대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 2, 163-177. May 2007

초등수학영재들이 페그퍼즐 과제에서 보여주는 대수적 일반화 과정 분석[1)]

송 상 헌* · 임 재 훈* · 정 영 옥* · 권 석 일** · 김 지 원*

이 연구는 일반화라는 대수적 사고 요소에 초점을 맞추어 대수적 상황으로 문제해결이 가능하도록 구성하여 제시한 특정 과제에서 초등수학영재들이 보여주는 대수적 일반화 사고 과정을 분석하는 것을 목적으로 한다. 초등수학영재들은 자신의 생각을 문자식으로 표현하고 문자 언어를 활용하여 답안을 표현하는 데 어려움을 겪지는 않았기에 표를 통한 수치의 귀납적인 규칙을 찾기보다 다이어그램이나 관계식을 사용한 포괄적인 예를 통해 보다 일반적인 구조를 파악하려는 경향을 가지고 있었다. 그러나 잘 구조화된 스키마를 가진 아동이라도 개인적 특성에 따라서는 자신이 일반화한 결과를 특수한 경우에 적용시켜봄으로써 자신의 결과를 검증하는 경향이 있음을 확인하였고, 이변수 일반화 과제의 경우는 비록 일반적 패턴을 추정할 수는 있을지라도 그것을 정당화하는 과정에서는 어려움을 겪고 있음도 확인하였다. 그리고 이를 바탕으로 한 수학영재교육에의 몇 가지 시사점을 논의하였다.

Ⅰ. 서 론

일반화는 수학의 심장이자 대수와 관련된 가장 중요한 활동으로 간주된다(Mason, 1996; Lee, 1996). 수학교육에서, 일반화에 관해서는 지금까지, 인식론적인 관점에서 수학 학습에 대한 일반화 모델을 제시한 연구(Dörfler, 1991), 일반화를 몇 가지 종류[2)]로 구분하여 인지적으로 의미 있는 일반화에 대하여 논의한 연구(Harel & Tall, 1991)를 비롯하여, 학생들이 패턴 일반화 과제 해결에서 사용하는 전략에 관한 연구, 패턴 일반화 활동에 초점을 맞춘 대수 도입 방안에 대한 연구, 패턴 중심 접근법의 교육적 효과를 알아보는 연구들(English, L. D. & Warren E. A. 1998; Friedlander & Hershkowitz, 1997; Lannin, 2003, 2005; Mason, 1996; Stacey, 1989; Stacey & MagGregor, 2001; Steelee & Johanning, 2004; Swafford & Langrall, 2000)이 이루어져 왔다. 그러나 일반화에 대한 연구에서, 수학적으로 뛰어난 아동들의 일반화 문제해결 과정에서 드러나는 사고특성을 분석한 연구는 찾아보기 힘들다.

Krutetskii(1976)의 연구 이후로 영재아동의 사고 특성은 영재 연구에서 주요한 관심의 대상이 되어 왔다. Sriraman(2004), Housman &

---

* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr, yochong@ginue.ac.kr, jhyim@ginue.ac.kr, babybear@paran.com
** 경인교육대학교 산학협력단 전임연구원, steinein@dreamwiz.com

1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

2) Harel & Tall(1991)은 일반화를 확장적 일반화(expansive generalization), 재구성적 일반화(reconstructive generalization), 분리된 일반화(disjunctive generalization)로 구분하고, 학생에게는 분리된 일반화가 일어났을 뿐임에도, 교사가 인지적으로 의미 있는 일반화가 일어난 것으로 생각할 수 있는 위험에 대해 주의를 환기하였다.

Porter(2003), Lee(2005) 등은 특수한 수학적 과제의 해결 과정에서 수학영재아들이 보이는 사고 특성을 관찰하고 분석한 바 있다. Sriraman (2004)은 삼각형의 외접원의 존재성에 관한 과제를 해결하는 과정에서 수학영재들이 보이는 접근법을 관찰하고 이를 전문 수학자들의 접근법과 비교하였고, Housman & Porter(2003)는 보통 이상의 수학적 능력을 가진 학생들의 학습 전략과 증명 스키마의 관계에 대하여 연구하였다. Lee(2005)는 다면체의 성질 탐구 과제를 해결하면서 영재아들이 보인 사고 과정을 수학적 추론 측면에서 분석하여, 영재아들이 실행적인 추론, 체계적인 추론을 거쳐서 수학적인 형식을 갖춘 이론적인 추론 단계로 나아가는 과정을 확인하였다.

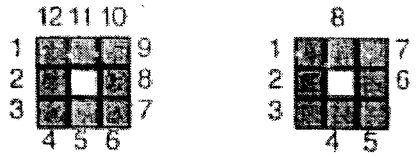
이와 같이 영재아들의 구체적인 문제 해결 과정에 관한 연구들이 이루어지고 있으나, 대수적으로 가장 중요한 활동이라고 할 수 있는 수학패턴의 일반화에 있어 초등학교 수준의 수학영재들이 어떻게 문제를 해결하는지 그 과정에서 어떠한 사고 특성을 보이는 지에 대한 연구는 여전히 미비한 실정이다. 이에 본 연구에서는 초등학교 수학영재들이 패턴 일반화 문제 해결 과정과 그 과정에서 보이는 사고특성을 분석하고자 한다.

II. 일반화와 관련된 일반아동의 사고특성

Mason & Pimm(1984: 286)은 일상 언어와 수학 안에 들어있는 포괄적인 예(generic example)에 대하여 논의하면서, 교사는 포괄적인 예를 학생들에게 제시하면서 특수(the particular)안에 있는 일반(the general)을 보지만 학생들의 경우 특수한 예 자체를 학습하려는 경향이 있다고 말하였다. 포괄적인 예는 일상 언어에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 티슈를 달라고 말하는 대신 "크리넥스 주세요."라고 말하는 경우, '크리넥스'는 티슈 전체를 지칭하는 용어로 해석하는 것이 타당하다. 수학에는 포괄적인 예를 사용하고 있는 것으로 해석할 수 있는 표현이 상당히 많다. 어떻게 해석하는가에 따라 모호한 점이 있기는 하지만, '$2n$'등과 같은 표현은, 엄밀하게 볼 때는 짝수 전체의 집합을 나타낸다고 보아야 하겠으나, 짝수에 대한 어떤 종류의 이름(마치 상표와 같은)으로도 생각할 수 있다. 또, ax^2+bx+c와 같은 표현으로 이차방정식 전체를 나타내기도 한다.

