

Time Average ESPI 와 Euler-Bernoulli 방정식에 의한 탄성계수 측정

김경석*, 강기수#, 이항서**, 강영준***

Determination of Elastic Modulus by Time Average ESPI and Euler-Bernoulli Equation

Koungsuk Kim*, Kiso Kang#, Hangseo Lee** and Youngjune Kang***

ABSTRACT

The paper proposes a new sonic resonance test for a elastic modulus measurement which is based on time-average electronic speckle pattern interferometry(TA-ESPI) and Euler-Bernoulli equation. Previous measurement technique of elastic constant has the limitation of application for thin film or polymer material because contact to specimen affects the result. TA-ESPI has been developed as a non-contact optical measurement technique which can visualize resonance vibration mode shapes with whole-field. The maximum vibration amplitude at each vibration mode shape is a clue to find the resonance frequencies. The dynamic elastic constant of test material can be easily estimated from Euler-Bernoulli equation using the measured resonance frequencies. The proposed technique is able to give high accurate elastic modulus of materials through a simple experiment set up and analysis.

Key Words : Time Average Electronic Speckle Pattern Interferometry : TA-ESPI (시간평균 전자처리 스펙클 패턴 간섭법), Elastic Modulus (탄성계수), Euler-Bernoulli Equation (오일러-베르누이 방정식), Sonic Resonance Testing (음향공진법)

1. 서론

탄성계수는 재료학적 측면과 기계공학적인 측면 모두 중요한 인자이다. 재료학적 측면에서 탄성계수는 원자와 원자 사이, 이온과 이온 사이의 결합력과 관련된 재료 고유의 물리적 특성으로 재료의 이해증진의 중요한 도구가 되며, 공학적인 측면에

서 구조해석 분야에서 반드시 필요한 입력데이터이며, 수명평가 등에 있어서도 중요한 인자이다.¹ 탄성계수의 측정방법은 일반적으로 정적인 측정방법과 동적인 방법으로 분류할 수 있다. 정적 측정방법은 적절한 형태로 가공된 시험편에 스트레인 게이지를 붙여 인장, 굽힘, 비틀림의 외력을 가하고 이에 상응하는 변형량을 측정하여, Stress-strain

접수일: 2006 년 4 월 5 일, 게재승인일: 2006 년 9 월 29 일

* 조선대학교 기계설계공학과

교신저자: 한국표준과학연구원 안전그룹

E-mail: kskang@kriss.re.kr Tel. (042) 868-5257

** 큐슈대학교 기계항공공학과

*** 전북대학교 기계공학과

곡선을 구함으로서 탄성계수를 측정하게 된다. 이 방법은 측정치의 정밀성과 재현성이 떨어지고 측정에 많은 시간이 소요되며, 재료를 파괴해야 하며, 시편의 크기가 비교적 커야한다는 단점이 있다. 동적 측정방법은 시험편의 공진주파수를 찾아냄으로써 탄성계수를 측정하는 음향공진법(Sonic resonance test)과 음파를 시험편에 통과시켜 시험편에서 발생한 반향음을 이용하여 탄성계수를 측정하는 초음파 에코 중첩법(Pulse echo overlap)등이 있다.² 특히 음향공진법은 재료의 미세조직에 의한 오차를 최소화 할 수 있어 재료 탄성계수 측정에 많이 사용하고 있으며, 공진주파수를 찾기 위해 연속 가진에 의한 방법(Free-free suspended beam technique)과 임펄스 가진방법(Impulse excitation technique)을 나누어진다. 연속 가진에 의한 방법이 시험의 재현성 및 적용성이 높은 기법으로 알려져 있다. 연속가진에 의한 방법은 E1875-00²¹에 규정된 표준탄성계수 측정법으로 시험편에 진동음을 sweeping 하여 가진하고 물체의 진동을 전축바늘(phonographic needle)을 사용하여 측정하여 물체의 공진주파수를 구하게 된다.³ 그러나, 최근 사용이 증대하고 있는 박막재료와 고분자 재료의 탄성계수의 측정에 있어 이 방법은 전축바늘이 시험편에 접촉하여야 하며, 접촉력은 측정결과에 영향을 주게 된다. 또한 정적 방법은 스트레인 게이지를 박막에 부착하는 것이 거의 불가능한 경우가 발생하게 된다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 본 연구에서는 탄성계수의 측정을 위해 시험의 재현성, 정확성이 높은 동적시험법을 기반으로 박막등에 적용이 가능한 비접촉 공진주파수 측정기법을 제안하고 Euler-Bernoulli 방정식을 이용하여 동적탄성계수를 측정하고자 한다. 시험편은 오일러-베르누이 보의 조건을 만족하는 외팔보로 제작하였으며, 공진주파수 측정기법은 레이저의 간섭현상을 이용하여 물체의 표면변위를 실시간으로 가시화 할 수 있는 시간평균 전자차리 스페클 간섭법(Time Average Electronic Speckle Pattern Interferometry : TA-ESPI)을 이용하였다.

