대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 2, 111-125. May 2007

Logo와 DGS의 매개 모델과 오류 사례

김 화 경* · 송 민 호**

본 논문에서는 컴퓨터와 수학교육의 관계를 구성주의 관점에서 바라보는 '컴퓨터와 수학교육'에 대한 논의와 그에 대한 구체적 사례를 다룬다. 먼저 대표적인 '컴퓨터와 수학교육' 환경인 Logo와 DGS에 대해 각각의 특징을 살펴보고, 두 환경의 통합 필요성을 제기하고 통합할 수 있는 공통된 관점에 대해 논의한다. 나아가 이 공통된 관점을 적용하여 두 환경을 연결할 수 있는 매개 모델(Circle model)을 만들어 보고 표현들 사이의 수학적 관계를 논의한다. 특별히 여기에서는 원, 타원, Cardioid 등의 평면 곡선을 여러 표현으로 구성하고 탐구해본다. 또한 곡선 둘레의 길이에 관한 오류 사례에서 매개 모델의 역할과 의미를 논의한다.

Ⅰ. 들어가며

김홍종(2004)에 의하면 곡선은 조건을 만족하는 '1차원 집합'이라는 정적인 의미와 함께 시각에 따라 변하는 점이라는 동적인 의미를 함께 가진다. 정적인 의미에서 곡선은 일정한 관계를 만족시키는 점들의 집합이며 동적인 의미에서는 시각에 따른 행동의 자취이다. 일반적으로 학교수학에서는 곡선을 정적인 관점에서 분석의 대상으로 다루는 경향이 있다. 여러 가지 이유가 있을 수 있지만 종이와 연필 중심의 학습 환경도 그 이유 중에 하나였을 것이다.

이 글은 '컴퓨터와 수학교육'이라는 연구 관점에서 지필 환경에 비해 보다 다양한 동적 표현이 가능한 컴퓨터 환경에서 곡선에 대한 동적인 접근 방법에 대해 논의한다. 먼저 선행연구로 수학 실험 컴퓨터 환경인 마이크로월드, 특별히 기하적 현상을 다루는 두 가지 마이크로월드에 대해 살펴본다. 하나는 국소적 행동을 표현할 수 있는 거북 환경 Logo(Papert, 1980)이고 다른 하나는 점들 사이의 관계를 표현할 수 있는 동적 기하 환경(dynamic geometry system; DGS; Goldenberg, Cuoco, 1998)이다. 또한 우리는 두 환경 각각의 장점과 차이점, 그리고 통합에 대한 이전의 이론적 논의를 간략히 소개하고, 통합 환경 설계의 예를 살펴본다.

이 논문에서 우리는 두 가지 환경에서 동일한 평면 곡선을 이해하는 각각의 방식과 둘을 연결할 수 있는 연결 고리를 찾고, 그와 관련한 표현들 사이의 수학적 관계를 알아본다. 나아가 통합 환경에서 일어날 수 있는 오류 사례를 중심으로 통합 환경이 가지는 교육적 의미를 살펴본다.

* 한국교육과정평가원, hkkim@kice.re.kr
** 서울대학교 대학원, mino@snu.ac.kr

II. 이론적 배경과 마이크로월드

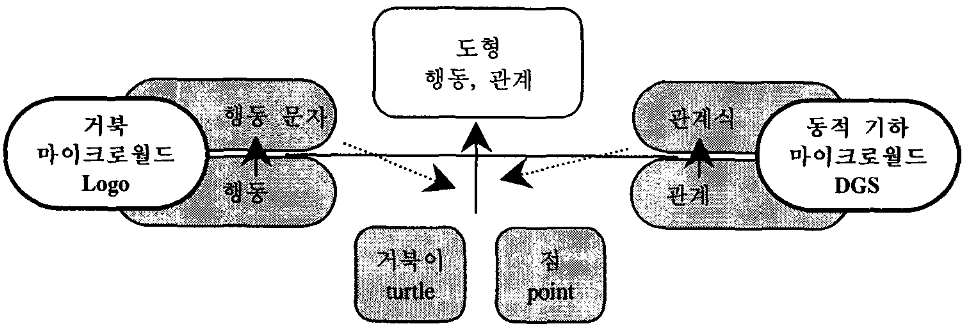
'컴퓨터와 수학교육'(김화경, 2006; 조한혁 2004)은 교수보다는 학습을 강조하는 입장으로 특별히 도구의 역할을 강조한다. 이는 Borba, Villarreal(2004)의 'humans-with-media'와 통한다. '컴퓨터와 수학교육'과 'humans-with-media'은 모두 도구로부터의 일방적인 교수보다 도구와 인간이 상호작용하는 수학교육을 강조한다는 공통점이 있다. 특별히 김화경(2006)은 '컴퓨터와 수학교육'의 실천적 방법으로 '구성'과 '조작'의 통합을 논의하고 있다. 즉 직접 만드는 구성과 다시 이것을 변화시키는 조작의 일련의 경험을 바탕으로 전개되는 수학교육을 말하고 있다.

'컴퓨터와 수학교육'이 이루어지는 환경을 마이크로월드(microworld)라고 한다. 일반적으로 마이크로월드라는 개념은 가상 실험을 위한 컴퓨터 환경이라는 의미로 사용되며, 수학교육 측면에서 마이크로월드는 '강력한 아이디어'를 내재하는 컴퓨터 환경이라고 정의할 수 있고 대표적으로 Logo과 DGS가 있다. 이 두 가지 마이크로월드는 모두 평면 기하 현상을 구성하고 조작하는 수학 실험 컴퓨터 환경으로, Logo는 구성을 DGS는 조작을 보다 강조하는 환경이다. 두 환경은 모두 평면 기하를 다룬다는 공통점이 있지만 Logo는 순간적·국소적 거북 행동을 만드는 환경인 데 비해 DGS는 점들 사이의 관계 보존 환경이라는 차이점도 있다. 예를 들어 Logo에서 '가자', '돌자' 기본 명령은 거북이의 행동을 만들고 그 행동을 합성하여 '별' 자취를 만들 수 있다. 반면 DGS에서는 하나의 원 위에 존재하는 일정한 간격의 다섯 개 점들이 특정 관계로 연결되어 있을 때 '별'이 된다. '별'이라는 대상을 만드는 목적은 같지만 각각의 구성 방식은 행동(action)과 관계(relation)로 차이가 있다. 마찬가지로 조작 방법도 명령 수정과 마우스 끌기로 다르며 조작을 통한 반응 및 결과도 차이가 있다. 다시 말하면 이 두 환경은 같은 것(별)에 대한 서로 다른 표현 환경인 셈이다.

