

# 급수 함수를 이용한 임의 형상 고정단 평판의 자유 진동 해석

## Free Vibration Analysis of Clamped Plates with Arbitrary Shapes Using Series Functions

강 상 욱†

Sang Wook Kang

(2007년 4월 3일 접수 ; 2007년 5월 4일 심사완료)

Key Words : Series Function(급수 함수), Clamped Plate(고정단 평판), Free Vibration(자유 진동), Arbitrarily Shaped Polygonal Plate(임의 다각형 형상 평판), Eigenvalue(고유치), Clamped Boundary Condition(고정단 경계 조건)

### ABSTRACT

A new method for free vibration analysis using series functions is proposed to obtain the eigenvalues of arbitrarily shaped, polygonal plates with clamped edges. Since a general solution used in the method satisfies the equation of motion for the transverse vibration of a plate, the method offers very accurate eigenvalues, compared to FEM or BEM results. In addition, the method can minimize the amount of numerical calculation because it has the advantage of not needing to divide the plate of interest. Two case studies show that the proposed method is valid and accurate when the eigenvalues by the proposed method are compared to those by FEM (NASTRAN) or another analytical method.

### 1. 서 론

이 논문에서는 임의 형상 평판의 고유치를 보다 정확하게 구해주며, 동시에 수치 계산량을 최소화할 수 있는 새로운 자유 진동 해석 기법에 대한 연구가 수행되었다. 이 연구와 관련된 기존의 연구들을 살펴보면, 주로 원형, 타원형, 직사각형, 삼각형, 평행사변형, 마름모 등의 특정 형상을 가진 평판에 대한 이론 연구들은 많이 진행/발표되었으나<sup>(1~6)</sup>, 임의 형상을 가진 평판의 자유진동해석에 관한 이론 연구들은 거의 찾아 볼 수 없다. 임의 형상을 가진 평판의 경우, 주로 유한요소법(FEM)이나 경계요소법(BEM)과 같은 수치해석적방법을 이용하여 보다 정확한 임의 형상 평판의 고유치를 구하기 위한 연구들이 많

이 진행되었다<sup>(7~9)</sup>.

유한요소법과 경계요소법은 엄밀해가 존재치 않는 임의 형상 평판의 고유치를 계산하기 위해 가장 일반적으로 이용되고 있는 수치해석기법으로, 해석 대상물의 전체 영역 또는 경계 영역을 여러 개의 요소(element)로 분할한 후 노드(node)와 노드 사이의 변위를 보간 함수(interpolation function)로 근사화시키는 방법을 이용한다. 그러나 이들 보간 함수들이 해석 대상 평판의 운동 지배 방정식을 만족하지 않는 단점으로 인해, 유한요소법과 경계요소법은 해의 정밀도 확보에 있어서 한계를 가지며 많은 수치 계산량을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

이 논문의 저자는 상기와 같이 보간 함수에 의해 비롯되는 유한요소법과 경계요소법의 정밀도 한계 및 수치 계산량 증가 문제를 극복하기 위해, 무차원 동영향 함수법(NDIF법, non-dimensional dynamic influence function method)을 처음으로 소개하였으

† 교신저자 : 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr  
Tel : (02) 760-4228, Fax : (02) 760-4329

며<sup>(10)</sup>, 현재 다양한 경계조건을 가진 균일 및 비균일 평판 및 멤브레인의 자유진동해석기법을 완료하는 단계까지 이르렀다<sup>(11~15)</sup>. NDIF법의 가장 큰 특징은 경계요소법과 마찬가지로 해석 대상물체의 경계만을 이산화하나, 노드와 노드사이에는 어떠한 보간 함수도 사용하지 않는 것이다. 이러한 특징으로 인해 NDIF법은 유한요소법 및 경계요소법에 비해 보다 정밀한 해를 제공할 뿐 아니라 적은 수치 계산량을 필요로 하는 장점을 가지고 있다.

그러나 NDIF법에서 고차(higher order) 고유치를 추출하기 위해 노드의 개수를 증가시킬 경우, 노드와 노드 사이가 너무 근접하게 되어서, 각각의 노드에 대해 독립적으로 정의되는 기저 함수(base function)들 간의 독립성이 떨어지게 된다. 결과적으로는 시스템 행렬이 관심 고주파수 영역에서 특이 특성(singular characteristics)을 가지게 되어서 수렴된 해를 제공 못하는 문제점이 NDIF법에서는 발생하게 된다<sup>(10~11)</sup>.