2. 기초이론

2.1 Time Average ESPI

시간평균법 (Time average)는 널리 알려진 ESPI의 측정기법 중의 하나로 조화운동을 하는 물체의 진동모드 가시화에 많이 활용되어 왔다.⁴ 일반적

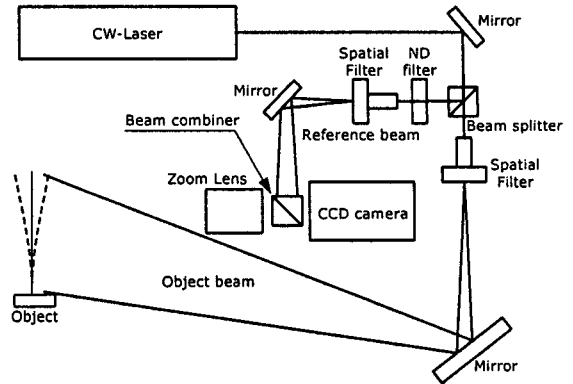


Fig. 1 Out-of-plane displacement sensitive ESPI interferometer

으로 Fig. 1 과 같은 광학간섭계가 사용되며, 참조광(Reference beam)과 물체광(Object beam)이 간섭된 복소진폭을 CCD 카메라에 기록한다. 변형해석을 위한 ESPI 는 물체 변형전후의 광강도(Intensity)를 감산처리하고 있으나(Subtraction technique), 진동해석을 위해서는 시간평균 기법 즉, 연속하여 광강도를 합산누적하는 기법(Addition technique)을 사용하게 된다. 정지상태에서 스페클간섭에 의한 물체의 복소진폭은 물체광과 참조광의 위상차를 갖는 식 (1)로 표현할 수 있다.

$$U_{steady}(x, y) = A(x, y)e^{i\phi(x, y)} \quad (1)$$

또한, 진동하는 물체의 변위가 주기적으로 물체의 면의 방향에 대해 시간의 함수로만 변하고, 이 물체의 순간위치를 $a(t) (= a_0 \sin \omega t)$ 라고 할 때, 변형후의 물체의 광간섭신호는 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$U_i(x, y) = A(x, y)e^{i\left[\phi(x, y) + \frac{4\pi}{\lambda}a(t)\right]} \quad (2)$$

여기에서 λ 는 레이저의 파장이다. 시간평균법에서는 물체 진동운동의 주기보다 더 긴 시간, T ($\gg 2\pi/\omega$) 동안 복소진폭(U_i)을 기록하게 되고 이때의 복소진폭은 식 (3)으로 쓸 수 있다. 이 수식은 식 (4)와 같이 간단히 0 차 Bessel 함수(J_0)의 형태로 다시 쓸 수가 있다.

$$U_{TA}(x, y) = A(x, y) \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\left[\phi(x, y) + \frac{4\pi}{\lambda}a(t)\right]} dt \quad (3)$$

$$U_{TA}(x, y) = A(x, y)e^{i\phi(x, y)} J_0 \left[\frac{4\pi}{\lambda} a_0 \right] \quad (4)$$

시간평균법이 적용되어 CCD 카메라에 기록되어 지는 광강도는 $U_{TA} U_{TA}^*$ 로 구할 수 있으며, 식 (5) 와 같이 표현할 수 있다.⁵

$$I_{TA}(x, y) = A^2(x, y) J_0^2 \left[\frac{4\pi}{\lambda} a_0 \right] \quad (5)$$