포괄적인 예의 전형적인 사례는 반례를 학습할 때 뚜렷하게 드러난다. 미분가능성에 대해서 공부하는 과정에서 연속이지만 미분불가능한 점을 가지는 함수의 예로 $f(x)=|x|$ 하나만을 소개하는 경우가 대부분인데, 이 때 강의하는 자의 입장에서 이 함수는 특수한 하나의 함수라기보다는, $f(x)=k|x+a|+C$ 로 표현할 수 있는 함수의 집합, 혹은 이 집합을 포함하는 더 큰 함수의 집합을 대표하는 함수로 여겨진다. 그러나 학생들은 $f(x)=|x|$ 를 하나의 특수한 함수로 파악하여 그 함수 '자체'에 주의를 집중하는 경향을 보인다. 이상과 같은 논의는, 일반화와 관련하여 일반아동이 가지는 하나의 사고특성을 드러내는 것으로 볼 수 있다.

Steelee & Johanning(2004)은 학생들이 일반화할 때 사용할 수 있는 스키마를 개발하도록 도와주는 것을 목적으로, 학생들이 일차 및 이차식으로 표현할 수 있는 일반화 문제를 해결할 때 개발되는 문제해결 스키마를 조사하였다. 이들은 8명의 7학년 학생을 대상으로 구조적으로 서로 관련되어 있는 8개의 일반화 문제를 풀게 하였다. 그 결과 잘 구조화된 스키마(wellconnected schemas)를 가진 아동과 덜 구조화된 스키마(partially-formed schemas)를 가진 아동의 예로 구분하여 제시하면서 연구결과를 정리하고 있다.



[그림 Ⅱ-1] 잘 구조화된 스키마를 가진 아동이 그린 다이어그램의 예 (Steelee & Johanning, 2004: 74)

[그림 Ⅱ-1]은 이들이 제시하고 있는 잘 구조화된 스키마를 가진 학생의 풀이에서 사용한 그림이다. 이 학생이 풀고 있는 일반화 과제는 작은 정사각형을 정사각형 모양으로 한 바퀴만 둘러 배열한 경우, 작은 정사각형의 개수를 일반화하는 문제이다. 이 학생이 발견한 것은 각 변의 작은 정사각형의 개수는 주어진 정사각형의 크기와 관련이 있으며 즉, 크기가 $n \times n$이면 한 변에 n개씩의 작은 정사각형이 있으며, 이 경우 네 개의 귀퉁이에 있는 것은 두 번씩 세어지므로 $4n-4$가 구하는 정사각형의 개수라는 것이다. 이런 유형의 아동들은 다이어그램으로부터 일반화하는 데 뛰어난 능력을 가지고 있다고 보고 있다.

이와는 반대로 덜 구조화된 스키마를 가진 아동의 경우에는, 여러 가지 일반화 과제를 수행하는 가운데 표를 그려 그 안에서 숫자 패턴 사이의 재귀적인 관계에 주로 관심을 기울이는 것으로 드러났다. 이들은 표를 사용하는 방법에 있어 가지고 있는 일반화에 따른 성공도에 따라 다른 반응을 보인다고 보았다.

이를 바탕으로 Steelee & Johanning은 일반화에 성공적인 학생은 표를, 발견의 용도로 사용하기보다는 다이어그램이 어떻게 작동하는 지를 확인하는 방법으로서 사용하는 것으로 보인다고 주장하였다. 이들의 연구에서 추가적으로 주목할 점은 잘 구조화된 아동이 일반화된 결과를 구체적인 경우를 통하여 검증하는 경향을 드러낸다는 것이다. Steelee & Johanning(2004: 86)은 자신들의 이러한 발견이 선행연구와 대립된다는 점에서 추가적인 검증이 필요하다고 말하였다.

Stacey & MacGregor(2001)는 문자기호를 미지수를 나타내는 맥락에서 도입하기보다는 패턴 일반화에 기반하여 변수 맥락에서 문자기호를 도입하는 새로운 접근방법에 대하여 논의하였다. 이들은 1991년부터 3년에 걸쳐 약 2000명의 7학년에서 10학년 사이의 아동을 대상으로 하여 연구를 진행하였다. 학생들이 속한 학교 중 일부는 패턴 일반화에 기반한 접근 방법을 사용하였고, 나머지 학교는 전통적인 방법을 사용하고 있었다. 이들의 연구에서 우리가 주목한 일반아동의 사고특성은, 일반화 과제를 수행하는 가운데 수 사이를 관련지우는 함수적 관계에 주목하기 보다는 선행하는 수의 값으로부터 그 다음 수를 예측할 수 있는 재귀적 관계를 찾는 경향을 드러낸다는 것이다.

Stacey & MacGregor(2001: 146)에 의하면 보통의 아동은 찾아낸 일반적인 관계를 관계식으로 표현하기 꺼려하거나 표현하지 못하는 경우가 많다. 이는 Arcavi(1994)의 용어를 빌자면 기호이해(symbol sense)가 부족한 상태라고 말할 수 있을 것이다. Arcavi(1994: 31)는 기호이해가 '관계와 일반화를 표현하는 데 언제 어떻게 기호를 사용하는지 이해하고 있는 동시에 그렇게 할 수 있는 개인의 능력'을 포함하는 것으로 보면서 그 중요성을 강조한 바 있으며, Steelee & Johanning(2004: 87)은 이러한 종류의 기호이해가 대수적 사고의 본질이라고 말하고 있다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

이 연구에 참여한 학생은 2006년 1월 당시 경기도에 소재한 A대학교 부설 과학 영재교육원의 초등수학 심화반에서 학년통합형으로 함께 교육을 받고 있던 5학년과 6학년에서 각 2명이다. 이들은 SJ(5_A), OJ(5_B), JH(6_A), IS(6_B)로 코드화한다. 이들은 경기도 전역에서 3~5학년(약 50만명)을 대상으로 학교장 의 추천을 받아 1차(학년별 사고력 검사)와 2차(학년 통합형 수학창의적 문제 해결력 검사), 3차(지도교수와 담임교사의 구술 면접) 전형을 거쳐 선발되어 해당 기관에서 1년 6개월의 교육을 받은 경험이 있으며 해당 연령 학생 수의 상위 0.01% 이내의 수준이다. 이들은 모두 국내의 각종 수학경시대회에서 우수한 성적으로 입상한 경력이 있으며, 특히 6_A와 6_B는 2005년 5월에 실시한 한국수학올림피아드(KMO)에 중등부로 응시하여 각각 동상과 장려상에 입상하기도 하였다. 이들은 2005년의 수업에서 도형수와 하노이탑에 관한 패턴 일반화 과제를 다루어 본 경험이 있으며, 이들 과제를 성공적으로 수행하였다.