Abelson, diSessa(1980)은 우리가 하나의 대상에 대한 서로 다른 표현을 가지는 것에 대한 이점을 다음과 같이 설명하고 있다:

> 우리가 같은 것에 대한 서로 다른 두 개의 표현을 가질 때 마다, 우리는 하나의 표현을 다른 것으로 번역하고 두 표현을 비교하여 많은 것을 배울 수 있다. 두 표현들 사이의 묘사를 이동하는 것은 어떤 표현에도 속하지 않는 통찰을 자주 던져준다. (p. 105)

Logo와 DGS 통합의 시도로 Sherin(2002)은 Logo의 관점에서 DGS를 설계하고 있다. 또한



[그림 II-1] 거북 마이크로월드와 동적 기하 마이크로월드

김화경(2006)과 송민호, 김화경(2006)은 언어적 명령 체제 인터넷 환경으로 Logo와 DGS의 통합을 논의하고 있다. 특별히 김화경(2006)은 Logo의 행동 명령을 행동 문자(action letter)로 나타내고, 규칙을 통해 행동 문자를 조작하여 재귀적 패턴을 만들 수 있는 표현의 수준 상승 환경을 설계하고 있다. 또한 점들 사이의 관계 부여 방식을 대칭과 중점이라는 기하적 방식을 넘어 대수적 관계식을 이용할 수 있는 환경으로 설계하고 있다. 나아가 이 두 가지 환경의 통합 환경을 설계·구현하고 있다.

이 통합 환경의 특징은 [그림 II-1]과 같이 나타낼 수 있다. 거북 행동을 만드는 환경인 Logo는 행동 문자 환경으로 확대되어 거북 마이크로월드를 이루게 되고, 점들 사이의 관계 보존 환경인 DGS는 관계식으로 확장되어 동적 기하 마이크로월드를 이루게 된다. 나아가 이 두 환경은 서로에게 영향을 주어 한 환경으로 통합된다.

행동 문자와 더불어 Cho, Kim, 그리고 Song (2006)은 '가자', '돌자'의 거북 행동을 벡터 관점에서 이해하고 단일한 명령으로 표현할 수 있는 행동 벡터 명령 'move'를 제안하고, 이 환경에서 함수의 그래프에 대한 질적 접근을 사례를 통해 논의하고 있다. 이는 이전의 수학 교육에서 함수의 그래프에 대한 접근이 대응이라는 양적 측면을 지나치게 강조하는 데 비해 변화라는 질적 측면을 강조하려는 의도이다.

이 때, 'move' 명령은 행동의 벡터 표현이다. 'move a, b'라는 명령은 거북이를 가로축으로 a만큼, 세로축으로 b만큼 움직인다. 즉 'move a, b'는 벡터의 좌표 표현 (a, b)에 해당한다. 만약 가로축의 변화량을 일정하게 고정한다면 세로축의 변화량에 따른 거북이의 행동 자취는 함수의 그래프를 그리게 된다(Cho et al, 2006). 또한 가로축과 세로축의 변화량을 삼각함수와 연결하여 고려한다면 다양한 평면 곡선에 대한 벡터 표현을 구현할 수 있다(송민호, 김화경, 2006).

이와 더불어 송민호, 김화경(2006)은 동적 기하 마이크로월드에서 대수적 관계 부여를 위한 '좌표' 명령을 도입했다. 이는 관계 명령 대수식으로 점들 사이의 관계를 규정한다. '좌표'는 동적 기하 마이크로월드에서 표현의 수준 상승 명령이며, 'move'라는 벡터 표현은 '가자', '돌자'의 행동을 나타내는 다른 표현으로 볼 수 있다. 이제 구체적 예를 통해 이 두 가지 표현이 어떻게 마이크로월드에서 구현되고 어떤 방법으로 둘을 연결할 수 있으며 수학적으로 어떤 관계를 가지고 있는 지 알아보자.

III. 매개 모델에 내재된 표현들 사이의 관계

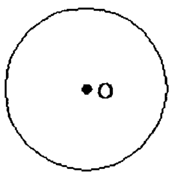
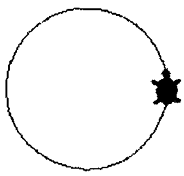
Cho et al. (2006)은 'move' 명령을 이용해 함수의 그래프를 상호변화적으로 접근하는 방법에 관해 논의하고 있다. 동적인 의미에서 함수의 그래프는 x축 방향의 변화량이 일정할 때, y축 방향의 변화량에 따른 평면 곡선으로도 볼 수 있다. 즉, 함수의 그래프는 'move 1, b(t)'들의 순차적 합성으로 볼 수 있다. 이 때 마이크로월드에서는 시간 t에 따른 'b(t)'의 값을 변화시키면서 함수의 그래프를 구성하고, 곡선의 증가, 감소와 요철을 확인할 수 있으며, 나아가 DGS와 연동하여 마우스 조작을 통한 실험이 가능하다.

이제 보다 일반적인 평면 곡선에 대해 '관계'의 정적인 표현과 '행동'의 동적인 표현 사이의 관계를 살펴보자.