이상에서 살펴본 바와 같이 유한요소법, 경계요소법, NDIF법은 해석 대상 물체의 전체 또는 경계를 여러 개의 노드들로 이산화하기 위한 전처리 과정을 반드시 필요로 한다는 공통점이자 단점을 가지고 있다. 설사 해석 대상 물체의 형상이 단지 네 개의 꼭지점 좌표에 의해 정의될 수 있는 직사각형의 단순한 형상이라 할지라도 이산화 과정을 반드시 거쳐서 많은 노드를 생성시켜야 하는 비효율성을 가지고 있다.

논문에서는 상술한 유한요소법, 경계요소법, NDIF법의 장점을 계승하고 단점을 극복할 수 있는 새로운 해석 기법으로, 소위 ‘해석 대상 영역을 분할할 필요가 없는 시리즈 함수를 이용한 자유진동해석 기법’에 대한 개발이 이루어졌다.

한편, 해석 대상이 평판이 아니라 임의의 형상 멤브레인 또는 2차원 음향 공동인 경우에 이들의 고유치를 구하기 위한 연구들은 이미 발표되었다<sup>(16, 17)</sup>, 이 연구에서는 이들 연구결과들을 평판으로 확장하기 위하여, 평판의 자유진동해를 가정하기 위한 기저함수를 찾는 데에 이 연구의 역량을 집중하였다.

## 2. 이론 정식화

### 2.1 자유 진동해 가정과 고정단 경계조건

고정단 경계를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배

방정식과 고정단 경계조건은 다음과 같이 주어진다<sup>(18)</sup>.

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0, \quad \Lambda = (\rho\omega^2 / D_E)^{1/4} \quad (1, 2)$$

$$W(\Gamma) = 0, \quad \partial W(\Gamma) / \partial n = 0 \quad (3, 4)$$

여기서  $W$ 는 평판의 진동변위,  $\Lambda$ 는 주파수 파라미터 (frequency parameter),  $\rho$ 는 평판의 밀도,  $\omega$ 는 각 주파수(angular frequency),  $D_E$ 는 판강성(flexural rigidity of plate),  $W(\Gamma)$ 와  $\partial W(\Gamma) / \partial n$ 은 각각 평판의 경계  $\Gamma$ 에서의 평판 변위와 기울기를 뜻한다.

### 2.2 자유 진동해 가정

Fig. 1 또는 Fig. 2와 같이 무한 평판 위에  $N_e$  개의 모서리를 가진 해석 대상 다각형 평판이 놓여있다고 가정한다. 그리고 해석 대상 평판의 모서리들  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{N_e}$ 에서 식 (5)와 같은 시리즈 함수들의 중첩으로 표현되는 파동이 발생하여 평판의 내부로 전파되어 간다고 가정한다. 참고로 파동의 진동방향은 지면에 수직 방향이다.

$$W^{(i)}(x_i, y_i) = \sum_{m=1}^{N_h} [A_m^{(i)} \sin \frac{m\pi x_i}{L_i} \exp(j\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} y_i) + B_m^{(i)} \sin \frac{m\pi x_i}{L_i} \exp(\sqrt{\omega^2 + (\frac{m\pi}{L_i})^2} y_i)] \quad (5)$$

$i = 1, 2, \dots, N_e$

여기서  $A_m^{(i)}$ 과  $B_m^{(i)}$ 은 파동의 진폭과 관련된 미지계수,  $x_i$ 와  $y_i$ 는  $i$ 번째 모서리  $\Gamma_i$ 에 정의된 지역좌표계 좌표를 의미한다. 그리고  $L_i$ 는 모서리  $\Gamma_i$ 의 길이,  $\omega$ 는 각진동수,  $j$ 는 순허수,  $N_h$ 는 파동을 표현하기 위해 사용된 시리즈함수의 개수를 의미한다. 참고로 식 (5)는 지배방정식 식 (1)을 만족한다.