2. 연구과제

본 연구팀이 학생들에게 제시한 과제는 바둑돌을 옮기는 퍼즐의 일종[3]으로써 [그림 III-1]과 같이 놓여 있는 서로 다른 색의 바둘돌을 한 번에 한 개씩 밀거나 한 개를 건너뛰면서 위치를 바꾸어 놓는 최소 이동 횟수를 구하는 것이다. 이는 Roper(1999), Shockey & Bradley(2006) 등에서 peg의 개수 n에 따른 최소 이동 회수를 구하는 문제로 자주 소개된 것인데, 본 연구의 과제는 이것의 일반화된 해법을 요구한 것이다.

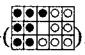
▶한 번에 한 칸을 밀거나, 다른 바둑돌 한 개를 건너뛰면서 비어있는 칸으로 옮길 수 있다.
▶바둑돌의 이동 횟수가 최소이면서 두 색깔의 바둑돌의 자리를 완전히 바꾸면 성공!

<문제1> 검은색, 흰색 바둑돌이 각각 3개씩일 때의 최소이동횟수를 구하고, 자신이 찾은 이동방법이 최소이동방법임을 설명하시오.
<문제2> 앞에서와 같은 방법으로 바둑돌을 옮길 때, 바둑돌의 개수가 보다 많아질 경우에 성립할 수 있는 최소이동방법과 최소이동횟수를 찾아보시오. 또, 그러한 규칙이 성립하는 이유를 설명하시오.
<문제3> 앞에서와 같은 방법으로 검은색과 흰색의 바둑돌의 개수를 다르게 하여 바둑돌을 옮겨봅시다. 이 때 최소이동방법과 최소이동횟수를 찾아보시오. 또, 그러한 규칙이 성립하는 이유를 설명하시오.

[그림 III-1] 실험에 사용한 과제

본 연구에서는 [그림 III-1]과 같이 3개의 문제로 활동의 절차를 구분한 학습용 과제를 만들어 사용하였다. 먼저 검은색, 흰색 바둑돌이 각각 3개일 때의 최소이동횟수를 구하도록 하는 <문제1>을 제시한다. <문제1>은 주어진 패턴을 인지하고 최소이동 횟수를 구할 수 있는

3) 본래 'peg puzzle'은 여러 가지 모양으로 배열된 pegs를 건너뛰면서 마지막 하나가 남을 때까지 peg를 제거해 나가는 것이 일반적이다. 그러나 이 논문에서는 직선형의 배열에서 뛰어넘은 peg를 제거하지 않고 각 pegs를 옮기는 최소이동횟수에만 초점을 둔다.

가를 알아보는 것으로, 여기에서는 수학 영재들이 문제가 주어졌을 때 단지 주어진 문제만 해결하는지 아니면 보다 일반적인 상황에서의 해법을 찾으려고 하는지(일반화 하려는 성향)도 알아보려는 의도를 담고 있다. 만약 <문제1>에서 학생 스스로 두 종류의 바둑돌이 각각 n개인 상황으로 확장을 하지 않을 경우 <문제2>를 제시한다. <문제2>는 바둑돌의 개수가 보다 많아질 경우의 최소이동횟수와 방법을 구하도록 하는 것이다. 앞에서와 마찬가지로 흰 색과 검은 색의 바둑돌의 수가 각각 n개인 경우로만 확장을 할 경우 <문제3>을 제시한다. <문제3>은 흰색과 검은 색의 바둑돌의 수가 서로 다른 경우에 일반화를 할 수 있는지(이변수 일반화)를 확인하기 위한 문제이다. 물론, <문제 2>에서 "앞에서와 같은 방법으로 바둑돌을 옮길 때"라는 조건을 삭제한다면 바둑돌을 2개 이상 건너뛴다거나 바둑돌의 배열이 직사각형인 경우()로 학생들이 직접 확장하는 경우도 가능할 것이다. 그러나 본 실험 이전의 수차례 예비실험 과정에서 그러한 구체적이고 자발적인 시도는 확인하지 못했기에 문제의 확장보다는 풀이의 일반화에 초점을 두면서 문제를 보다 명확히 하기 위해 이 조건을 첨가하였다. 본 과제는 학생들이 인지한 패턴을 '일반화하여 일반식으로 나타낼 것'과 '그것을 정당화할 것'을 요구하고 있다.

3. 자료 수집 및 분석

본 실험이 실시되는 동안 4명의 학생들에게 자신들의 능력별에 따라 필요한 만큼 1시간에서 3시간에 걸쳐 독립적으로 과제를 수행했다. 학생들이 문제를 해결하는 동안 학생 1명당 2명의 관찰자가 옆에서 관찰을 하면서, 그들의 문제 해결에 대한 인터뷰를 진행하였다. 이들 이 과제를 수행하는 전 과정과 인터뷰 과정은 비디오로 녹화하였고 학생들의 활동지를 수집하였다.

학생들의 사고 과정을 분석하기 위하여 학생들의 문제 해결 과정과 인터뷰 내용을 모두 녹취하였다. 녹취된 자료와 녹화된 비디오 자료 그리고 학생의 활동지를 바탕으로 분석을 실시하였다. 본 연구의 분석 과정은 학생들의 문제 풀이 과정 속에서 드러나는 초등 수학영재아동의 독특한 사고 특성을 찾아내는 데에 초점이 맞추어져 있었다. 일반화에 대한 여러 선행 연구(Mason & Pimm, 1984; Stacey & MacGregor, 2001; Steelee & Johanning, 2004)에서 논의된 일반아동의 사고 특성, 일반화의 단계에 대하여 논의한 Bell(1976)의 연구, 일반화의 중요성에 대하여 다양한 각도에서 논의한 Mason(1996)의 연구 등을 바탕으로 하여 본 연구의 대상자들이 대수 일반화 과제 해결 과정에서 드러내는 사고 특성을 분석하였다.

IV. 연구 결과

초등 수학영재들의 패턴 일반화 과제 해결 과정에서 다음과 같은 사고 특성이 포착되었다.