1. 행동 벡터와 원

원은 '한 점으로부터 거리가 일정한 점들의 모임'이라는 정적인 의미와 함께 동적인 의미에서 시간에 따라 일정하게 운동하는 점의 자취로 볼 수 있다. 이 때 원을 결정하는 특징은 위치와 크기로 나눠볼 수 있다. 특별히 여기에서 우리는 도형의 합동을 고려하여 위치를 제외하고 원의 결정조건을 크기, 즉 반지름의 길이라고 가정한다. <표 Ⅲ-1>은 통합 마이크로월드에서 같은 원에 대한 관계와 행동 표현을 나타낸다. 이 때 곡선을 운동이라는 동적인 관점으로 나타내는 것은 DGS(관계) 표현보다 Logo(행동) 표현이다.

<표 Ⅲ-1> 관계와 행동 표현: 원

DGS(관계)	Logo(행동)
	
반지름의 길이가 R인 원	반복 360 { 돌자 1; 가자 a }
$x^2+y^2=R^2$	for i=1 to 360 move -a*Sin(i), a*Cos(i) next

이제 관계와 행동 표현 간의 번역을 생각해 보자. DGS 관계 표현을 Logo 행동 표현으로 바꾸기 위해서는 한 번에 움직이는 거리(a)를 구해야 하고, Logo 행동 표현을 DGS 관계 표현으로 바꾸기 위해서는 반지름의 길이(R)를 구해야 한다. 이 때, 두 변수 a, R 사이에 다음과 같은 관계식을 생각해 볼 수 있다.

$$2\pi R = 360a$$

즉, 원 둘레의 길이와 거북이가 360 걸음에 움직인 총 거리가 같아야 한다는 것이다.[1] 이 관계식을 정리하면 $a=\frac{2\pi R}{360}$ 이며 $R=\frac{360a}{2\pi}$ 이다.

Abelson, diSessa (1980)은 거북 기하를 설명하면서 거북 기하와 좌표 기하를 연결하는 표현으로 벡터 기하를 설명하고 있다. 예를 들어 원 운동을 나타내는 <표 Ⅲ-1>의 거북 명령은

돌자 1; 가자 a; 돌자 1; 가자 a;…; 돌자 1;
가자 a;

이라고 볼 수 있다. 이 때, 거북이의 초기 방향을 기준으로 하여 '돌자 i; 가자 a'를 v_i 라는 벡터 표현으로 간주하면 원 운동을 하는 거북이의 자취는 $\sum_{i=1}^{360} v_i$의 결과로 나타낼 수 있다.

거북이의 초기 위치를 북쪽으로 할 때, 벡터 v_i를 좌표로 나타내면 $v_i=(-a\sin i,\ a\cos i)$이고 이는 거북 행동

'move -a*Sin(i), a*Cos(i)'[2]

과 같다. 즉 원 $\sum_{i=1}^{360} v_i$은 다음과 같다.

```
for i=1 to 360
  move -a*Sin(i), a*Cos(i)
next
```

1) 여기서는 360각형인 거북이의 자취와 원을 같은 것으로 간주한다.
2) 각도의 크기를 나타내는 두 가지 방법에 따라 컴퓨터에서 삼각함수를 표현하는 방법에 차이가 있을 수 있다. 이 글에서는 모든 각도를 육십분법으로 표시한다. 통합 환경에서 사인함수는 Sin으로 코사인함수는 Cos로 나타낸다.

일반적으로 거북 명령 v는 다음과 같은 형태의 표준형[3)]으로 나타낼 수 있다.

v= 돌자 r_1; 가자 f_1; 돌자 r_2; 가자 f_2; … ; 돌자 r_n; 가자 f_n;

초기 거북이의 상태에 따라 표준형으로 나타나는 자취의 위치는 달라지겠지만 그 모양은 합동이다. 이 때, 위의 표준형을 아래와 같이 벡터 v_i를 이용하여 표현하자.

$$v_i = \text{돌자 } \sum_{j=1}^{i} r_j;\ \text{가자 } f_i;$$
$$= \left(-f_i \sin \sum_{j=1}^{i} r_j,\ \ f_i \cos \sum_{j=1}^{i} r_j\right).$$

즉, 행동 벡터로 표현하면,

move $-f_i$*Sin($\sum_{j=1}^{i} r_j$), f_i*Cos($\sum_{j=1}^{i} r_j$).

거북 행동 v는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(-f_i \sin \sum_{j=1}^{i} r_j,\ \ f_i \cos \sum_{j=1}^{i} r_j\right)$$

```
for i=1 to n
  move -f_i*Sin( Σ_{j=1}^{i} r_j), f_i*Cos( Σ_{j=1}^{i} r_j)
next
```

즉 Logo 명령으로 만들 수 있는 자취는 모두 sin과 cos을 이용해 move 명령으로 그릴 수 있다. 그러나 역으로 move 명령으로 만들 수 있는 자취를 Logo의 '가자', '돌자' 만을 이용해서 그리기는 쉽지 않다. 그 이유는 '돌자'의 변수인 각의 크기를 알아내야 하기 때문이다. 각의 크기를 알아내기 위해서는 벡터 표현으로부터 피타고라스 정리와 삼각함수(역함수)를 사용해야한다. 이러한 불편함을 무시한다면 거북 행동을 나타내는 기본 명령(가자, 돌자)과 행동 벡터 명령(move)은 다른 목적으로 설계되었지만 거북 행동을 만드는 같은 명령으로 볼 수 있다. 즉 두 명령은 거북 행동을 나타내는 다른 표현인 것이다. 두 명령의 차이는 거북이의 머리 방향이 바뀌는가하는 점이다. 하지만 이 차이는 꽤 큰 차이일 수도 있다.[4)]

