수행렬은 각 제약식에 1과 -1이 하나 이하로 나타나는 TU행렬이 되어서 (DPy)의 정수조건을 완화한 선형계획완화문제가 정수최적해를 갖게 된다. 또한 선형계획완화문제는 네트워크흐름문제인 쌍대문제로 풀 수 있다. 또한, 선형계획법에서 목적함수의 최적값은 우측상수에 대해서 piecewise linear convex 함수의 형태를 가지므로, (DPy)의 목적함수의 최적값도 $y(e_n)$의 값에 대해서 piecewise linear convex 함수가 된다. 따라서 이분탐색법(binary search method)을 이용하면 네트워크 흐름문제를 $O(\log n)$번 ($y(e_n) \le n$이므로) 풀어서 (DPy), 즉 (DP)의 해를 구할 수 있다.

4. 링 네트워크에서의 최대 다품종 정수흐름을 구하는 해법

(P)의 경우에는 (DP)와는 달리 계수행렬이 행순환행렬이 아니다. 따라서 바로 (DP)에 적용한 방법을 이용하여 (P)를 풀 수는 없다. 그러나 문제의 특성을 잘 이용하면 계수행렬이 행순환행렬을 갖는 문제로 (P)를 변환시킬 수 있다. (P)에서 최적해를 구하는데 영향을 주지 않는 경로를 생각해 보자. 경로들의 집합 M에 속한 임의의 두 경로 p와 p'에 대해서 $p \subseteq p'$이면, 즉 p에 속한 무방향호는 p'에 속하면, p'은 p의 열등경로(dominated path)라고 부르기로 하자. 여기서 열등경로의 의미는 다음과 같은 사실에 기인한다. 임의의 (P)의 해에서 p'에 대한 흐름은 p의 흐름으로 대체해도 여전히 실행가능해가 된다. 따라서 열등경로들은 제거해도 (P)의 최적해에 영향을 주지 않게 된다. 동일한 공급원과 수요지를 갖는 서로 다른 공급원-수요지 쌍은 없으므로, M에 속한 경로 중에서 동일한 경로는 존재하지 않는다.

이제 M에 열등경로는 없다고 가정하자. 그리고 M에 속한 경로는 다음과 같은 순서로 배열되어 있다고 가정하자. 시계방향의 경로는 반시계방향의 경로에 우선하고, 시계방향 또는 반시계방향의 경로들끼리는 공급원 마디의 번호가 작은 것이 우선한다. (P)가 임의로 주어진 경우에 위와 같은 가정을 만족하도록 M을 변환시키는 과정은 다항시간 안에 처리할 수 있다. 이러한 과정을 간략화과정이

라고 부르기로 하자. [그림 2]의 예제에 대한 (P)의 계수행렬은 [그림 3]의 행렬의 전치행렬이 된다. 그러나 간략화과정을 거친 후에는 (P)의 계수행렬은 [그림 4]와 같이 된다. 좀 더 자세히 설명하면 그림 3의 행은 각 경로를 표현하고 있는데 이들 중에서 3, 4, 7, 8, 9, 10번째 행에 해당하는 경로가 열등경로가 된다. 예로서 세 번째 행에 대응되는 경로는 두 번째 (또는 다섯 번째)행에 해당하는 경로의 에지를 모두 포함하므로 열등경로이다. 이러한 열등경로에 해당하는 행을 제거한 행렬의 전치행렬이 바로[그림 4]의 행렬이 된다.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

[그림 4]

[그림 4]의 계수행렬은 행순환행렬이다. 이러한 현상은 임의의 (P)에 대해서도 성립함을 다음의 정리에서 알 수 있다.

정리 1. 간략화과정을 거친 (P)의 계수행렬은 행순환행렬이 된다.