1. 포괄적인 예(generic example)의 추구

본 실험의 대상이 되는 수학영재아동은 구체적인 예를 특수한 하나의 경우로 파악하기 보다는 그 안에서 좀 더 일반적인 구조를 파악하려는 경향, 즉 포괄적인(일반적인) 예로서 받아들이려는 경향을 보였다. 5_B는 (3, 3)의 경우에 대한 최소 횟수를 구하고 나서 "그런데요... 여기에 (일반적인) 규칙이 있어요.", (중략) "바

둑돌의 개수에 따른 최소 이동 횟수!"라고 말하면서 이 문제가 그 규칙에 대한 것이 아닌가를 관찰자에게 반문해 왔다.

5_A의 경우에도 첫 번째 과제를 해결한 후 최소성을 보이라는 관찰자의 요구에 대해서 옮기는 방법의 간단한 예시를 보여주면서도 최소 이동횟수를 말하기 보다는 '이런 방식으로'라는 표현을 쓰면서 옮기는 방법에 주목한 것은 5_A가 주어진 바둑돌의 개수나 옮긴 횟수를 통한 귀납적인 시도보다는 옮기는 방법의 포괄적인 예를 찾고 있음을 드러낸다.

아동 6_A 역시 다음에서 살펴볼 수 있듯이 바둑돌의 개수에 얽매이지 않고 있음을 드러내고 있다. 6_A는 자신이 문제를 정확하게 이해하였는지 교사에게 확인하는 과정에서 처음에는 바둑돌이 각각 2개씩인 (2, 2)의 경우를 예로 들어 설명하다가 설명을 완성하지 못했음에도 바둑돌이 각각 3개씩 인 (3, 3)의 경우로 곧바로 바꾸어 설명을 마무리하고 있다.

> 6_A: 어쨌든요. 이 상태이지요. [●● ○○] 색깔의 위치는 바뀌어도 상관없어요. 여기서 해 봐야 할 것 같은데…… [●○● ○] 이렇게 넘을 수 있을 거 아니에요. 뒤로 못 가죠?
>
> T : 뒤로 못 간다는 얘기는 없었는데?
>
> 6_A: 기억 상 대단히 어려웠던 것 같은데….?
> (2, 2)시행 10번
> [●● ○○][●●○ ○][● ○●○]
> [●○ ●○][○●●○][○ ●●○]
> [○● ●○][○●○●][○●○ ●]
> [○ ○●●][○○ ●●]
> 최소가 있었던 것 같아요. 기억상으로요. 기억에 의존할 수밖에 없어요. (3, 3)시행 [○○○ ●●●]에서도 이런 모양만 만들면 되요.
> [○●○●○●]→[●●● ○○○]
> 맞죠?(이후에 성공함)

즉, 아동 6_A에게 있어 (3, 3)의 경우에 대하여 질문한 첫 번째 문제는 특별한 한 가지 경우에 대한 설명이라기보다는 바둑돌의 개수에 관계없는 일반성을 지닌 과제였던 것이다.

이상과 같이 수학영재아동은 특수한 경우 안에서 일반성을 보는 경향을 가지고 있다. 이와 같은 경향은 교사는 기법이나 이론의 예를 칠판에 쓰는 상황에서 그 안에 내재되어 있는 일반성을 보지만 아동은 특수(the particular)만을 보는 경향이 있다는 Mason & Pimm(1984: 286)의 지적에 비추어 볼 때, 수학영재아동이 보통의 학생과는 구분되는 사고 특성을 보임을 말해준다고 볼 수 있다.

2. 구체적인 상황에 적용시켜 일반화 결과를 확인하기

본 실험의 피험자들은 <문제 2>까지 모두 타당한 일반화에 성공하고 자신의 결과에 대하여 타당한 정당화를 제시하였다. 그러나 구체적인 경우에 대하여 자신의 일반화 결과를 검증하는 행위에 있어서는 차이를 보였다.

Bell(1976: 23-24)에 의하면 총 4단계의 일반화 및 증명의 수준 중 '특수한 사례를 고려하는 행동'은 제 2단계이다. 이는 모종의 패턴 내지는 관계를 인식하지만 이를 설명하거나 정당화, 또는 증명하지는 못하는 제 1단계와 비형식적이기는 하지만 완전하면서 연역적 성격을 가진 논증을 제공하거나 모든 가능한 경우에 대한 검증을 제시하는 제 3단계 사이의 단계에 속하는 것으로, 타당한 정당화를 제공하지는 못하는 가운데 구체적인 사례에 관심을 기울이는 특성까지도 포함한다. 그런데, 본 실험에 참가한 학생들 중 가장 우수하다고 평가되는 아동 6_A가 다른 3명의 아동과는 달리 자신의 일반화 결과를 구체적인 경우에 적용하여 재검토하는 경향을 드러냈다. 이는 Bell이 말하는 2단

계에 해당되는 사고 수준을 가지고 있다고 보기 어려운 아동 6_A가 구체적인 경우에 대하여 검증하는 행동을 하였다는 것은 '구체적인 것에 대한 고려'가 사고 수준에 따라서만 나타나는 행위는 아니라는 것을 시사해 준다.

아동 6_A는 하나의 바둑돌의 개수를 a, 다른 바둑돌의 개수를 b라고 할 때, 최소 이동 횟수가 $(1+a)b+a$가 된다는 것을 정당화한 후에 자신이 앞에서 실행하여 보았던 (2, 5)의 경우 최소이동횟수가 17회였다는 것을 상기하고 이를 자신이 구한 식에 대입하여 검증하였으며, 앞에서 구했던 양쪽의 바둑돌의 개수가 똑같은 경우에 대해서 성립하는 지 여부도 검사하고, 이를 (2, 4)의 경우에 대해서도 다시 검증하고 있다.

6_A: $(1+a)(b-a+a)+a$,
즉 $(1+a)b+a$가 되겠네요. 잠깐만요. (2, 5)일 때, 17번이었죠? 17번 딱 맞네요.
T : 그런 것 같네.
6_A: 그리고 한 개 뺀 (2, 4)일 때, 앞의 방법에서 미리 예측을 하면 12+2=14인데요...
여기서 b는 a일 경우에는 저희가 구했던 게 $b(1+a)+a \rightarrow a(a+2)$ (단 $b \geq a$) 이런 조건에서요.
이제 직접 해보면 되겠지요. 14개만 나오면 되는 것이지요.... 14번, 맞죠?