2. Circle model과 타원

송민호, 김화경(2006)은 Circle model을 제시하여 Logo와 DGS 연결을 시도하고 있다. 이 모델은 평면 곡선을 벡터 합성의 관점에서 바라보려는 시도로 두 환경을 연결한다는 의미에서 매개 모델(mediation model)이라고 볼 수 있다. 예를 들어 평면 곡선 타원은 크기가 다른 두 원에서 같은 속력으로 서로 다른 방향으로 움직이는 두 벡터의 합으로 표현할 수 있다. <표 Ⅲ-2>의 왼쪽은 두 초점으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 모임인 타원을 DGS 내장 함수를 이용하여 시각적으로 나타내는 그림이며, 가운데는 반지름의 길이가 각각 R, r인 두 동심원 위를 서로 반대 방향으로 움직이는 두 점과 이 두 점으로부터 합성되는 점의 자취(타원)로 타원을 나타낸 그림이다. 오른쪽은 Circle model에서 두 점들의 운동을 거북 행동

3) 김화경(2006)은 거북 상태를 정의하고 거북 명령을 거북 상태 위에서의 변환으로 대수적으로 정의하고, 표준형을 논의한 바 있다. 즉, 작용과 결과의 관점에서 같은 결과를 일으키는 거북 명령을 하나의 대표적 표현으로 나타냄을 논의한 것이다. 하지만 여기서는 거북이가 그리는 자취가 다르면 다른 명령을 간주한 표준형을 생각하고 있다.

4) 우리는 오류 사례를 통해 그 차이를 논의하고, 또한 거북이 머리 방향이 벡터 방향으로 바뀌는 명령의 필요성을 살펴본다.

명령으로 나타내고 이를 합성의 관점에서 묶은 명령과 행동의 자취이다. 우리는 가운데 그림처럼 두 원을 이용해 평면 곡선 자취를 만드는 매개 모델을 Circle model이라고 부른다.

이 때 <표 Ⅲ-2>의 마지막 행에서 두 표현 변수들 사이의 관계는 앞선 원의 경우와 같이 원주 조건에서 비롯된다. 즉, <표 Ⅲ-2>는 타원을 두 벡터의 합성의 관점으로 살펴보고 이를 거북 행동으로 표현하고 있다. 하지만 이 중 타원이 아닌 것이 있다.

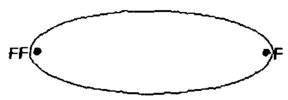
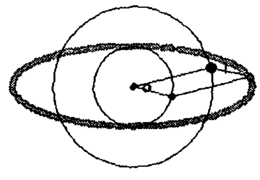
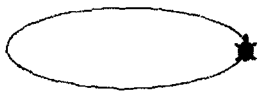
실제 모든 크기의 타원은 Circle model의 두 원의 크기를 조절하여 얻을 수 있으며, 또한 그 각각은 모두 거북 행동으로 표현 가능하다. <부록>은 장축과 단축의 길이가 각각 a, b인 타원을 그리는 절차를 설명하고 있다. 이 때 Circle model의 두 원 반지름의 길이(R, r)은 각각 다음과 같다.

$$R=\frac{a+b}{2},\quad r=\frac{a-b}{2}$$

3. Circle model과 평면 곡선

Circle model은 두 원의 크기를 조절하거나 두 원 위를 움직이는 점의 속도 관계를 조절하여 여러 가지 곡선을 만들어 낼 수 있다. 또한 그 각각의 곡선은 거북 행동 명령으로 번역될 수 있다. 예를 들어 [그림 Ⅲ-1]은 Cardioid 곡선을 그리는 세 가지 방법을 나타낸 것이다. 하나는 크기가 같은 두 동전을 붙여서 하나를 중심으로 다른 하나를 돌릴 때 움직이는 동전 위의 한 점의 자취를 나타낸 것이다. 다음은 동전 상황을 벡터의 합성의 관점에서 표현한 것이다. 이는 두 원을 이용하는 Circle model이며 한 점에 대해 다른 한 점의 속도는 -2배이다. 마지막 표현은 이 Circle model을 거북 행동으로 번역한 것이다. 즉 [그림 Ⅲ-1]은 물리적 현상을 DGS로 구현하고 이를 Circle model과 거북 운동으로 번역한 그림이다. 원을 행동 벡

<표 Ⅲ-2> 관계와 행동 표현: 타원

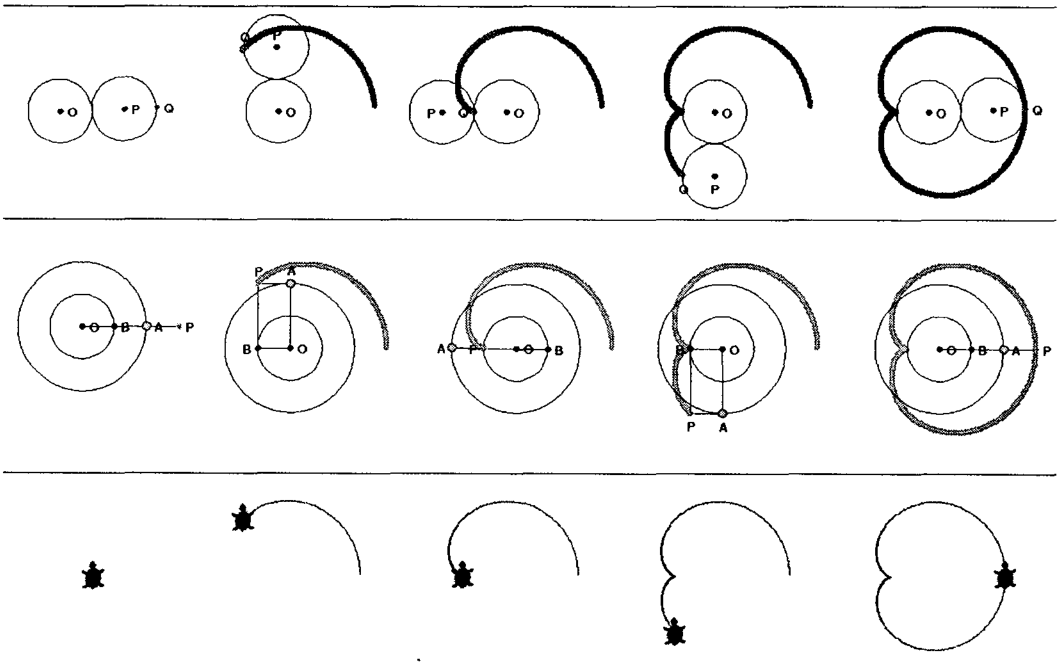
DGS(관계)		Logo(행동)
		