한편, 무한 평판 위에 놓인 다각형 평판의 내부 점  $P$ 에서의 진동 변위는 모서리에서 발생한 파동들이 점  $P$ 에 도달했을 때의 변위들의 중첩으로 가정한다. 그러면 점  $P$ 에서의 진동 변위는 식 (6)과 같이 표현될 것이다.

$$W_{total}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_e} W^{(i)}(x_i, y_i) \quad (6)$$

여기서  $x$ 와  $y$ 는 광역좌표계(globalcoordinates)에 대한 평판 내부점  $P$ 의 좌표를 나타낸다. 이 논문에서는 식 (6)을 해석대상 다각형평판의 자유진동해로 가정한다. 가정된 자유진동해 식 (6) 또한 지배방정식 식 (1)을 만족한다. 왜냐하면 식 (6)은 지배방정식을 만족하는 식 (5)의 선형결합이기 때문이다.

### 2.3 경계 변위와 기울기 가정

해석 대상 다각형 평판은 고정단 경계조건을 가지고 있기 때문에, 경계에서의 변위와 기울기는 식 (3)과 식 (4)와 같이 영(zero)이다. 그러나 이 논문에서는 잠정적으로 평판 경계(모서리)에서의 변위와 기

울기는 식 (7), (8)과 같이 시리즈 함수의 중첩으로 각각 가정한다.

$$U^{(r)}(x_r) = \sum_{n=1}^{N_h} C_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r}, \quad r = 1, 2, \dots, Ne \quad (7)$$

$$V^{(r)}(x_r) = \sum_{n=1}^{N_h} D_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r}, \quad r = 1, 2, \dots, Ne \quad (8)$$

### 2.4 지역 좌표계 관계식 적용

앞에서 가정한 다각형 평판의 자유진동해 식 (6)은 지배방정식을 만족한다. 그래서 식 (6)이 자유진동해가 되기 위해서는 잠정적으로 가정한 경계조건 식 (7)과 식 (8)을 만족하기만 하면 된다. 이를 위해 식 (7)과 (8)을 식 (6)에 적용하면 다음과 같은 식을 각각 얻을 수 있다 참고로 아래 식에서  $r$ 번째 모서리의 지역좌표는  $y_r = 0$ 에 해당한다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} W^{(i)}(x_i, y_i) |_{y_r=0} = U^{(r)}(x_r), \quad r = 1, 2, \dots, Ne \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial}{\partial y_r} W^{(i)}(x_i, y_i) |_{y_r=0} = V^{(r)}(x_r), \quad (10)$$

$$r = 1, 2, \dots, Ne$$

여기서  $\partial/\partial y_r$ 는 모서리의 법선방향으로의 편미분을 의미한다. 다음으로 식 (9)와 식 (10)에 사용된 두 개의 지역좌표계  $(x_i, y_i)$ 와  $(x_r, y_r)$ 을 하나 통일시키기 위해, 두 지역 좌표계 사이의 좌표 관계를 다음과 같이 가정한다.

$$x_i = ax_r + by_r + e \equiv f_{ir}(x_r, y_r) \quad (11)$$

$$y_i = cx_r + dy_r + h \equiv g_{ir}(x_r, y_r) \quad (12)$$

여기서  $a, b, c, d, e, h$ 는 상수이다. 가정된 좌표 관계식을 식 (9)와 식 (10)에 대입하면 다음과 같은 식이 각각 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} W^{(i)}(f_{ir}(x_r, y_r = 0), g_{ir}(x_r, y_r = 0)) = U^{(r)}(x_r), \quad r = 1, 2, \dots, Ne \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^{Ne} \frac{\partial}{\partial y_r} W^{(i)}(f_{ir}(x_r, y_r = 0), g_{ir}(x_r, y_r = 0)) = V^{(r)}(x_r), \quad r = 1, 2, \dots, Ne \quad (14)$$