Fig. 2 는 조화진동하는 물체의 진폭변화에 따른 0 차 Bessel 함수의 제곱의 변화를 나타내었다. 공진모드에서 노달라인(Nodal line)은 진폭이 “ 0 ”인 지점이며, 광강도는 최대 밝기로 나타나게 된다.⁶

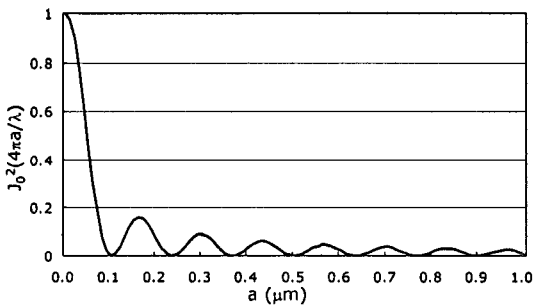


Fig. 2 The irradiance distribution of time average speckle fringe for a sinusoidally vibrating surface ($\lambda = 532 \text{ nm}$)

2.2 탄성계수의 예측

공진주파수로부터 탄성계수를 결정하기 위한 방법은 Euler-Bernoulli 방정식에 의한 방법과 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 전단응력과 관성모멘트를 고려한 해석방법을 사용하고 있다. 본 연구에서는 재료의 강성이 높고 두 방정식의 결과에 큰 차이가 없는 점을 감안하여 계산이 용이한 Euler-Bernoulli 방정식을 사용하였다.⁷ 실험에서는 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)의 조건을 만족하는 시험편을 제작하고, 경계조건을 Clamped-free 형태(외팔보)로 하였다. TA-ESPI 를 이용하여 공진주파수(Resonance frequency)를 실험적으로 구하고 식 (6)를 이용하여 탄성계수(E)를 구하게 된다.

$$E = \frac{m\omega_n^2 l^4}{c^4 I} \quad (6)$$

여기에서 m 는 단위길이당 질량, ω_n 은 고유주파수, l 는 보의 길이, c 는 모드계수, I 는 관성모멘트이다.

3. 실험장치 및 방법

3.1 시험편 및 계측시스템

본 연구에서 시험편은 두께 $100 \mu\text{m}$, 길이 90 mm 의 Stainless Steel 304 와 두께 $500 \mu\text{m}$, $100 \mu\text{m}$ 의 순수 구리를 사용 하였고, 순수 구리(99.99%)의 탄성계수는 $100\sim 120 \text{ GPa}$ 사이이고, Stainless Steel 304 의 탄성계수는 197 GPa 이다.⁸ 시험편은 폭 5 mm , 길이 120 mm 로 와이어 커팅(Wire cutting)으로 저속 가공하였으며, Clamped-free 경계 조건으로 실험하였다. TA-ESPI 는 독일 Ettermeyer 사의 상용 시스템을 사용하였다. 시스템은 Fig. 3 과 같이 Nd:YAG Laser ($\lambda = 532 \text{ nm}$), ESPI 센서, 가진장치, 영상처리프로그램으로 구성되어 있다. 가진 장치에서 스피커는 가진 주파수 영역을 고려하여 선정하였으며, 함수발생기(Function Generator)에서 가진 주파수를 조절하게 된다. 가진 스피커의 주파수 특성은 Microphone 를 이용하여 검증하였다.

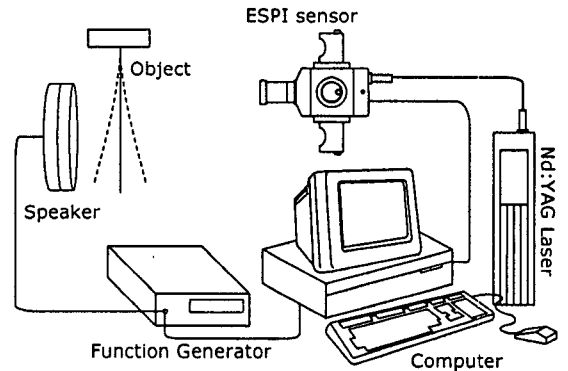


Fig. 3 Configuration of elastic modulus measurement system

3.2 공진주파수 결정

TA-ESPI 에서는 물체의 진동모드에 대응하여 레이저의 상관간섭무늬로 표현하게 되며, 주파수는 상관간섭무늬에서 직접적 측정이 불가능하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 공진모드를 실시간 분석하여 공진주파수를 결정하는 방법을 이용하였다. 가진 진폭을 일정하게 유지하고 가진 주