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	반지름의 길이가 R인 원 반지름의 길이가 r인 원 으로부터의 합성 자취	for i=1 to 360 move - k*Sin(i), k*Cos(i) move - l*Sin(i), - l*Cos(i) next for i=1 to 360 돌자 i; 가자 k; 돌자 -2*i; 가자 - l; 돌자 i; next
$2\pi R=360k,\ R+r=a$ $2\pi r=360l,\ R-r=b$		

터나 거북 명령으로 이해하고 있다면 Cardioid 역시 마찬가지라는 것을 알 수 있다. 이 때 거북이가 원을 몇 바퀴 도는 지 어떤 속도인 지를 주의해야 한다. Cardioid 뿐만 아니라 많은 닫힌곡선은 이와 같이 Circle model에서 원 운동의 합성으로 표현 가능하며 이들은 모두 거북 행동으로 나타낼 수 있다.

대체로 DGS는 수학 실험에 적절한 환경이다. 예를 들어 Circle model을 통해 특정 조건을 만족하는 점의 자취를 실험할 수 있다. 마찬가지로 타원 위의 점을 움직이는 실험도 가능하다. 이에 비해 시각에 따라 거북이를 움직이는 Logo는 거북이의 운동 자취의 길이를 구하기에 용이하다. 거북이가 움직인 총 거리를 계산하면 그 길이를 구할 수 있다고 추측할 수 있다. 하지만 이때는 꼭 주의할 점이 있다. 다음으로 거북이가 움직인 거리와 곡선 둘레의 길이를 연결한 사례를 살펴보도록 하자.

IV. 오류 사례

<표 Ⅲ-2>의 타원에 관한 세 그림은 시각적으로 같아 보이지만 실제로 구성 방법에는 차



for i=1 to 360	for i=1 to 360
move - k*Sin(i), k*Cos(i)	돌자 i; 가자 k;
move -2* l*Sin(2*i), -2* l*Cos(2*i)	돌자 i; 가자 2* l; 돌자 -2*i;
next	next

$$2\pi R = 360k,\ 4\pi r = 360l,$$

[그림 Ⅲ-1] Cardioid의 여러 가지 표현

이가 있다. 그 차이는 구성 절차에 대한 통찰이 있어야 발견할 수 있다. 연구자는 타원의 구성 절차를 통해 타원 둘레의 길이를 거북이가 움직인 총 거리로 나타낼 수 있을 것이라고 추측하게 되었고 이를 통해 타원 둘레의 길이를 구하고자 하였다.

<부록>과 같은 간단한 계산을 통해 타원 둘레의 길이는 $2\pi(R+r)$이라고 추측할 수 있다. 이는 단축의 길이($R-r$)에 관계없이 타원 둘레의 길이가 장축의 길이($R+r$)에 따라서만 정해진다는 이상한 결론에 이른다. 이는 타원을 찌그러진 원이라고 인식하게 되는 직관과 관계된다. 즉, 원을 찌그러트려도 장축의 길이만 일정하면 둘레의 길이가 보존된다는 오류에 이르게 된다. 그러나 알려진 대로 타원 둘레의 길이는 <부록>과 같은 간단한 식으로 구할 수 있는 것이 아니다(Weisstein, Eric W. "Ellipse." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Ellipse.html).

그렇다면 우리는 어떤 논리적 모순을 가지고 있는가? <부록>에 제시된 일반적 타원 만들기 과정과 둘레의 길이 계산 과정은 어떤 논리적 오류를 가지고 있는가? 우리는 마이크로월드를 이용하는 학생들은 그 논리적 오류를 발견할 수 있는지, 그렇다면 이 때, 매개 모델은 어떤 역할을 하는지를 알아보고자 하였다. 구체적으로 이 오류가 학생들에게 진지하게 받아들여질지 알아보려 하였다.

1. 연구 방법

서울대학교 과학영재교육센터 정보분과 학생들을 대상으로 <부록>에 제시된 논리의 오류를 찾아보는 테스트를 실시하였다. 이 학생들은 중학교 1학년과 2학년 학생이었다. 과학영재교육센터는 중학교 1학년부터 교육이 실시되므로 이 학생들은 1년 내지 2년 정도 정보 분과 교육을 받고 있는 학생들이었다. 다시 말해 1년 내지 2년 정도의 마이크로월드[5] 사용 경험을 가지고 있었으며, 특별히 행동 벡터 명령인 'move'와 관련된 경험은 테스트가 치러지기 전 3시간뿐이었다. 하지만 이 3시간 동안 학생들은 Circle model에 친숙한 상태여서 테스트에서는 <부록>과 같이 Circle model에 관한 설명은 생략하였다.

2006년 10월(중학교 2학년)과 11월(중학교 1학년)에 'move' 명령과 Circle model을 이용한 평면 곡선 만들기에 대한 수업을 3시간 진행한 후 간단한 테스트를 실시하였다. 그 테스트 문제 중에 <부록>이 하나의 문항이었다. 테스트를 치른 학생 수는 각 학년별로 14명이었으며, 학생들은 개별적으로 종이에 자신의 의견을 적어 제출하였다. 이 때, 학생들은 컴퓨터를 이용하여 인터넷으로 마이크로월드에 접근하여 Circle model을 이용할 수 있었고 그 전에 진행된 수업 교재를 확인할 수도 있었다. 교사(연구자)는 테스트 문제와 관련된 간단한 질문에는 답을 해 주었다. <부록>은 테스트 중 일부여서 이에 관한 별도의 녹화나 녹음된 인터뷰는 실시하지 않았다.

테스트가 실시된 후 타원 이외의 곡선에 대한 수업을 계속 진행하면서 학생들을 관찰하였다.