이는 6_A가 주어진 예의 특수성에 영향을 받지 않으며, 특수한 예 속에서 일반성을 보는 경향을 가지고 있으며(1절 참조), 마지막 과제의 수행에 있어 가장 성공적인 아동(4절 참조)이었다는 점에 주목하여 볼 때 흥미로운 결과라고 볼 수 있다.

Steelee & Johanning(2004: 86)은 잘 구조화된 스키마를 가진 아동과 덜 구조화된 스키마를 가진 아동을 구분하면서, 잘 구조화된 스키마를 가진 아동이 일반화 결과를 검증하기 위하여 자신의 일반화 결과를 특수한 경우에 대하여 확인하는 경향이 있다고 말하면서 자신의 이러한 발견이 선행연구와 대립된다는 점에서 추가적인 검증이 필요하다고 말한 바 있다. 이 결과는 6_A가, 4절에서 알 수 있듯이 자신이 발견한 구조를 바탕으로 변수가 두 개인 경우에 대한 일반화에 성공하였다는 것, 즉 잘 구조화된 스키마를 가진 아동이라는 점에 비추어 볼 때 Steelee & Johanning의 연구를 일정 부분 지지하는 증거로 볼 수 있을 것이다. 한편, 이상의 결과는 '구체적인 경우에 대한 고려'의 유무가 일반화 발달 단계나 문제해결 능력 자체와는 별개의 관점에서, 여러 번의 반복된 실험에 의한 추가적인 검증이 필요함을 말해준다.

3. 문제 해결 과정에서의 수학영재아동의 표현 방식

가. 관계식 표현

Stacey & MacGregor(2001: 146)에 의하면 보통의 아동은 찾아낸 일반적인 관계를 관계식으로 표현하기를 싫어하거나 표현하지 못하는 경우가 많다. 그러나 본 실험의 대상이 된 4명의 영재 아동은 모두 자신의 생각을 문자식으로 표현하고 답안을 문자 언어를 활용하여 표현하는 데 어려움이 없었다. 그들은 아래와 같이 관계식을 사용하여 일반화 결과를 명확하게 표현하고 있다.

'$a(a+1)+a+(1+a)\times(b-a)$.
이제는 $(1+a)(b-a+a)+a$, 즉 $(1+a)b+a$이 되겠네요.' (6_A)
'$(n+1)^2-1$', '그거 이제 a개 차이가 나면.. a개 차이: $(n+1)(n+1+a)$' (6_B)
'바둑돌이 n개씩 있을 때, $n\times(n+2)$회가 최소 이동횟수이다.'(5_A)
'이동 방법에서의 규칙은 바둑돌이 n개씩일

때,

$1+2+\cdots+(n-1)+3n+(n-1)+$
$(n-2)+\cdots+2+1=3n+n(n-1)$
$=n^2+2n=n(n+2)$로 이동한 횟수와 맞아 떨어진다.'(5_B)

이러한 영재들의 성향은 Arcavi(1994: 31)의 표현을 빌자면, 기호이해(symbol sense)를 가지고 있는 것으로 볼 수 있다.

나. 다이어그램의 선호

연구 대상자 중 3명(5_A, 5_B, 6_B)이 바둑돌이 (n, n)개인 경우의 일반화 패턴을 찾아내는 과정에서 구체물의 조작이나 표를 사용하는 체계화 방법을 사용하기 보다는 다이어그램을 선호하는 경향을 드러냈다.

아동 5_A는 <문제1>을 수행하면서 검은 돌은 ●, 흰 돌은 ○, 빈 칸은 ×로 표현한 일련의 그림을 세로 방향으로 배열하여 바둑돌의 이동 상황을 드러내고자 하였으며, 아동 5_B는 일반화하는 과정에서 더 이상의 구체물은 필요하지 않다고 말하면서 아래 [그림 IV-1]의 왼쪽과 같이 바둑돌에 번호를 부여함으로써 (3, 3)인 경우에 대하여 설명하였다.

1	2	3		4	5	6
●	●	●		○	○	○

B3	B2	B1		W1	W2	W3
●	●	●		○	○	○

[그림 IV-1] 5_B의 표현과 이상적인 표현

이는 [그림 IV-1]의 오른쪽과 같은 방식으로 표현할 때보다는 일반화하기가 어렵지만 구체물의 대상을 수나 기호로 대체하여 표현하려는 시도로 볼 수 있다. 이런 시도는 교사의 발문과 표현의 정교화를 통해 일반화에 보다 용이하게 접근할 수 있도록 해 준다.

또한, 아동 6_B는 바둑돌의 움직임을 체계적으로 표현하는 데 그림이 더 편하다는 이유를 들면서 다이어그램을 선호하는 경향을 드러내고 있다.

T : (바둑돌을 옮기는 과정의 비슷한 그림을 계속 그리고 있는 것을 보면서) 아까 하던 것을 또 계속 하는 거야?
6_B: 네.
T : 음. 그림을 새로 안 그리고, 왜 전에 했던 그림을 자꾸 더 좋아할까?
6_B: 에~ 다 그려져 있으니까요.
T : 그려져 있으니까?
6_B: 편해서요.
T : 아~, 더 편해서? 이 바둑돌을 직접 옮겨 볼 수도 있잖아? 옮기지 않고 그림으로 그리는 이유는?
6_B: 그려놓으면, 순서를 딱 볼 수 있잖아요.
T : 아, 바둑돌은 순서를..
6_B: 바둑돌을 옮기면 그 때만 볼 수 있는데, 그림으로 하면……
T : 순서를 볼 수 있다?

이상에서 다음의 두 가지를 확인하였다.

첫째, 수학영재아동의 사고는 구체물에 얽매이지 않는다. 3명의 영재아동 이외에 6_A는 다이어그램을 특별히 선호하지도 않으면서 곧바로 수식으로 일반화를 시도함으로써 구체물에 얽매이지 않았다. Mason(1996: 70)은 구체물이 특수를 강조하여 일반을 보기 어렵게 만들 수 있다는 점을 지적한 바 있는데, 영재 아동은 구체물에 얽매여 일반을 보기 어렵게 되는 장애에서 자유롭다고 말할 수 있다. 둘째, 초등 수학영재들이 표보다 다이어그램을 선호하는 경향은 Steelee & Johanning의 연구 결과를 지지하는 증거로 해석될 수 있다. Steelee & Johanning(2004: 73-82)에 의하면, 잘 구조화된 스키마를 가진 아동은 표를 통하여 일반화하기 보다는 상대적으로 개수가 적은 경우에 대한 다이어그램을 그리는 가운데 패턴을 찾음으로써 스스로의 기호적인 일반화(결과)를 이끌어낸

다. 본 연구의 수학영재아동들 역시 상대적으로 개수가 적은 경우에 대하여 다이어그램을 그림으로써 패턴을 찾고자 하였다.

