

◆특집◆ 응용역학 CAE 엔지니어링

hp 적응 유한 요소 해석법을 이용한 정밀부품 수치해석 기법 연구

김창완*, 차호영**, 최진환***

A Numerical Analysis Technique for High Precision Machine Components using *hp* Adaptive Finite Element Method

C. W. Kim*, Hoyoung Cha** and J. H. Choi***

Key Words : High Precision Machine Component (정밀 기계 부품), Finite Element Method (유한요소해석법), *h*-method (*h*-방법), *p*-method (*p*-방법), *hp* adaptive method (*hp* 적응 방법), Error Estimation (오차 추측)

1. 서론

정밀 기계들에 대한 구조 해석을 위해서는 유한 요소 해석법(Finite Element Method, FEM)이 널리 사용되고 있다. 최근 각종 기계 또는 전자 부품, 기계 구조물에 대한 정밀도의 요구가 증가하고 있는 추세이다. 따라서 정밀 부품 및 구조물에 대한 정확하고 정밀한 설계를 위하여 보다 정확한 설계 자료를 제공해야만 한다. 유한 요소 해석법을 이용한 변위, 응력 등의 설계 자료 추출 시에 보다 정확한 해석 결과를 위해서는 유한요소의 수를 증가시키거나, 유한요소의 보간 함수(shape function)의 차수(order)를 증가시켜야 한다. 전자는 *h* 방법의 유한 요소 해석법에 해당하고, 후자는 *p* 방법 유한 요소 해석법에 해당한다¹. 이들 방법들을 이용하여 유한 요소 모델을 만들 경우 해의 정확도는 향상하나, 유한 요소 해석 모델의 크기가 지속

적으로 증가하여 컴퓨터의 용량의 한계에 부딪치는 경우가 빈번하다.

1980 년 후반에 *h* 또는 *p* 방법 유한 요소 해석법의 장점을 효율적으로 결합한 *hp* 적응 유한 요소 해석법 (*hp* Adaptive Finite Element Method)이 시도 되었다. Guo² 와 Demkowicz³ 는 각 유한 요소의 오차 허용치를 허용하는 범위에서 특정부위의 유한 요소를 세분하거나 유한 요소 보간 함수의 차수를 증가시키는 방법을 제안하였다. 이들은 *h* 와 *p* 를 적절히 조합하여 유한 요소 모델을 재구성함으로써 해의 수렴도가 exponential rate 이 됨을 증명하였다. *hp* 적응 유한 요소 해석법에서 특정 부위의 유한 요소들에 *h* 와 *p* 방법을 적절히 조합하여 적용하기 위해서는 후오차 예측(*a posteriori* error estimation)이 필수적이다. Kelly⁴, Ainsworth^{5,6}, Babuska⁷, Kim⁸ 등이 지속적으로 다양한 후오차 예측방법들에 대해 연구를 계속하여 왔다.

본 논문에서는 내연적 요소 잔차 방법(implicit element residual method)을 이용한 새로운 후오차 예측법을 개발하여 *hp* 적응 유한 요소 해석법에 도입하였다. 이 방법을 통해 정확한 수학적 근거 없이 경험에 의존하여 전체 유한 요소 해석 모델의 *h* 나 *p* 를 증가시키는 기존의 해석 방법 대신에, 수학적으로 검증된 필요한 특정 부위에 대해

* 건국대학교 기계공학부 기계설계학과 교수

** 경희대학교 기계공학과

*** 경희대학교 기계공학과 교수

Tel. 02-450-3449

Email goodant@konkuk.ac.kr

응용 수학을 바탕으로 한 전산 역학에 대한 연구를 하고 있고, 상용 유한요소 해석 프로그램인 NASTRAN 과 다물체동역학 프로그램인 RecurDyn 개발에 참여하고 있다

서만 h 와 p 를 적절히 조합하여 증가시킴으로써 정밀한 해를 최소의 비용(유한 요소 모델링 시간, 컴퓨터 용량 등)으로 구할 수 있게 되었다. 그러므로 이 기법을 정밀 부품에서 정확한 해를 요구하는 부위에 대한 유한 요소 해석 모델에 대해 효과적으로 적용할 수 있다.