2. 연구 결과

<부록>에 제시된 논리에 대한 자신의 생각을 묻는 질문에 <부록>이 오류가 없고 '참'이

5) 마이크로월드는 교육인적자원부(2002a, b)에 나오는 Logo 환경을 수정한 JavaMAL(http://www.javamath.com) 환경이다. 이 환경은 학생들의 수업이 진행된 기간 동안 계속적으로 수정, 보완되었다.

라고 답한 학생은 각각 5명(1학년)과 4명(2학년)이었으며, '거짓'이라고 답하고 오류를 나름대로 지적한 학생은 각각 6명(1학년)과 5명(2학년)이었다. 나머지 학생들은 답을 유보하거나 자신의 생각을 적지 않았다.

[그림 Ⅳ-1]은 '참'과 '거짓'이라고 답한 학생들 중 각각 2명의 답안지이다. '참'이라고 답한 학생들은 결과가 직관과 상충한다는 것은 인지하고 있었다. 그러나 논리적 모순을 찾아보려고 노력했지만 발견 못했다고 적고 있다. 이에 비해 '거짓'이라는 답을 쓴 학생들 중에는 정확하게 어떤 논리적 오류가 있는 지를 발견한 학생들이 있었다. 특히 '거짓'이라고 답을 한 학생의 답안지들 중에 왼쪽은 수식을 이용해 자신의 의견을 표현하고 있고, 오른쪽은 직관적으로 논리적 오류를 그림으로 표현하고 있다.

[그림 Ⅳ-2]는 '참'이라고 답한 학생의 답안지 중에서 보다 적극적으로 주어진 논리가 옳다는 것을 부연 설명하고 있는 예이다. 특히

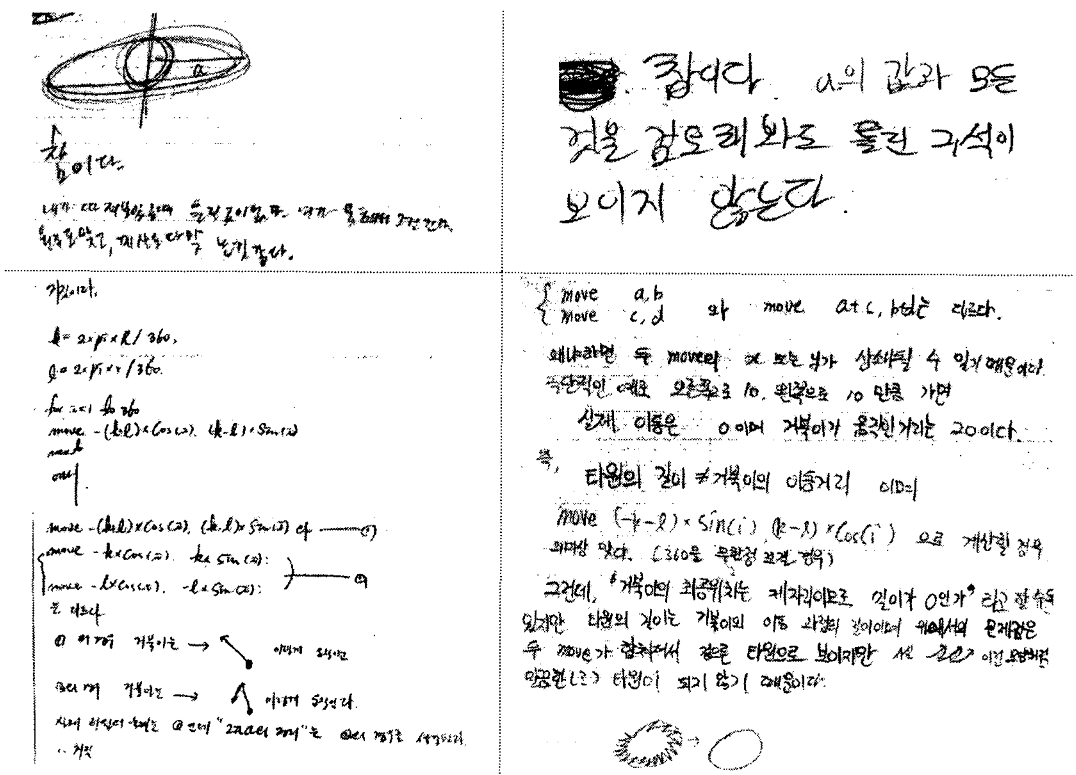
"1°짜리 동경을 그리면

[타원 구간]

=[A 원의 구간 길이] + [B 원의 구간 길이]

가 된다."

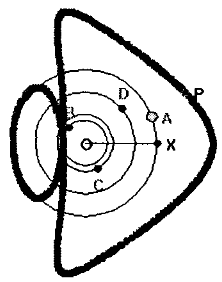
는 표현은 구간을 나누어 문제를 해결하는 전략을 사용하려는 시도로 볼 수 있다. 물론 이 학생이 제시하고 있는 논리는 사실 <부록>에 제시된 논리와 같다. 하지만 자기 나름의 생각을 그림과 함께 제시하면서 <부록>의 논리를 옹호하고 있다는 점이 특이하다. 이 학생은 '타원 둘레의 길이가 단축의 길이에 상관없다' 는 직관에 반하는 결과보다는 논리적 전개 과정에 집중하여 "위의 논리가 타당하다고 생각