4. 이변수 일반화 및 정당화

본 실험의 대상 4명의 아동 중 6_A를 제외한 3명은 양쪽의 바둑돌의 개수가 다른 경우에 대한 일반적 패턴을 추정하는 데에는 성공하였지만, 앞의 과제에서와는 달리, 이변수 일반화 과제에서는 어려움을 겪었다. 6_A만이 그 결과를 정당화하는 데 성공한 동시에 자신의 일반화 결과에 대하여 확신을 가졌다. 아동 5_A의 경우는 여러 가지 경우로 나누어서 자신의 추측 결과를 정당화하였으나 자신의 정당화 결과에는 만족하지 못했다. 그러나 다른 두 아동은 정당화에서조차 실패하였다. 이 절에서는 학생들이 이변수 일반화 과정에서 사용한 패턴 추정 방법을 기술하고 그 가운데 드러나는 몇 가지 시사점에 대하여 논의한다.

학생들이 일반화 패턴 추정에 사용한 방법은 크게 다음의 3가지 정도로 구분할 수 있다.

❶ 바둑돌의 개수를 각각 n, m개라고 할 때 하나의 변수 n을 고정시키고 다른 변수 m을 변화시켜서 일반적 패턴을 추정하는 방법.

❷ 바둑돌의 개수를 각각 n, $n+k$개로 놓고 그 차이에 주목하여 규칙을 예상하고 이를 정당화하는 방법.

❸ 이전 과제의 해결 방법과 구조적으로 동일한 부분에 주목하여 이를 이용하는 방법.

첫 번째 방법을 사용한 아동은 5_B였다. 아동 5_B는 검은 바둑돌의 개수는 고정시켜놓고 흰 바둑돌의 개수만 변화시키면서 일반적 패턴을 추정하였다.

5_B: (3,1)일 때는 7, (3,2)일 때는 11, (3,3)일 때는 몇 번이더라? 잠깐만요. 아! 15번이다. (3,4)일 때는 19번이겠다. ([●●● ○○○○]를 직접 실행해 봄) 19번 맞네. (3,5)일 때는 23 ([●●● ○○○○○]를 직접 실행하여 보여줌). 따라서 $4n-1$개. (4,1)일 때는 9, (4,2)일 때는 14, (4,3)일 때는 19, (4,4)일 때는 24. 따라서 $5n-1$개. (직접 실행하지 않고 개수만 적음) (5,1)일 때는 11, (5,2)일 때는 …… (실행없이 개수를 적어나가고 있음)

T : n은 뭐야? 무엇이 n이야?

5_B: 오른쪽 것.

T : 오른쪽 것이 n이야?

5_B: 그럼 (4, 1)일 때 n에 1을 넣으면 4가 나와야 하는데? (그러자 앞의 식들을 각각 뒤에서부터 $5n+4$, $4n+3$, $3n+2$로 다시 고쳐서 적음) (5,2)일 때는 17, (5,3)일 때는 23, (5,4)일 때는 29, (5,5)일 때는 35. 따라서 $6n+5$개. 그러니까 (a, b)일 때의 최소 이동 횟수는 $(a+1)b+a=$ 잠깐만 그러면 (b, a)일 때는? 아……

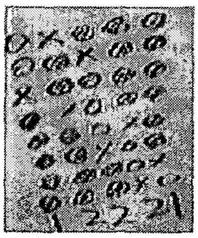
$$(a+1)b+a=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$$

그러나 5_B는 이 결과가 모든 경우에 대하여 성립한다는 것을 증명해보라는 요청에 대해 그로부터 약 1시간 40분이 경과할 순간까지 답변하지 못한 상태에서 실험이 마무리 되었다. 그는 수들의 귀납적인 관계는 파악하였으나 옮기는 패턴의 구조는 보지 못했던 것이다.

또한, 아동 5_A는 바둑돌의 개수를 $(n, n+k)$로 놓고 그 차이에 주목하여 규칙을 예상하고 이를 정당화하는 방법을 사용하였다. 5_A는 우선 $(n, n+1)$인 경우에 대하여 n이 짝수인 경우와 n이 홀수인 경우로 나누어 각각의 경우에 대하여 자신이 추정한 것이 참임을 정당화한다. 그런데 5_A는 이를 임의의 경우 즉,

$(n,\ n+k)$인 경우로 확장하지는 못하였다. 실제로 5_A는 "무한까지 있는데 어떻게 다해요……"라고 반문하거나, "그런데 이걸 꼭 찾아야 되요?"라고 질문하면서 자신이 찾아낸 것을 일반적인 경우로 확장하는 것에 대하여 거부감을 드러내었다. 이후의 정당화 과정에서 5_A는 $(n,\ n+k)$를 바둑돌의 개수라고 할 때 n이 짝수인 경우와 홀수인 경우 그 각각에 대하여 $n+k$가 짝수인 경우와 홀수인 경우, 도합 4가지의 경우로 나누어 그 각각을 정당화한다. 이는 이 4가지의 경우가 하나의 식으로 표현되기는 하지만 아동 5_A에게 있어 동일한 구조를 가지는 것으로 인식되지는 못하고 있음을 드러낸다고 볼 수 있다.

6_B는 5_A와 마찬가지로 바둑돌 개수의 차이에 따라 경우를 나누어 (1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 4)등과 같은 몇 가지의 포괄적인 예에 대해서 조사하여보는 것으로 패턴 추정을 시작하였다.



[그림 Ⅳ-2] 여백에 집중한 6_B의 접근방법

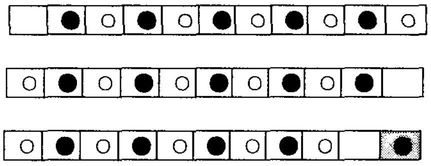
또한, 6_B는 [그림 Ⅳ-2]의 경우를 조사하는 가운데 바둑돌의 이동과정을 그려놓은 다이어그램에서 바둑돌이 없는 공란의 개수에 패턴이 있음을 인식하게 된다. 이 때 수 1, 2, 2, 2, 1은 각 열에서 여백이 몇 개씩 존재하는가를 세어본 것이다. 6_B는 이와 같은 방법으로 최소 이동 횟수를 추정한 후에 그 결과를 일반적인 경우로 확장하려 하였다.