2. 수학적 기본 지식

2.1 hp 적응 유한 요소 해석법

hp 적응 유한 요소 해석법은 유한 요소 모델링에서 발생하는 해의 오차를 줄이기 위해서 요소의 수를 증가시키는 h 방법 유한 요소 해석법과 유한 요소 보간 함수(shape function)의 차수(order)를 증가시키는 p 방법 유한 요소 해석법을 조합한 방법이다. 오차가 큰 특정 부위를 미리 예측한 후에, h 와 p 를 적절히 조합하여 유한 요소 모델링을 재구성하기 위해서는 후오차예측 (a posteriori error estimation)계산이 필수적이다. Fig.1 (a)는 일반적인 유한 요소 모델의 격자(mesh)를 나타내고 Fig.1 (b)는 hp 적응 요소 mesh 의 예를 나타낸다. 그림에서 보는 것처럼 hp 적응 요소 격자는 특정 부위에 요소를 더욱 세분화였고 동시에 보간함수의 차수를 증가하였다.

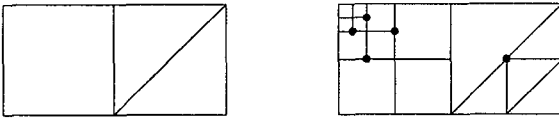


Fig.1 Example of hp -adaptive mesh: (a) original or initial mesh, (b) hp -adaptive mesh

2.1.1 Element Implicit Residual Method 를 이용한 유한 요소 근사화

일반적인 경계치 문제(boundary value problem)는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\begin{cases} \text{Find } u(X), X \in \Omega, \text{ such that} \\ -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = u_0 & \text{on } \Gamma_u \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{on } \Gamma_g \end{cases} \quad (1)$$

여기에서 Ω 는 해석영역이고, Γ 는 변위경계조건 영역 Γ_u 와 응력 경계조건 영역 Γ_g 로 나누어진다. 식 (1)의 경계치 문제를 변분법(variational method)을 통해 기술하면 다음과 같이 표현 된다.

$$\begin{cases} \text{Find } u \in u_0 + V, \text{ such that :} \\ b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (2)$$

여기서 $b(u, v)$ 및 $l(v)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \quad (3)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_g} g v \quad (4)$$

연속체 공간에서 표현된 식(2)를 초기 유한요소 격자인 성긴(coarse) 격자를 하여 유한차원 공간(finite dimensional space) V_H ($V_H \subset V$) 에서 표현하면 다음과 같이 기술된다.

$$\begin{cases} \text{Find } u_H \in u_0 + V_H, \text{ such that} \\ b(u_H, v_H) = l(v_H), \quad \forall v_H \in V_H \end{cases} \quad (5)$$

초기 유한요소 모델링이 이루어진 공간 $V_H \in V$ 이용하여, 식 (5)에서 해당하는 성긴 격자에 대한 유한 요소 해 u_H 를 구한다. 초기 유한요소 모델링 후에 h 나 방법을 이용하여 더욱 세분화된 유한요소 모델링을 정밀 격자(fine mesh) 공간 V_h 에서 수행한다. V_h 공간에서는 보다 더 정확한 해 u_h 를 구할 수 있다. 이를 통해 정밀 격자 잔차(residual)를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\sup_{v_h \neq 0} \frac{|b(u_H, v_h) - l(v_h)|}{\|v_h\|_E} \quad (6)$$

여기에서 에너지 놈(norm) 은 다음과 같이 정의된다.

$$\|u\|_E^2 = a(u, u) \quad (7)$$

먼저, 전체 잔차(Global residual)를 요소 잔차

(element residual)로 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$r(u_H, v_h) := b(v_H, v_h) - l(v_h) \\ = \sum_K \{b_K(u_H, v_h) - l_K(v_h) - \lambda_K(v_h)\} \quad (8)$$

여기에서 $\lambda_K(v_h)$ 는 각 요소에 대한 플럭스 함수(flux functional)이다.

앞으로 이룬 전개에 앞서, 여기에서 다음과 같은 두 가지를 가정한다.