[그림 Ⅳ-1] 학생들의 반응

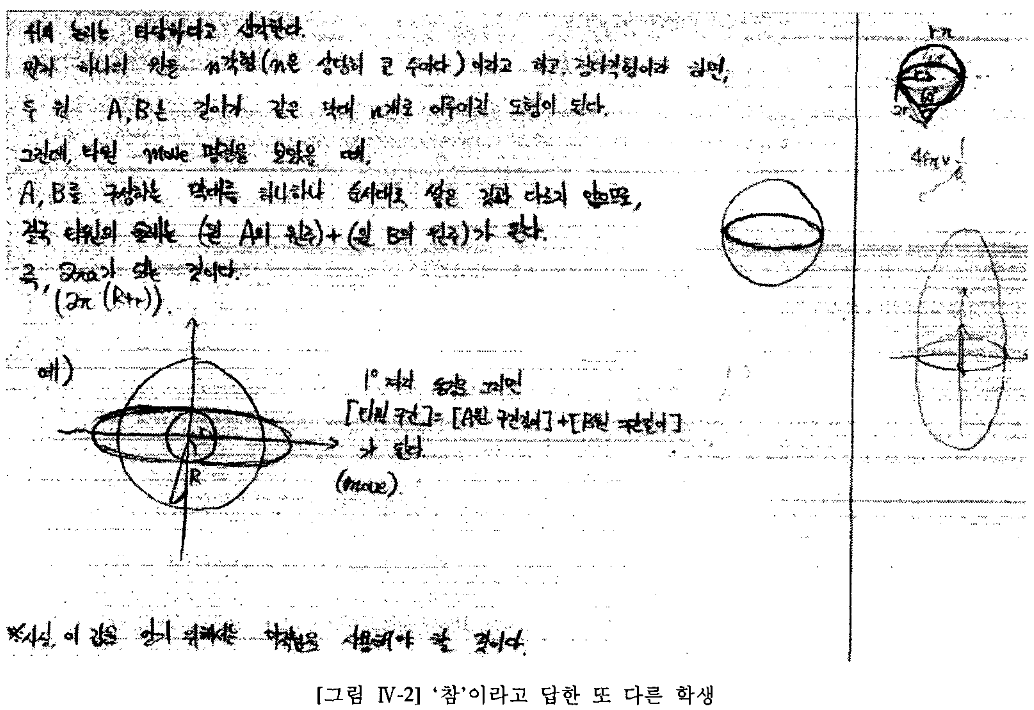
한다."라는 의견을 제시하고 있다. 이 학생은 이러한 부조리를 해결하고자 교사(연구자)에게 도움을 구하기도 했지만 실제적인 도움은 몇 주 후에나 가능했다.

교사(연구자)는 <부록>이 포함된 테스트를 실시하고 몇 주가 지나(2007년 1월) 다시 같은 [그림 Ⅲ-1]의 Cardioid나 [그림 Ⅳ-3]의 물고기 모양을 거북 행동과 타일 행동으로 그리는 과제를 진행하였다. 특히 [그림 Ⅳ-3]은 Circle model의 발전된 형태로 네 개의 원 위의 점들의 움직임을 벡터로 표현하고 이를 합성하여 물고기 모양의 곡선을 만드는 그림이다. 즉, 점 A에 따라 다른 점들(B, C, D)의 위치가 결정되고 각각의 좌표를 더하여(합성하여) 점 P의 위치가 결정된다. 다시 각각의 점들의 움직임을 행동 벡터 'move' 명령으로 나타내면 거북에게 물고기 모양의 곡선 운동을 명령할 수 있다.



[그림 Ⅳ-3] 물고기 모양 곡선

교사(연구자)는 <부록>과 같은 논리로 하면 Cardioid나 [그림 Ⅳ-3] 물고기 모양 곡선 둘레의 길이도 손쉽게 구할 수 있을 것이라고 학생들에게 말하였다. 즉, 원 네 개의 합성을 통한 물고기 모양 곡선은 네 원 둘레 길이의 합으로 구할 수 있다는 것이다. 이는 이제까지의 수학 경험에 비추어보면 다소 이상한 결론이다. 곡선 둘레의 길이를 구하는 것은 꽤나 복잡하고 어렵다는 경험을 가지고 있기 때문에 네 원 둘

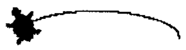


[그림 Ⅳ-2] '참'이라고 답한 또 다른 학생

레 길이의 합이라는 결론은 학생들에게는 생소하고 직관적으로 오류가 있을 것으로 생각되었다.

연구자의 말에 학생들은 <부록>이 포함된 테스트를 끝내고 약 한 달가량의 시간이 흘렀음에도 <부록>의 논리적 오류를 정확하게 기억하고 있었다. 특히 몇몇 학생들은 그 논리의 모순을 교사(연구자)가 알려 주기를 원하였다.

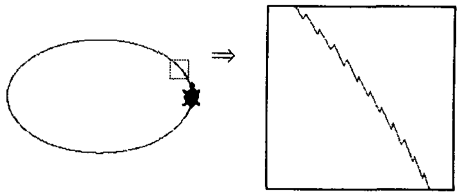
이 때, 연구자(교사)는 하나의 명령[6]을 실행하였다. 이 명령 동영상은 특별히 제작된 것이 아니라 타원을 그리는 거북이의 움직임을 천천히 보여주는 것이었다. 즉 <부록>에 제시된 명령을 단계별로 천천히 실행하는 것이었다.



[그림 Ⅳ-4] head

그러나 한 가지 큰 차이는 각 단계에서 거북이는 움직이려는 방향을 향하여 머리를 돌리고 난 후 움직인다. [그림 Ⅳ-4]는 타원을 그리는 동영상의 중간 화면으로써 각각의 'move' 명령에 대하여 거북이의 머리 방향을 바꾸는 'head[7]' 명령이 추가된 상황에서 타원을 그리는 거북 행동의 한 순간이다.

이 동영상을 보자마자 학생들은 어떤 오류가 발생했는지 금방 알아내었다. 교실에서는 "아~!"라는 작은 탄성이 들렸다. 이는 아마도 <부록>의 논리적 오류를 발견했다는 표현이거나 또는 자신이 이미 찾은 논리적 오류에 대한 확신의 표현이었을 것이다.



[그림 Ⅳ-5] 거북 행동을 확대하여 관찰

[그림 Ⅳ-5]는 이러한 오류의 근본적인 원인을 보여주고 있다. 거북 명령에 의한 결과물이 나온 상태에서 화면 확대 명령을 통하여 원하는 부분을 확대하여 관찰한 결과이다.