6_B: 여기, 규칙은 찾았는데요.
T : 응?
6_B: 이것이 1개 차이일 때는 $(n+1)(n+2)$고요. 2개 차이일 때는 $(n+1)(n+3)$이고요. 3개 차이일 때는 이렇게 하면 되요. 그러면 이 두 개의 수 $(n+1)$과 $(n+4)$의 차가 얘(3개)랑 똑같아요.
T : 둘의 차가 똑같다?
6_B: (둘의 개수만큼) 차이 나는 수와요.
T : 이게 규칙이라는 거야?
6_B: 네.
T : 그럼 최소 이동횟수를 구하라면?
6_B: a개 차이 나는 거요?
T : 그거 이제 a개 차이가 나면..
6_B: (a개 차이일 때 :
$(n+1)(n+1+a)$를 쓴다.)

이와 같은 시도는 [그림 Ⅳ-2]의 첫 번째 행, 즉 최초 상태를 이동 횟수에 포함시켜서 각 횟수에 1씩이 더해지게 되는 사소한 오류를 제외하고는 의미있는 방법으로 보이지만, 실험이 종료될 때까지 6_B는 움직인 방법보다는 빈 칸의 수를 일반화하는 데만 주목한 상태로 끝나 결국 최소이동횟수를 일반화하는 데는 실패하였다.

이상의 세 아동과는 대조적으로 아동 6_A는 양쪽의 바둑돌의 개수가 같았던 $(n,\ n)$꼴에서 자신이 주목하였던 '크로스'라는 개념을 <문제3>에도 그대로 적용하는 가운데 이를 해결한다. 우선, 6_A가 <문제1>과 <문제2>에서 사용하였던 방법을 살펴보자.

6_A : 여기서는요, 몇 개 더 많아지는 것이 크로스가 된다면 그 전 작업을 한번 크로스를 할 때 마다 점점 줄어들어요. 이런 식으로 돌이 있다면요 한번 넘어갈 때마다 줄어든단 말이에요. 한 단계 줄였죠? 얘는 빠지고, 이 안으로 한 단계 줄었어요. ('빠지는 것=한 단계 줄어 듦'을 의미)



반대쪽에서 시행해주면 반대쪽의 공간이 생기면서 또 빠져요.

정렬하는 방법인데요. 여기 안에 있는 것이 모두 넘어오는 것이랑 이것까지 한 번 더 해주면 정렬이 되잖아요.

여기서 학생이 사용한 '크로스'라는 용어는 흰 돌과 검은 돌이 교대로 나타나는 패턴을 일컫는 말이다. 문제 해결과정에서 이 패턴에 학생이 주목하게 된 이유는 '크로스'꼴이 문제 해결 과정에서 핵심적인 역할을 하기 때문이다. 이 패턴은 바둑돌의 위치 이동 과정에서 한 번은 '순방향'으로 다른 한 번은 '역방향'으로 두 번 반복된다. 즉, 최초의 상태에서 '크로스'꼴로 만들고 그 중간에 [그림 IV-3]과 같이 n번의 넘기를 통하여 역전시키는 과정을 삽입하고 나면, 이번에는 '크로스'꼴을 만드는 조작의 역 조작을 행함으로써 과제 해결이 끝나게 된다.

[V○●○●○●○●]→[●○●○●○●○V]

[그림 IV-3] 6_A의 아이디어

6_A는 이러한 아이디어를 확장하여 <문제 3>을 해결하였다. 6_A가 <문제 3>에서 사용한 방법을 요약하여 보면 (a, b)의 경우(단, $a \le b$)라고 할 때 우선, a개씩의 흰 돌과 검은 돌로 크로스를 만들고 이 덩어리를 반대편으로 이동시킨 후 이를 검은 돌과 흰 돌과 구분되도록 풀어 전체 과정을 마무리하는 것으로 요약된다.

6_A: 이쪽으로 먼저 가져다붙이는 크로스를 쓰면요.

[●●●●○●○]→[●●● ○●○●]

넘어오면 a번의 방법이 필요하겠지요.

[●● ●○●○●] 1번 오는 방법이고,

[●●○●○● ●] a개수만큼 또 넘어가야 하겠지요. 이만큼의 크로스 덩어리가 점점 앞으로 땅겨오는 거라고 할 수 있겠지요.

[●○●○●●●] 또 메웠지요. 달려오고.. 달려왔잖아요.(○바둑돌이 앞의 빈 공간으로 이동) 여기서 크로스를 해체해야 하겠지요.

[○●○● ●●●]

T : 풀어줘야겠지.

6_A: 이것은 $f(n)$개이겠지요. [$f(n)$이 $1+2+\ldots+n$이 된다는 것은 <문제 2>에서 밝혔다] $\frac{a(a+2)}{2}$의 두 번. 즉, $a(a+1)$개로 바뀌고요. $a(a+1)+a+(1+a)\times\triangle$인데.... $\triangle$에는 크로스가 섞이고 나머지 개수는 밀어주는 만큼의 크로스가 있으니깐 $b-a$개겠죠. 식은 $a(a+1)+a+(1+a)\times(b-a)$에요. 나머진 이것만큼 계속 밀어줘야 하니깐 $b-a$개지요.

T : 식을 좀 더 간단히 한다면 어떻게 될까?

6_A: $(1+a)(b-a+a)+a$이니까

$(1+a)b+a$가 되겠네요.

이상의 결과는 6_A가 이변수 정당화 과제인 <문제3>에서 <문제1>과 <문제2>를 해결하는 과정과 구분되는 특별한 장애를 보이지 않았음을 보여준다. 6_A는 (n, n)인 경우에 파악한 구조를 (n, m)의 경우에 그대로 확장하는 모습을 보이고 있다. 그러나 6_A처럼 (n, n) 경우의 구조와 관련하여 (n, m) 경우의 구조를 파악하지 못한 다른 학생들에게서는, (n, n) 경우를 해결할 때에 비해 (n, m) 경우를 해결할 때 귀납적인 접근이 더 많이 시도되는 모습이 나타났다.

IV. 결 론

이 연구에서 우리는 4명의 초등학교 수학영재아동을 대상으로 그들이 페그퍼즐을 3단계에 걸쳐 해결하는 과정을 일반화에 초점을 맞추어 분석하였다. 그 결과와 교육적 논의로부터 다음의 결론을 얻었다.