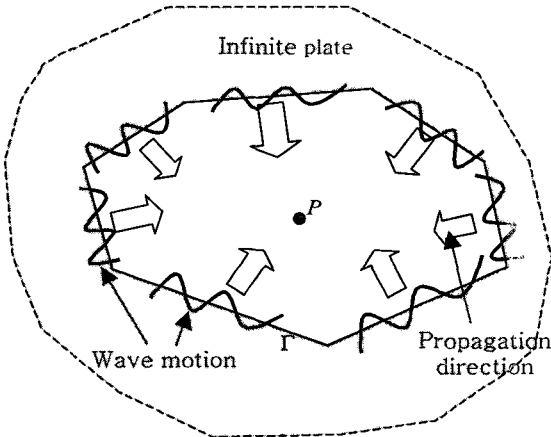


Fig. 1 Polygonal plate located on an infinite plate

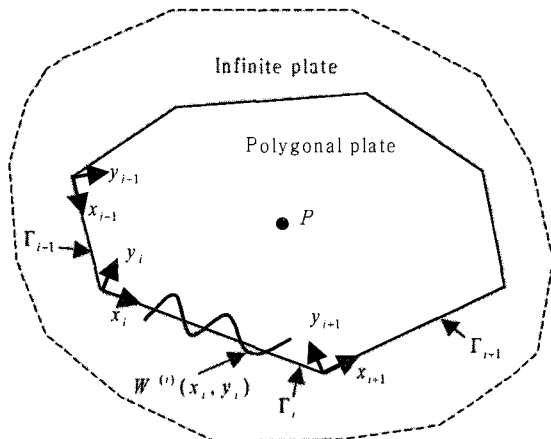


Fig. 2 Local coordinates  $(x_i, y_i)$  and wave motion  $W^{(i)}$  at boundary  $\Gamma_i$

2.5 직교 조건과 시스템 행렬

(1) 경계 변위에 직교 조건 적용

식 (13)에 식 (5)와 식 (7)을 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nh} [A_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(j\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)) + B_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(\sqrt{\omega^2 + (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0))] \times \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r = \sum_{n=1}^{Nh} C_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r} \quad (15)$$

$r = 1, 2, \dots, Ne$

사인 시리즈 함수들의 직교성을 이용하기 위하여 식 (15)의 양변에  $\sin q\pi x_r / L_r$ 을 곱한 후 0에서  $L_r$ 까지 적분하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nh} \int_0^{L_r} [A_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(j\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)) + B_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(\sqrt{\omega^2 + (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0))] \times \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r = \sum_{n=1}^{Nh} \int_0^{L_r} C_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r} \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx \quad (16)$$

$r = 1, 2, \dots, Ne; q = 1, 2, \dots, Nh$

사인시리즈 함수들 간의 직교성을 식 (16)의 우변 항에서 고려하면 식 (16)은 다음과 같이 간단히 된다.

$$\sum_{n=1}^{Nh} \int_0^{L_r} C_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r} \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx = \frac{L_r}{2} C_q^{(r)} \quad (17)$$

식 (17)의 결과를 식 (16)에 대입한 후 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nh} \frac{2}{L_r} \int_0^{L_r} [A_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(j\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)) + B_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(\sqrt{\omega^2 + (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0))] \times \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r = C_q^{(r)} \quad (18)$$

$r = 1, 2, \dots, Ne; q = 1, 2, \dots, Nh$

식 (18)을 간단한 형식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{Nh} A_m^{(i)} SM_{(q,m)}^{(i,r)} + B_m^{(i)} HM_{(q,m)}^{(i,r)} = C_q^{(r)} \quad (19)$$

$r = 1, 2, \dots, Ne; q = 1, 2, \dots, Nh$

여기서  $SM_{(q,m)}^{(i,r)}$ 와  $HM_{(q,m)}^{(i,r)}$ 은 다음과 같다.

$$SM_{(q,m)}^{(i,r)} = \frac{2}{L_r} \int_0^{L_r} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(j\sqrt{\omega^2 - (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)) \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r \quad (20)$$

$$HM_{(q,m)}^{(i,r)} = \frac{2}{L_r} \int_0^{L_r} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \exp(\sqrt{\omega^2 + (\frac{m\pi}{L_i})^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)) \sin \frac{q\pi x_r}{L_r} dx_r \quad (21)$$

마지막으로 식 (19)를 시스템 행렬식의 형태로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{C} = \mathbf{KM} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{HM} \cdot \mathbf{B} \quad (22)$$