파수변화할 때, 가진주파수가 공진주파수에 근접함에 따라 물체의 진동량은 증가하게 되며, 공진주파수에서 최대 진동량을 갖게 된다. 또한, Fig. 2 에서 알 수 있듯이 물체의 진동량이 증가함에 따라 TA-ESPI 의 상관간섭줄무늬의 수가 증가하게 된다. 결과적으로 가진주파수의 변화에 따른 줄무늬의 차수를 카운팅하고, 최대차수가 나타나는 가진 주파수를 공진주파수로 결정할 수 있다. 줄무늬 차수의 변화는 가진주파수 1 Hz 의 변화에도 쉽게 구별이 가능하다.

4. 실험결과

4.1 STS 304 의 탄성계수 측정

Matweb⁸ 에서 제공하는 STS304 의 탄성계수는 197 GPa, 포와송의 비는 0.29 이며, 밀도는 8000 kg/m³ 이다. 이 물성값을 이용하여 유한요소해석 (FEM, ANSYS)으로 구한 공진주파수와 TA-ESPI 를 이용하여 측정한 공진주파수를 Table 1 에 비교하였다. 오차는 최대 1.65 %의 오차를 보이고 있으며, 높은 정확도를 가지고 계측하고 있음을 알 수 있다. TA-ESPI로부터 구한 공진주파수와 식 (6)을 이용하여 각 공진주파수에서 구한 탄성계수들의 평균값은 194.53 GPa 로 평가되었다. Matweb 에서 제공하는 탄성계수와 1.25%의 오차를 가지고 있으며, 이는 본 논문에서 제안하는 탄성계수 측정기법이 우수하다는 것을 알 수 있다. 또한, 실험결과의 재검증을 위하여 실험을 통하여 구한 탄성계수 (194.53 GPa)를 이용하여 FEM 으로 공진주파수를

구하고, TA-ESPI 와 비교하였다 오차가 감소하는 것을 알 수 있으며, 이는 TA-ESPI 에 의해 구한 탄성계수가 보다 정확하다는 것을 의미한다.

4.2 시험편 형상변화에 따른 영향

본 연구에서 적용한 탄성계수 예측은 Euler-Bernoulli 방정식을 사용하였으며, 이 방정식에서 Beam 의 길이는 폭 및 두께에 비하여 10 배 이상의 조건을 만족해야 한다. 이러한 조건은 시험편의 채취에 있어서 제한을 주며, 동시에 시험편의 형상조건의 선택에 따라 결과값의 변화가 발생할 수 있다. 형상조건 변화에 따라 탄성계수 측정결과를 비교하기 위해 시험편의 폭(B)와 길이(L)의 비율(L/B)을 8, 10, 12, 14, 16, 18 배로 하여 실험을 하였다. L/B 비율에 따라 각 진동모드에서 TA-ESPI 를 이용하여 측정한 탄성계수를 Fig. 4 에 나타내었다. 각 실험에서 탄성계수의 표준편차는 L/B = 8 에서 최대 3.16 GPa 로 나타났으며, 나머지 실험에서는 표준편차가 1.94 GPa 이하로 각 실험에서 측정된 결과의 재현성이 우수함을 알 수 있다. 실험 결과에서 탄성계수는 L/B ratio 에 따라 측정결과가 다르게 나타났으며 L/B=12 를 경계로 하여 탄성계수의 측정값이 약 30 GPa 의 차이를 보이고 있다. Fig. 5 는 각 진동 모드에서 구한 탄성계수를 평균하여 L/B ratio 에 따라 나타내었다. 결과에서 L/B ratio 가 8, 10, 12 의 경우에 대해 탄성계수는 평균 165.78 GPa 로 나타났으며, L/B ratio 가 14, 16, 18 의 경우에는 평균 194.53 GPa 로 측정되었다.