(증명) (P)의 계수행렬을 A라고 하자. 이제 A가 행순환행렬임을 보이기로 한다. A에서 임의로 선택한 행이 i번째 행이라고 가정하고 이 행이 순환벡터의 구조를 갖고 있음을 보이기로 한다. 선택한 i번째 행에서 첫 번째 연속으로 나타난 1의 값이 j번째 원소에서 끝난다고 가정하자. 그리고 두 번째 연속으로 나타나는 1의 값이 $l(>j)$번째에서 시작한다고 가정하자. 그러한 l이 없다면 선택된 행은 순환벡터의 구조를 이룬다. 만약 l이 존재한다면, 이 행이 순환벡터이기 위해서는 첫 번째 1의 그룹은 1열에서 시작해야 되고, 두 번째 1의 그룹은 마지막 열에서 끝나야 된다. 행렬 A의 정의상 행은 에지에 열은 경로에 해당한다. 가정에 의해서 l번째 경로는 무방향호 e_i를 포함하고 있는데, M의 배열순서를 고려할 때, 반시계방향의 경로이고, 무방향호 $e_1, \cdots, e_i$를 포함하고 있다. 만약에 첫 번째 1의 그룹이 1열에서 시작하지 않으면 M의 첫 번째 경로는 무방향호 e_i보다 앞선 무방향호만을 포함하는 경로이므로 l번째 경로는 첫 번째 경로에 대해서 열등경로가 된다. 또한 두 번째 1의 그룹이 마지막 열에서 끝나지 않는다고 가정하자. 그러면 l번째 경로는 마지막 경로에 대해서 열등경로가 된다. 따라서 A는 행순환행렬이다. □

간략화과정을 거친 (P)는 (DP)처럼, 네트워크 흐름문제를 이용해서 최적해를 구할 수 있다. (P)에서는 f를 새로운 변수 y로 다음과 같이 치환하게 된다.

$$y(p) = f_1 + \cdots + f_p, \quad p = 1, 2, \cdots, |M|$$

또한 계수행렬을 TU행렬로 만들기 위해서, 치환된 문제에서 $y(|M|)$을 상수로 고정시킨 문제를 정의하고, 이 문제의 쌍대문제에 대응되는 네트워크흐름문제를 연속적으로 풀 게 된다. 총 흐름의 합은 무방향호의 용량의 합, $C = \Sigma_{e \in E}\, c(e)$를 넘지 못함으로, $y(|M|) \le C$이고, (P)의 해를 구하기 위해서는 네트워크 흐름문제를 $O(\log C)$번 풀게 된다.

(P)에서처럼, (DP)에서도 열등경로를 제거하는 것은 최적해에 영향을 주지 않는다. 왜냐하면 열등경로를 제거한 문제에 대한 다중절단면은 제거하기 전 문제에서도 항상 다중절단면이 되고 역도 성립하기 때문이다. 따라서 (DP)를 푸는 경우에도 열등경로를 제거함으로써 문제의 크기를 줄일 수 있다.

5. 결 론

다품종흐름문제와 다중절단면문제는 공급원-수요지의 쌍이 둘 이상 복수로 존재하는 확장된 형태의 최대흐름, 최소절단면문제이다. 다품종흐름문제는 흐름의 합을 최대화하는 최대화문제와 모든 공급원-수요지 쌍에 주어진 수요를 만족하는 실행가

능해가 존재하는지 분석하는 실행가능문제를 포함한다. 일반적인 그래프에서의 다품종정수흐름문제의 실행가능문제는 NP-complete에 속하는 문제이고, 최대화 문제는 실행가능문제보다 더 복잡한 문제이므로 NP-hard에 속하는 문제가 된다. 링 네트워크에서의 다품종정수흐름을 구하는 문제는 다항시간 안에 풀 수 있는 해법이 제시되었으나, 최대화 문제에 대해서는 문제의 복잡성에 대한 규명은 물론 해법에 대한 연구가 이루어지지 못했다.

본 논문에서는 링 네트워크에서 다품종정수흐름의 최대화문제와 최소 다중절단면문제를 다항시간 안에 푸는 해법을 제시하였다. 각 해법들은 네트워크흐름 문제의 해법을 활용할 수 있도록 구성되었는데 이는 대상문제의 수학적 모형이 행순환행렬을 계수행렬로 갖는다는 점에 착안하였다. 또한 본 논문에서는 다품종정수흐름의 최대값이 다중절단면의 최소값에 못 미치는 경우가 발생하고, 정수조건 완화문제와 정수계획문제의 해도 같지 않음을 입증하였다.