여기서 시스템 행렬  $\mathbf{KM}$ ,  $\mathbf{HM}$ 와 미지계수벡터,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{KM} = \begin{bmatrix} \mathbf{KM}^{(1,1)} & \mathbf{KM}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{KM}^{(1,Ne)} \\ \mathbf{KM}^{(2,1)} & \mathbf{KM}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{KM}^{(2,Ne)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{KM}^{(Ne,1)} & \mathbf{KM}^{(Ne,2)} & \dots & \mathbf{KM}^{(Ne,Ne)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{HM} = \begin{bmatrix} \mathbf{HM}^{(1,1)} & \mathbf{HM}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{HM}^{(1,Ne)} \\ \mathbf{HM}^{(2,1)} & \mathbf{HM}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{HM}^{(2,Ne)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{HM}^{(Ne,1)} & \mathbf{HM}^{(Ne,2)} & \dots & \mathbf{HM}^{(Ne,Ne)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{C}^{(1)}, \mathbf{C}^{(2)}, \dots, \mathbf{C}^{(Ne)}\}^T, \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}^{(1)}, \mathbf{A}^{(2)}, \dots, \mathbf{A}^{(Ne)}\}^T, \quad (26)$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}, \dots, \mathbf{B}^{(Ne)}\}^T. \quad (27)$$

그리고 식 (25~27)을 구성하고 있는 서브 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{C}^{(r)} = \{C_1^{(r)}, C_2^{(r)}, \dots, C_{N_h}^{(r)}\}^T, \quad (28)$$

$$\mathbf{A}^{(r)} = \{A_1^{(r)}, A_2^{(r)}, \dots, A_{N_h}^{(r)}\}^T, \quad (29)$$

$$\mathbf{B}^{(r)} = \{B_1^{(r)}, B_2^{(r)}, \dots, B_{N_h}^{(r)}\}^T. \quad (30)$$

(2) 경계 기울기에 직교 조건 적용

식 (14)에 식 (5)와 식 (8)을 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{Ne} \sum_{m=1}^{N_h} \frac{\partial}{\partial y_r} \left[ A_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \right. \\ & \left. \exp\left(j\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i}\right)^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)\right) + \right. \\ & \left. B_m^{(i)} \sin \frac{m\pi f_{ir}(x_r, y_r = 0)}{L_i} \times \right. \\ & \left. \exp\left(\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{m\pi}{L_i}\right)^2} g_{ir}(x_r, y_r = 0)\right) \right] \\ & = \sum_{n=1}^{N_h} D_n^{(r)} \sin \frac{n\pi x_r}{L_r} \\ & r = 1, 2, \dots, Ne \end{aligned} \quad (31)$$

사인시리즈 함수들의 직교성을 이용하기 위하여 식 (31)의 양변에  $\sin q\pi x_r / L_r$  을 곱한 후 0에서  $L_r$  까지 적분한다. 그리고 2.5장 (1)절과 같은 과정을 반복하면 다음과 같은 시스템 행렬식이 얻어진다.

$$\mathbf{D} = \mathbf{TM} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{JM} \cdot \mathbf{B} \quad (32)$$

(3) 고정단 경계 조건 적용

위에서 얻은 두 시스템 행렬식 식 (22)와 식 (32)를 하나의 행렬식으로 통합하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \mathbf{SM} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

여기서  $\mathbf{SM}$  은 최종시스템 행렬을 의미하며 다음과 같다.

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{KM} & \mathbf{HM} \\ \mathbf{TM} & \mathbf{JM} \end{bmatrix} \quad (34)$$

그런데, 해석 대상 평판은 고정단 경계조건을 가지고 있으므로, 잠정적으로 가정된 경계조건 식 (7)과 식 (8)은 영(zero)을 만족해야 한다. 이 조건을 만족하기 위해서는 미지 계수 벡터  $\mathbf{C}$ 와  $\mathbf{D}$ 는 영벡터가 되어야 하므로 식 (33)은 다음과 같이 고유치방정식이 된다.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \mathbf{SM} \begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} \quad (35)$$

마지막으로 평판의 고유치는 시스템 행렬식이 영(zero)이 되게 하는 주파수 파라미터 값으로부터 구해질 수 있다<sup>(10~11)</sup>.

$$\det(\mathbf{SM}(\Lambda)) = 0 \quad (36)$$

그런데, 식 (36)에 의해 구해진 고유치들 중에는 평판의 고유치 뿐만 아니라, 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유치까지도 포함되어 있음이 이 논문에서 밝혀졌다<sup>(12~14)</sup>. 이러한 멤브레인의 고유치를 잉여고유치(spurious eigenvalue)라 부르며, 잉여고유치를 제거하기 위한 연구가 현재 진행 중에 있다.