오일러-베르누이 방정식은 정확한 결과를 얻기 위해 L/B ratio 가 10 배 이상 조건을 요구하고 있다는 점을 고려할 경우, L/B ratio 가 8, 10, 12 의 측

Table 1 Comparison of resonance frequency between FEM and TA-ESPI (Hz)

	2nd	3rd	4th	5th	6th
TA-ESPI	61.0	171.7	336.0	556.7	832.0
FEM at 197 GPa	61.9	173.3	340.1	563.6	843.9
Error (%)	1.43	0.97	1.19	1.22	1.65
FEM at 194 GPa	61.5	172.1	337.3	557.6	833.2
Error (%)	0.76	0.26	0.39	0.17	0.14

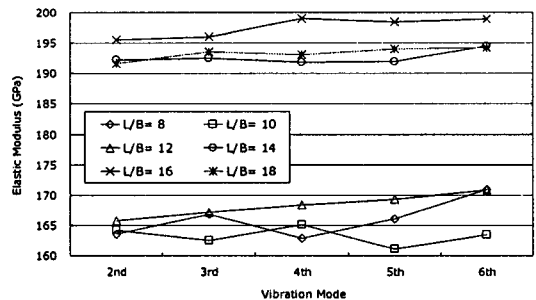


Fig. 4 Comparison of elastic modulus by TA-ESPI according to the change of ratio of length to width

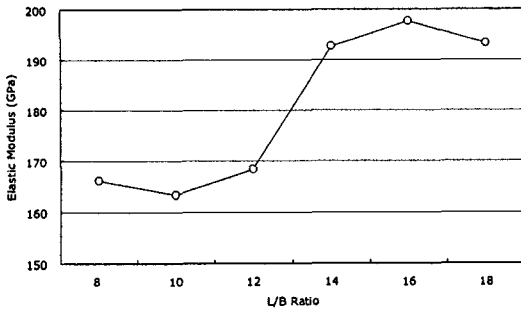


Fig. 5 Comparison of average elastic modulus by TA-ESPI

정 결과에는 많은 오차가 포함되어 있다는 사실을 알 수 있다. 또한, 오일러-베르누이 방정식은 10 배 이상의 형상조건을 요구하고 있으나, 이 방정식을 적용하기 위해서는 14 배 이상의 시험편 형상을 요구하고 있음을 알 수 있다. 14 배 이하의 조건에 대해서는 Waburton⁹에 의해 제안된 방정식을 사용함으로써 해결될 수 있을 것으로 사료된다.

4.3 Pure Copper 의 탄성계수 측정

순수구리의 탄성계수는 제조과정에 따라 변화가 크며, 일반적으로 bulk 재료에 대해 100 ~ 120 GPa 의 대역을 갖는 것으로 알려져 있다. 그러나, 최근 소형구조물 설계에 있어서 정확한 탄성계수가 제공하여야 하며, 재료를 파손하지 않고 재현성이 좋은 측정기법이 필요하다. 순수구리의 탄성계수를 측정하기 위해 두께 500 μm , 100 μm 의 순수구리를 사용하였다. 실험조건은 L/B ratio 를 16 배로 하여 탄성계수의 평균을 구하였다. 500 μm 두께의 시험편에 대해 총 시험회수는 40 회이며, TA-ESPI에 의해 구한 탄성계수의 평균은 104.16 GPa 으로 평가되었다. Table 2 는 Table 1 과 같이 Matweb 에서 제공하는 탄성계수의 중간값(110 GPa)을 이용한 FEM 결과와 실험에서 측정된 탄성계수를 이용한 FEM 결과(104.16 GPa)를 비교하였다. 본 연구에서 제안한 탄성계수 측정값이 보다 작은 오차를 보이고 있다. STS304 와 결과 분포를 비교하면 구리와 같은 연성재료의 경우 측정결과의 표준편차 및 오차가 큰 것으로 나타났다.