- 유한 잔차는 성긴 격자(coarse mesh)에 대해서 평형(equilibrium)이다.

$$r_K(u_H, v_H) := b_K(u_H, v_H) - l_K(v_H) - \lambda_K(v_H) = 0 \quad \forall v_H \in V_H(K) \quad (9)$$

- 일관성 (consistency)을 유지한다.

$$\sum_K \lambda_K(v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (10)$$

여기에서 $V_H(K)$ 는 요소 K 의 보간 함수의 공간(space)를 나타낸다.

본 논문에서는 다음과 같은 국부 요소(local element)에 대한 Neumann 문제를 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{Find } \phi_{h,K} \in V_h(K) \\ a_K(\phi_h, K, \psi_h) = r_K(u_H, \psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h(K), \quad (11)$$

식 (11)과 요소 오차 지시함수(element error indicator function) $\phi_{h,K}$ 을 이용하여 정밀격자에 대한 잔차를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$|r(u_H, v_h)| = \left| \sum_K a_K(\phi_{h,K}, v_h) \right| \\ \leq \left(\sum_K \|\phi_{h,K}\|_K^2 \right)^{1/2} \|v_h\|_E \quad (12)$$

식(12)를 이용하여 최종적인 정밀격자의 잔차를 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\|r\|_{V_h} \leq \left(\sum_K \|\phi_{h,K}\|_K^2 \right)^{1/2} \quad (13)$$

2.1.2 플럭스(Flux) 결정을 통한 후오차 측정

유한 요소의 플럭스(flux)를 구하여 오차를 측정하기 위하여 Fig.2 와 같이 유한요소 패치(patch)를 정의하고 Fig.3 에서 보여진 플럭스를 계산하였다. 이를 위해서 유한요소들로 이루어진 패치에 대해서 평형 방정식을 적용하여, 이를 만족시키는 응력을 계산하는 접근 방법을 이용하였다⁹

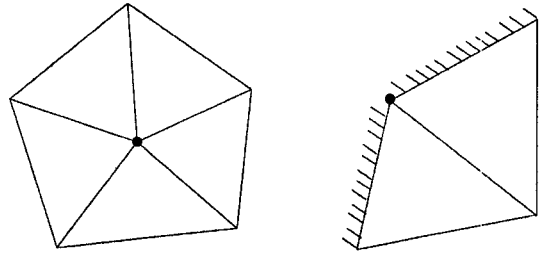


Fig.2 Interior node and node-boundary part patches

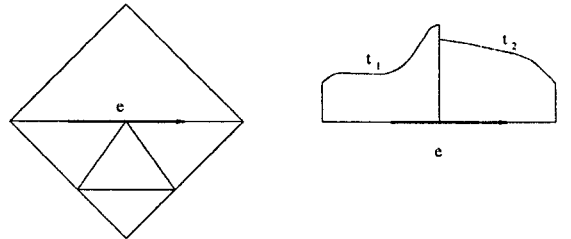


Fig.3 Flux function t for an edge with small neighbors

먼저 전체 잔차를 국부적인 유한요소에 대한 잔차로 다음과 같이 나누었다.

$$\gamma(u_H, v) = b(u_H, v) - l(v) \\ = \int_{\Omega} \nabla u_H \nabla v - \left(\int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma} g v \right) \\ = \sum_K \left\{ \int_K \nabla u_H \nabla v - \left(\int_K f v + \int_{\partial K \cap \Gamma} g v \right) \right\} \\ = \sum_K \left\{ \int_K (-\Delta u_H - f) v + \int_{\partial K \cap \Gamma} \left(\frac{\partial u_H}{\partial n} - g \right) v + \int_{\partial K - \Gamma} \frac{\partial u_H}{\partial n} v \right\} \quad (14)$$

보다 정확한 후오차 측정을 위해서, 유한요소에 대한 플럭스는 격자가 정밀해질수록 잔차가 감소하는 개념을 도입하였다. 이 경우에는 아래와 같

이 유한 요소의 플럭스가 실제 플럭스와 유사하게 된다.