### 3. 비교 예제

이 논문에서 정립한 이론을 검증하기 위하여, 직사각형 평판과 임의 형상 삼각형 평판에 대한 고유치 해석을 수행하였다.

#### 3.1 직사각형 평판

Fig. 3은 이 논문에서 첫 번째 증명 예제로 사용

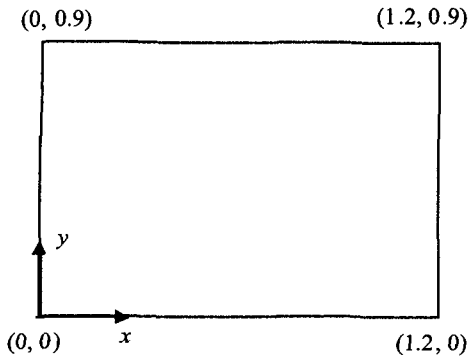


Fig. 3 Rectangular plate for a verification example (unit : m)

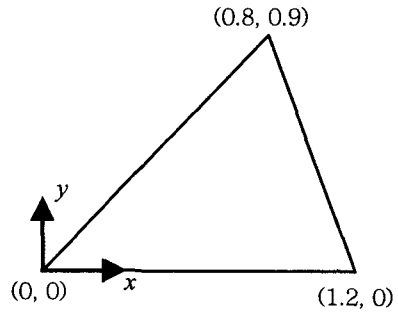


Fig. 4 Arbitrarily shaped triangular plate for a verification example (unit: m)

Table 1 Eigenvalues of the rectangular plate

No.	Proposed method (Nh=4)	FEM (1341 nodes)	Dickinson's method <sup>(3)</sup>
1	5.95	5.95	5.97
2	7.71	7.71	7.73
3	9.13	9.13	9.16
4	9.94	9.95	10.0
5	10.3	10.3	10.3
6	11.9	11.9	12.0

되어진 직사각형 평판의 형상을 보여준다. 이 예제에서는 이 논문에서 제안된 방법을 이용하여 고정단 경계조건을 가진 사각형 평판에 대하여 6개의 고유치가 구해졌다. 그 결과는 Table 1에 제시되어 있다. 앞에서 이미 언급한 바와 같이 제시된 고유치 속에는 평판의 고유치 뿐만 아니라 해석 대상 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유치도 포함되어 있으나, Table 1에서는 평판의 고유치들만 제시하였다.

Table 2에서는 FEM(NASTRAN)에 의한 고유치와 이 논문의 방법과는 다른 이론을 사용한 Dickinson<sup>(3)</sup>에 의해 구해진 고유치들도 제시하였다. Table 1에서 제시된 FEM결과는 충분한 노드수를 사용했기 때문에 수렴된 결과인 것으로 확인되었다.

이 논문의 방법에 의한 결과와 FEM 방법에 의한 결과를 비교해볼 때 오차가 거의 없음을 확인할 수 있다. 반면에 이 논문의 방법과는 다른 이론을 사용한 Dickinson<sup>(3)</sup>에 의한 결과는 FEM과 상대적으로 많은 오차를 가짐을 확인할 수 있다.

Table 2 Eigenvalues of the triangular plate

No.	Proposed method (Nh=6)	FEM (NASTRAN)		
		441 nodes	886 nodes	1389 nodes
1	9.08	9.01	9.05	9.06
2	12.18	12.06	12.13	12.16
3	12.85	12.79	12.80	12.84
4	15.15	15.00	15.04	15.14
5	16.21	15.83	16.10	16.18
6	16.59	16.45	16.47	16.54

### 3.2 임의의 형상 삼각형 평판

Fig. 4는 두 번째 증명 예제로 사용된 임의의 형상을 가진 삼각형 평판의 형상을 보여준다. 이 논문의 방법에 의해 구해진 6개의 고유치가 Table 2에 제시되었다. 노드의 수를 세 가지 경우로 나누어서 해석한 FEM(NASTRAN)에 의한 고유치 결과들도 Table 2에 제시되었다.