두께 100 μm 구리 시험편의 실험에서는 총 20 회 측정을 하였으며, 탄성계수는 평균 104.88 GPa 로 평가되었고, 표준편차는 3.03 GPa 이다. 또한 실

Table 2 Comparison of resonance frequency of 500 μm thickness copper (Hz)

	2nd	3rd	4th
TA-ESPI	267	748	1469
FEM at 110 GPa	278	779	1528
Error (%)	4.05	3.95	3.89
FEM at 104.16 GPa	276	773	1516
Error (%)	3.42	3.29	3.11

험 결과의 신뢰도를 분석하기 위해 Student's t-distribution 에 의해 95% 신뢰도 구간은 104.88 ± 1.42 GPa 를 얻을 수 있었다. 두께 500 μm , 100 μm 의 순수 구리에 대한 실험결과로부터 탄성계수는 104 ~ 105 GPa 로 추정할 수 있다.

5. 결론

최근 박막 및 고분자 재료 등의 신소재 개발에 관련하여 신뢰성과 재현성이 우수한 탄성계수 측정방법을 요구하고 있다. 이를 해결하기 위해 본 논문에서는 기존 동적 탄성계수 측정방법 중의 하나인 음향공진법을 기반으로 박막 또는 고분자 재료에 적용이 가능한 동적 탄성계수 측정방법을 개발하였다. 공진주파수 결정을 위해 레이저 스펙클 간섭방식의 TA-ESPI 를 이용하여 공진 주파수를 측정하고, 오일러-베르누이 방정식에 의해 탄성계수를 예측함으로써 기존 접촉식 탄성계수 측정법의 한계를 보완 할 수 있었다. 적용실험에서는 500 μm 와 100 μm 의 순수구리 시험편과 100 μm 의 Stainless Steel 304 시험편의 탄성계수를 측정하고, 일반 물성자료와 비교하였으며, 실험결과의 검증을 위해 기존 탄성계수와 제안하는 기법으로 구한 탄성계수를 FEM 해석으로 비교하여 본 논문에서 제안하는 탄성계수가 타당성 있음을 제시하였다. 또한 형상조건에 따른 영향에 대한 조사에서는 길이가 폭 및 두께에 비하여 10 배 이상의 형상 조건을 제시하고 있으나, 측정 결과 14 배 이상의 형상조건에서 정확한 결과가 나타남을 알 수

있었다. 14 배 이하의 형상조건에 대해서는 시험편의 전단강성의 영향에 의한 것으로 오일러-베르누이 방정식이 적용할 수 없는 것으로 사료 되어진다. 본 논문에서 제안하는 탄성계수 측정 기법은 매우 간편한 접근성을 가지고 있으며, 재현성이 우수한 기법으로 박막 등의 탄성계수 측정기술에 접목하여 다양한 응용할 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Yi, C. H., Bahk, S. M. and Kim, H. S., "Dynamic Elastic Constants of Composite Material using Resonance Frequencies, Euler and Timoshenko Beam Equation," Korea Journal of Material Research, Vol. 9, No. 7, pp. 670-674, 1999.
2. Lee, J. C., Kim, Y. M. and Lee, H. I., "Measurement of dynamic elastic constants and their applications," Bulletin of the Korea Inst. Of Met. & Mat., Vol. 10, No. 3, pp. 259-269, 1997.
3. ASTM, "Standard Test Method for Dynamic Young's Modulus, Shear Modulus, and Poissons Ratio by Sonic Resonance," ASTM E1875-00ε1, 2002.
4. Kim, I. K., Kim, K. S., Yoon, S. U. and Kang, K. S., "A Study on Vibration Characteristic of Thin Plate in Crack Propagation by Laser Holography Method," J. of the Korean Society for Precision Engineering, Vol. 17, No. 10, pp. 200-205, 2000.
5. Hoegmoen, K. and Lokberg, O. J., "Detection and measurement of small vibration using electronic speckle pattern interferometry," Applied Optics, Vol. 16, No. 7, pp. 1869-1875, 1977.
6. Cloud, G. L., "Optical Methods of Engineering Analysis," Cambridge University Press, pp. 461-463, 1990.
7. Inman, D. J., "Engineering Vibration," Prentice-Hall Inc., pp. 403-410, 1994.
8. www.matweb.com
9. Warburton, G. B., "The Vibration of Rectangular Plates," Proc. Inst. Mech. Eng., Vol. 168, pp. 371-381, 1954.