참 고 문 헌

[1] 명영수, "정수단위로만 루팅이 허용되는 SONET 링의 용량결정문제", 「한국경영과학회지」, 제25권, 제1호(1998), pp.49-62.

[2] 명영수, 김후곤, "분할이 허용된 링의 용량결정문제에 대한 개선된 해법", 「한국경영과학회지」, 제26권, 제4호(2001) pp.99-108.

[3] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network Flows : theory, algorithms, and applications*, Prentice-Hall, New Jersey, 1993.

[4] Bartholdi, J.J., J.B. Orlin, and H.D. Ratliff, "Cyclic scheduling via integer programs with circular ones," *Operations Research*, Vol.28(1980), pp.1074-1085.

[5] Cosares, S., D.N. Deutsch, I. Saniee, and O.J. Wasem, "SONET toolkit : a decision support system for designing robust and cost-effective fiber-optic networks," *Interfaces*, Vol.25(1995), pp.20-40.

[6] Cosares, S. and I. Saniee, "An optimization problem related to balancing loads on SONET rings," *Telecommunication Systems*, Vol.3(1994), pp.165-181.

[7] Dell'Amico, M.L. and F. Maffioli, "Exact Solution of the SONET Ring Loading Problem," *Operations Research Letters*, Vol.26 (1999), pp.119-129.

[8] Frank, A., T. Nishizeki, N. Saito, H. Suzuki, and E. Tardos, "Algorithms for routing around a rectangle," *Discrete Aplied Mathematics*, Vol.40(1992), pp.363-78.

[9] Garey, M.R. and D.S. Johnson, *Computers and intractability : a guide to the theory of NP - completeness*, W.H. Freeman and Co., New York, 1979.

[10] Myung, Y.-S., "An Efficient Algorithm for the Ring Loading Problem with Integer Demand Splitting," *SIAM J. Discrete Math*, Vol.14(2001), pp.291-298.

[11] Myung, Y.-S., "Multicommodity flows in cycle graphs," *Discrete Applied Math*, Vol.154(2006), pp.1615-1621.

[12] Myung, Y.-S. and H.-G. Kim, "On the Ring Loading Problem with Demand Splitting," *Operations Research Letters*, Vol.32(2004) pp.167-173.

[13] Myung, Y.-S., H.-G. Kim, and D.-W. Tcha, "Optimal load balancing on SONET bidirectional rings," *Operations Research*, Vol.45 (1997), pp.148-152.

[14] Okamura, H. and P.D. Seymour, "Multicommodity flows in planar graphs," *Journal of Combinatorial Theory Series B*, Vol.31(1981), pp.75-81.

[15] Schrijver, A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, 1986.

[16] Schrijver, A., *Combinatorial optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[17] Schrijver, A., P. Seymour and P. Winkler, "The ring loading problem," *SIAM J. Discrete Math.*, Vol.11(1998) pp.1-14.

[18] Shyur, C.C., Y.M. Wu, and C.H. Chen, "A capacity comparison for SONET self-healing ring networks," *IEEE GLOBECOM*, Vol.3(1993), pp.1574-1578.

[19] Suzuki, H., A. Ishiguro and T. Nishizeki, "Variable-Priority Queue and Doughnut Routing," *Journal of Algorithm*, Vol.13(1992), pp.606-635.

[20] Vachani, R., A. Shulman, and P. Kubat, "Multicommodity flows in ring networks," *Informs Journal on Computing*, Vol.8(1996), pp.235-242.

[21] Wan, P.-J. and Y. Yang, "Load-balanced routing in counter rotated SONET rings," *Networks*, Vol.35(2000), pp.279-286.

[22] Wang, B.-F., "Linear Time Algorithms for the Ring Loading Problem with Demand Splitting," *Journal of Algorithm*, Vol.54(2005) pp.45-57.

[23] Wu, T.H., *Fiber network service survivability*, Artech House, Boston, MA, 1992.