FEM에 의한 고유치 결과들을 살펴보면 노드의 수가 증가함에 따라 고유치 값도 커짐을 알 수 있다. 만약 엄밀해가 존재한다면 엄밀해는 제일 많은 노드를 사용한 FEM 결과 보다 조금 큰 값을 가질 것이라고 추정할 수 있을 것이다. 그런데, 이 논문에서 제안된 방법에 의해 구해진 고유치 결과들은 (노드를 제일 많이 사용한 경우인) 1389노드를 사용한 FEM 결과 보다 조금 큰 값을 가지고 있으므로, 본 논문에 의해 구해진 고유치들이 엄밀해에 가장 근접할 것이라고 말할 수 있을 것이며, 결과적으로 이 논문에 의한 방법은 아주 정확한 결과를 제공한다고도 결론 내릴 수 있을 것이다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는 시리즈 함수를 이용하여 고정단 경계를 가진 임의 형상 다각형 평판에 대한 새로운 자유진동해석기법을 제안하였다. 이 논문에서 제안하는 방법은 FEM이나 BEM과는 달리 해석 대상 영역을 분할할 필요가 없기 때문에, 영역 분할의 번거로움을 덜 수 있으며, 평판의 운동 방정식을 만족하는 시리즈 함수들을 일반해로 사용하기 때문에 정확한 해를 제공하는 장점을 가진다. 끝으로 이 논문의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 비교 예제 해석 결과를 제시하였다.

#### 후 기

이 논문은 2005년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임 (KRF-2005-041-D00050).

#### 참 고 문 헌

(1) Blevins, R. D., 1979, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", New York: Litton Educational Publishing.

(2) Conway, H. D. and Farnham, K. A., 1965, "The Free Flexural Vibration of Triangular, Rhombic and Parallelogram Plates and Some Analogies", International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 7, pp. 811~816.

(3) Dickinson, S. M., 1978, "The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular, Isotropic and Orthotropic Plates Using Rayleigh's Method", Journal of Sound and Vibration Vol. 61, pp. 1~8.

(4) McLachlan, N. W., 1947, "Vibrational Problems in Elliptical Coordinates", Quarterly Applied Mathematics, Vol. 5, pp. 289~297.

(5) Conway, H. D., 1961, "The Bending, Buckling, and Flexural Vibration of Simply Supported Polygonal Plates by Point-matching", American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied

Mechanics, Vol. 28, pp. 288~291.

(6) Singh, B. and Chakraverty, S. 1992, "Transverse Vibration of Simply Supported Elliptical and Circular Plates Using Boundary Characteristic Orthogonal Polynomials in Two Variables", Journal of Sound and Vibration, Vol. 152, No. 1, pp. 149~155.

(7) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis. New Jersey: Prentice-Hall.

(8) Mavriplis, D. J., 1990, "Accurate Multigrid Solution of the Euler Equations on Unstructured and Adaptive Meshes", AIAA Journal, Vol. 28, No. 2, pp. 213~221.

(9) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, New York: Springer-Verlag.

(10) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

(11) Kang, S. W. and Lee, J. M. 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(12) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9~26.

(13) Kang, S. W. 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(14) Kang, S. W., et. al., 2003, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates With Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions", Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.

(15) Kang, S. W., 2007, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free

Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners”, Transactions of the Korea Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(16) Kim, Y. Y. and Kang, J. H., 1996, “Free Vibration Analysis of Membranes Using Wave-Type Base Functions”, J. Acoust. Soc. Amer., Vol. 99, No. 5, pp. 2938~2946.

(17) Kim, Y. Y. and Kim, D. K., 1999, “Applications of Waveguide-Type Base Functions for the Eigenproblems of Two-dimensional Cavities”, J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 106, pp. 1704~1711.

(18) Meirovitch, L., 1967, Analytic Methods in Vibrations, New York: Macmillan Publishing, pp. 179~182.