$$\begin{aligned} \lambda_K(v) &= \sum_e \int_e t_{S_{K,e}} v \\ &\approx \sum_e \int_e \frac{\partial u}{\partial n} v \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)는 유한요소의 경계 e 에 대한 플럭스를 모두 합한 것이고, $S_{K,e}$ 는 아래와 같이 방향에 따라 정해지는 값이다. 또 $n = n_K$ 는 유한요소 K의 경계인 ∂K 의 방향벡터이다.

$$S_{K,e} = \begin{cases} 1 & \text{if } n, \tau \text{ form a right couple} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

여기에서 τ 는 접선벡터이다. 그러므로, 개별 요소들에 대한 잔차는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r_K(u_H, v) &= \int_K (-\Delta u_H - f)v + \int_{\partial K \cap \Gamma_f} \left(\frac{\partial u_H}{\partial n} - g \right) v + \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n} - t_{S_{K,e}} \right) v \right] \\ &= \int_K \nabla u_H \nabla v - \left(\int_K f v + \int_{\partial K \cap \Gamma_f} g v \right) - \sum_{e \in \partial K \cap \Gamma_t} \int_e t_{S_{K,e}} v \end{aligned} \quad (17)$$

결론적으로, 개별 요소에 대한 플럭스를 구하기 위한 패치에 대한 국소 문제를 아래와 같이 정의하고 풀 수 있다.

$$\begin{cases} \text{Find } \phi \in H^1(K), \phi = 0 \text{ on } \partial K \cap \Gamma_u, \\ \int_K \nabla \phi \nabla v = r_K(u_H, v) \quad \forall v \in H^1(K), v = 0 \text{ on } \partial K \cap \Gamma_u. \end{cases} \quad (18)$$

2.1.3 hp 적응 유한 요소법 적용 절차

Fig.4 는 hp 적응 유한 요소 해석법 적용의 전체적인 흐름을 보여준다. 먼저 성긴 격자(coarse mesh)를 형성하고 이에 대한 유한 요소 해를 구한다. 다음 단계는 h 나 p 를 이용하여 성긴 격자를 정밀격자로 만드는 과정이다. 본 논문에서는 먼저 h 방법을 이용하여 후오차가 큰 부분의 격자를 세분화 하였다. 일단 h 방법에 의해 세분화된 격자에 대해서만 문제를 국부적으로 풀고서, 해의 수렴속도가 최적일 경우 h 방법에 의해 세분화된 격자를 p 방법 격자로 대체하였다.

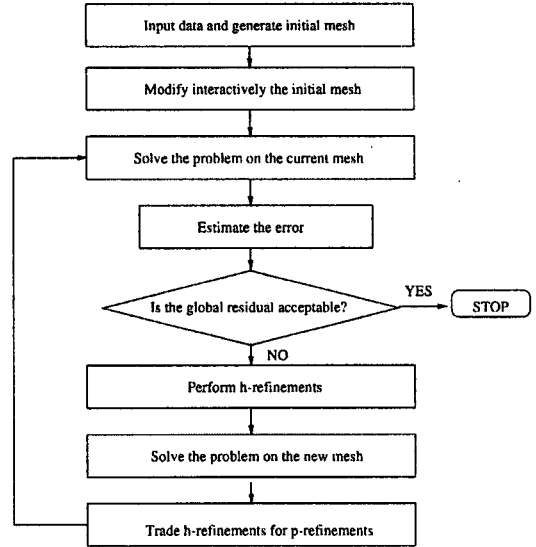


Fig.4 Flow of analysis with hp adaptive finite element method

3. 수치 해석 결과

본 논문에서 제안된 hp 적응 유한 요소 해석 방법을 정밀 부품 해석에서 자주 요구되는 경우들에 대해서 적용하여 보았다. 첫 번째 사례는 파동(wave) 해석에 대한 적용 예를 보여준다. 두 번째 사례는 정밀부품 설계에서 많이 접하게 되는 L형상의 단면에 대한 해석 예이다.