첫째, 초등수학영재아동은 표 속에서 귀납적인 규칙을 찾기보다 포괄적인 예를 통해 보다 일반적인 구조를 파악하려는 경향을 가지고 있다. Mason(1996: 77)은 가장 강력한 일반화는 하나의 예로부터의 일반화라고 말하면서, 이러한 일반화가 전문수학자 고유의 것이 아니라 모든 수준에서 경험될 수 있는 것이라고 말하고 있다. 교사는 초등수학영재아동을 가르침에 있어서 이러한 사고특성을 고려하여 예를 제시하는 맥락을 결정하여야 할 것이다. 한편, 수학적으로 가능성을 가지고 있는 학생들이 구체적인 것에서 일반적인 것을 볼 수 있도록 이끌어주어야 할 것이다.

둘째, 초등 수학영재아동은 자신의 생각을 문자식으로 표현하고 답안을 문자 언어를 활용하여 표현하는 데 어려움을 겪지 않았다. 이는 Arcavi의 용어로는 기호이해를 가지고 있다고 표현할 수 있었다. 또한 일반화 패턴을 찾아내는 과정에서, 구체물의 조작이나 표보다 다이어그램의 사용을 선호하는 경향을 확인하였다. Mason(1996: 70)은 구체물에 얽매이는 것의 위험성에 대하여 논의한 바, 이상의 결과는 수학영재아동을 대상으로 하였을 때 구체물을 지나치게 강조하는 교육 방법은 지양하여야 함을 시사한다.

셋째, 구체적인 경우를 사용하여 자신의 일반화 결과를 스스로 검증하는가의 여부는 아동에 따라 다르게 나타났다. 우리는 선행연구로부터 잘 구조화된 스키마를 가진 아동에게서 일반화한 결과를 특수한 경우에 적용시켜봄으로써 자신의 결과를 검증하는 경향이 있다는 보고를 확인할 수 있었다. 이상의 결과는 일반화 및 정당화가 이루어진 '후' 구체적인 경우에 대하여 '검증'하는 특성이, 일반화 능력의 수준에 있어 비슷한 아동이 개인차를 드러낸다는 점에서, '수준'에 중점을 두는 관점과는 다소 별개의 시각에서 고찰되어야 한다는 것을 시사한다. 이에 대해서는 여러 번의 반복된 실험을 통하여 면밀하게 분석한 후속연구가 필요할 것으로 보인다.

넷째, 이변수 일반화 과제의 경우, 비록 모든 학생이 일반적 패턴을 추정할 수는 있을지라도 그 정당화에 있어서는 만족스럽지 못한 결과를 얻은 학생이 많았다. 이는 이변수를 가진 문제를 해결하는 것은, 아직은 초등영재들에게는 어려울 수 있다는 것을 시사한다.

이 연구는 대수 일반화와 관련된 초등 수학영재아동의 사고특성을 구체적인 수준에서 드러냈다는 점에서 그 의미를 가진다고 할 수 있다. Greenes & Mode(1999)는 수학영재교육을 위해서는 보통의 경우와는 구분되는 교사의 준비가 필요하다는 점을 주장한 바 있다. 수학영재를 판별하고, 나아가서 수학영재에게 특화된 별도의 교육 내용을 제공하기 위해서는 수학영재아동의 사고특성, 특히 세분화된 분야 안에서의 사고특성에 대한 연구가 더 많이 요구된다.

참고문헌

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*, 24-35.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof explanations in mathematical situations.

Educational Studies in Mathematics 7, 23-40.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, J. V. Dormolen, (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching.*(pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

English, L. D., & Warren E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Friedlander, A., & Hershkowitz, R. (1997). Reasoning with Algebra. *Mathematics Teacher, 90*(6), 443-447.

Greenes, C., & Mode, M. (1999). Empowering teachers to discover, challenge, and support students with mathematical promise. In L. J. Sheffield (Ed.), *Developing mathematically promising students* (pp. 121-132). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the genetic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics, 53*(2), 139-159.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lannin, L. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics teaching in the middle school, 8*(7). 342-348.

Lannin, L. K. (2005). Generalization and justification: the challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. In L. C. Helen & L. V. Jill (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3. pp. 241-248). Melbourn: PME.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bendnarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 277-289.

Roper, T. (1999). Pattern and the assessment of mathematical investigations In Orton, A. (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp. 178-191). NY: The Continuum International Publishing Group

Shockey, T. L., & Bradley, D. M. (2006). An

Engaging Puzzle to Explore Algebraic Generalizations. *Mathematics Teacher, 99*(8), 532-536

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth grader' notions of proof: investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Stacey, K., & MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. R. Sutherland et al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 141-153). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Steelee, D. F., & Johanning, D. I. (2004). A schematics-theoretic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 57*(1), 65-90.

Swafford, J. O., & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 89-112.

Analysis of the Algebraic Generalization on the Mathematically Gifted Elementary School Students' Process of Solving a Line Peg Puzzle

Song, Sang Hun · Yim, Jae Hoon · Chong, Yeong Ok · Kwon, Seok Il · Kim, Ji Won
(Gyeongin National University of Education)

Studies on mathematically gifted students have been conducted following Krutetskii. There still exists a necessity for a more detailed research on how these students' mathematical competence is actually displayed during the problem solving process. In this study, it was attempted to analyse the algebraic thinking process in the problem solving a peg puzzle in which 4 mathematically gifted students, who belong to the upper 0.01% group in their grade of elementary school in Korea. They solved and generalized the straight line peg puzzle.

Mathematically gifted elementary school students had the tendency to find a general structure using generic examples rather than find inductive rules. They did not have difficulty in expressing their thoughts in letter expressions and in expressing their answers in written language; and though they could estimate general patterns while performing generalization of two factors, it was revealed that not all of them can solve the general formula of two factors. In addition, in the process of discovering a general pattern, it was confirmed that they prefer using diagrams to manipulating concrete objects or using tables.

But as to whether or not they verify their generalization results using generalized concrete cases, individual difference was found. From this fact it was confirmed that repeated experiments, on the relationship between a child's generalization ability and his/her behavioral pattern that verifies his/her generalization result through application to a concrete case, are necessary.

* **Key words** : peg puzzle(페그퍼즐), the mathematically gifted(수학 영재), algebraic thinking (대수적 사고), generalization(일반화)

논문접수 : 2007. 4. 2
심사완료 : 2007. 5. 3