3.1 파동 진행 해석

Fig.5 는 특정 시간 t 에 대한 파동을 나타낸다. 정밀 부품에는 전자기파, 음향 등에서 발생하는 파동에 대한 정확한 해석이 매우 중요하다. 일반적인 유한 요소 해석 모델링 기법인 경우 동일한 크기의 격자를 이용하여 해를 구한다. 이 방법을 이용할 경우, 가운데 부분에서는 부정확한 해를 구하게 된다. 일반적으로 해에 대한 사전 정보가 있을 경우에는 특정 부위에 대해 정밀 격자를 사용하여 해를 정확도를 높일 수 있다. 그러나 일반적으로 해에 대한 정보를 미리 구하기가 어렵다.

본 예제에 대해 hp 적응 유한 요소 해석법을 적용하기 위해서, 먼저 성긴(coarse)격자를 구성하고 해석을 수행하였다. 성긴 격자는 2 개의 선형

요소로 시작하였다. 성긴 격자의 해를 이용하여 후오차 해석을 수행한 결과, 가운데 부분에서 후오차가 가장자리 부위보다 큰 것을 알 수 있었다. 후오차 해석 결과를 토대로, 가운데 영역에 대해 h 방법을 이용하여 격자를 세분화 하고, 추후에 p 방법을 이용하여 요소의 차수를 증가시켰다. 결과적으로 Fig.5 에서 보는 바와 같이, 가운데 부위에서는 $p=4$ 차수인 보간 함수를 사용하고, 가장자리 영역은 선형 함수인 $p=1$ 인 차수 보간 함수를 이용하는 최종 격자를 구성 하였다.

본 예제의 정확해(exact solution)는 $u_{exact} = \arctan 60 * (x - 50)$ 이다. hp 적응 유한요소 해석에서 h 나 p 를 변화시킴에 따라 증가하는 자유도의 수에 따라서 정확해에 근접해가는 해의 수렴 속도를 Fig.6 에서 보여준다. Fig.6 을 통해서, 해가 exponential rate 으로 수렴함을 알 수 있었고, 이를 통해 hp 적응격자 구성이 최적의 격자 구성임을 증명할 수 있다.

3.2 L 형상에 대한 응력 해석

많은 정밀 기계들은 L 형상이나 T 형상의 정밀 부품들을 사용하고 있다. 이러한 형상들에 대한 코너(corner)부위의 해는 수학적으로 singular 한 것으로 알려져 있다. 그래서 코너 부위에 대한 해를 구할 때 매우 정밀한 격자를 사용하는 것이 통상적인 유한 요소 모델링 방법이다. Fig.6 은 hp 적응 유한요소 해석법을 이용한 결과를 보여준다. 먼저 성긴 격자를 선형($p=1$)인 4 개의 삼각형 유한 요소, 1 개의 사각 유한 요소 해석을 이용하여 구성하고, 이에 대한 해를 구하였다. 앞 예제와 동일한 방법으로 후오차 예측을 통해 정밀 격자가 필요한 부위를 인지 한 후에, h 나 p 방법을 통해 필요한 부위에 대해서만 정밀 격자를 구성하였다. Fig.6 에서 보여진 바와 같이, 새로이 구성된 정밀격자는 $p=2$ 와 3 인 요소로 구성되었고, 동시에 코너부위에 격자가 세분화 되었다. 본 연구의 방법은 수학적 근거하에서 구성된 최적의 격자 구성으로, 해의 수렴성 측면에서도 최적이다.

4. 결론

본 연구에서 제시된 hp 적응 유한요소 해석법을 정밀 부품에 설계에 많이 요구되는 파동 해석과 L 형상의 코너문제 해석에 적용하였다. 일반적

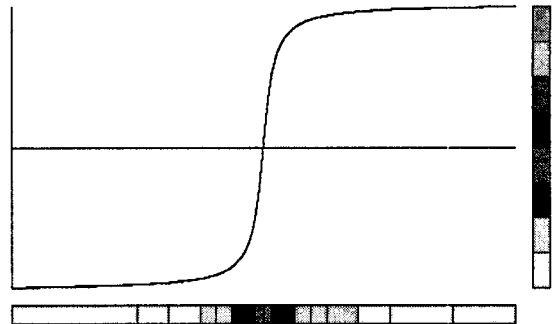


Fig.5 Example 1: A solution with an internal layer : $u_{exact} = \arctan 60 * (x - 50)$ (initial mesh: 2 elements with $p=1$, hp mesh: 17 elements with $p=4$)

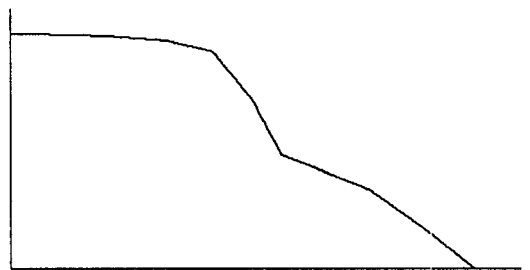
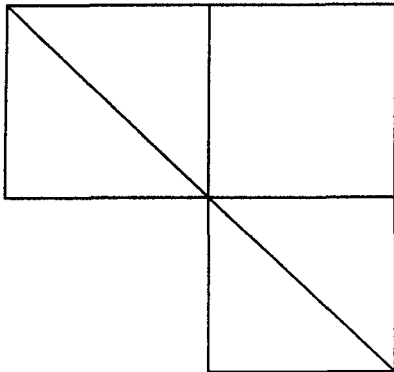


Fig.6 Example 1 : convergence rates on the log-log scale (error in energy norm in y axis vs. the number of degrees of freedom in x-axis

으로 경험에 의해 의존하는 유한 요소 격자 구성을, 후오차 예측을 통한 수리적인 방식으로 접근하여 후오차가 높은 부위에 정밀 격자를 구성하였다. 격자를 세분화하는 h 방법과 차수를 높이는 p 방법을 혼합하여, 초기의 성긴 격자를 최적의 수렴 속도를 지니는 정밀 격자로 구성 할 수 있었다. 또 최종 정밀 격자에 대한 해의 수렴 속도가 exponential rate 임을 보였다. 이를 통해 hp 적응 유한 요소 해석법이 최적의 유한 요소 정밀 격자를 구성하고, 동시에 빠른 수렴속도를 지님을 알 수 있었다. 이러한 특징을 지닌 hp 적응 유한 요소 해석법을 통해 정확한 해를 빨리 효율적으로 구하고, 이를 정밀기계 부품의 설계에 반영할 수 있다.



(a) initial mesh



(b) hp adaptive mesh

Fig.7 Example 2: L shape domain with hp adaptive mesh

참고문헌

1. Demkowicz, L. and Kim, C. W., "1D hp Adaptive Finite Element Package. Fortran 90 Implementation," TICAM Report 99-38, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, 1999.
2. Guo, B. and Babuska, I., "The h - p version of the Finite Element Method, Parts 1 and 2," Computational Mechanics, Vol. 1, pp.21-41, 203-330, 1986.
3. Demkowicz, L., Oden, J. T. and Strouboulis, T., "Adaptive Finite Elements for Flow Problems with Moving Boundaries. Part I: Variational Principles

- and A Posteriori Estimates," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.46, pp.217-251, 1984.
4. Kelly, D., "The Self Equilibration of Residuals and Complementary a posteriori error Estimates in the Finite Element Method," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp.1491-1506, 1984.
5. Ainsworth, M. and Oden, J. T., "A Procedure for a posteriori error estimation for h - p finite element methods," Computer Methods in Applied mechanics and Engineering, Vol.101, pp.73-96, 1992.
6. Ainsworth, M., Oden, J. T. and Wu, W., "A Posteriori Error Estimation for hp -Approximations in Elastostatics," Applied Numer. Math. Vol. 14, pp.23-54, 1994.
7. Babuska, I. and Guo, B. Q., "Approximation Properties of hp Version of the Finite Element Methods," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.133, pp.319-346, 1996
8. Ainsworth, M., Demkowicz, L. and Kim, C. W., "Analysis of the Equilibrated Residual Method for A poster Error Estimation on Meshes with Hanging Nodes," TICAM Report 03-46, The University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, 1999.
9. Ladeveze, P. and Maunder, E. A. W., "A General Method for Recovering Equilibrating Element Traction," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 137, pp.111-151, 1996.