3. 논의

<부록>의 오류는 사실 과정과 결과를 구분하지 않아서 생기는 것이다. 즉 대수적 관점에서

move a, b + move c, d = move a+c, b+d

이지만 기하적 관점에서 좌변과 우변의 거북 행동의 자취는 차이가 있기 때문이다. 행동의 결과인 위치는 같지만 중간의 절차는 다르므로 그리는 자취는 차이가 있다. Watson, Spirou, 그리고 Tall (2003)은 과정과 그에 따른 결과를 인식하는 것이 벡터 교육의 핵심임을 지적하고 있다. 같은 맥락에서 벡터 교육을 논의할 수 있을 것이다. 이는 이 마이크로월드가 거북 행동에 대한 대수적 표현과 기하적 표현이 동시에 가능하기 때문이다.

우리는 아직도 오류 사례와 매개 모델이 지니는 교육적 의미를 모두 이해하지는 못했다. 그러나 분명히 알 수 있는 것은 DGS와 Logo의 표현이 동시에 가능한 이 마이크로월드가 없었다면, 타원 둘레의 길이를 <부록>과 같은 방법

6) 여기서 명령은 순간순간의 거북 행동을 확인할 수 있도록 거북 명령을 '천천히' 실행시키는 것이다. 보는 사람은 마치 동영상을 보는 것처럼 느낄 수 있다.
7) 'head a, b'는 'move a, b' 방향으로 거북이 머리를 돌리는 명령이다.

으로 구하려고 하지 않았을 것이라는 점이다. 즉, 마이크로월드는 연구자에게 <부록>과 같은 성급한 일반화에 관한 극적인 경험을 위한 필요조건인 셈이다. 이는 어느 정도 학생들에게도 마찬가지였을 것이다. 주목할 점은 <부록>을 진지하게 바라본다는 점이다. 실제로 타원이 컴퓨터에 그려진다는 사실과 거북이가 움직인 총 거리의 정확한 수학적 계산이 오류를 보다 진지하게 생각하도록 만들었을 것이다. 이 점은 매개 모델이 가지는 교육적 의의로 볼 수 있다.

<부록>과 같은 논리적 오류는 어느 정도 컴퓨터의 시각적 착각에 기인한다. 만약 높은 해상도와 큰 화면이 가능하다면 이러한 오류를 피할 수 있을 지도 모른다. 따라서 컴퓨터의 한계로 인하여 컴퓨터가 수학 교육에 미치는 부정적 영향을 생각해 볼 수도 있을 것이다. 그러나 오류로부터 배울 수 있고 오류 해결을 위해 국소적 절차 확인이 가능하도록 마이크로월드를 수정할 수 있게 된다는 점도 함께 생각해야 할 것이다.

이 예에서 타원이라는 완성된 결과를 중심으로 논리적 오류를 해결하려고 접근할 때와는 다르게 그리는 거북 행동 절차를 눈으로 확인하는 동영상에서 훨씬 빠른 이해가 일어났다. 연구자는 이런 예가 'proof without words'와 유사하다고 생각한다. 정적인 그림이냐 동적인 운동이냐의 차이가 있기는 하지만 절차적 언어를 통한 논리적 전개보다 직접적인 표현을 통한다는 점에서 일치한다. 특이한 점은 실제 테스트에서 논리의 모순을 제대로 발견한 학생들까지도 자신이 발견한 차이를 보다 크게 실감할 수 있었다는 것이다. <부록>의 잘못된 논리와 자신들이 찾은 올바른 논리의 차이는 그들이 생각했던 것 이상이었다.

우리는 오류를 통해 더 많은 것을 배우기도 한다. 이런 의미에서 연구자와 학생들은 이러한 오류 경험을 통해 새로운 '변화 가능 영역'(Mason, Johnston-Wilder, 2004)을 가지게 되었다고 볼 수 있다. 앞으로 연구자와 학생들은 평면 곡선을 벡터 합성의 관점에서 접근할 때마다 곡선 둘레의 길이를 거북 행동의 관점에서 살펴보게 될 가능성이 많다.

이 오류 사례는 과학영재센터 학생들을 대상으로 했으며 그 중에서도 마이크로월드 사용 경험을 가진 정보 분과 학생들만을 대상으로 했으므로 일반화하기에는 한계가 있다. 표본 집단도 충분하지 않았으며 인터뷰나 관찰과 같은 심층적 연구 방법을 이용하지 못하여 결과 해석에도 한계를 가지고 있다. 오류가 학생들에게 진지하게 다가가고 있음을 확인하고 보다 의미 있는 결과를 도출되기 위해서는 연구 대상과 방법을 새롭게 점검해야 할 것이다.

V. 맺으며

이 글에서 우리는 'move'라는 거북 행동 명령에 대해 살펴보았다. 먼저 문헌을 통해 '컴퓨터와 수학교육'이라는 연구 분야에 대해 살펴보고, 대표적 환경인 Logo와 DGS 마이크로월드의 장점을 알아보았다. 나아가 이 두 가지 표현 환경을 하나로 통합할 수 있는 통합 마이크로월드를 논의하였다. 또한 두 가지 이상의 표현이 가능한 환경이라는 점을 원과 타원 등의 구체적 곡선을 통해 확인하였다. 구체적으로 Logo 기본 명령, 행동 벡터와 대수적 관계식 등의 번역 관계를 매개 모델(Circle model)을 중심으로 논의하였다. 먼저 'move' 명령이 '가자'와 '돌자' 조합의 다른 표현이라는 점을 확인하고 원을 행동과 관계의 두 가지 표현으로 나타내었다. 그리고 매개 모델을 이용해 타원

과 Cardioid 등의 평면 곡선을 나타내 보았다. 마지막으로 이 매개 모델을 이용해 타원을 만드는 행동 벡터 명령을 이용해 타원 둘레의 길이를 구해 보았다. 특별히 완성된 결과에 주목하여 타원 둘레의 길이를 생각할 때 발생하는 오류를 살펴보았고 학생들이 이 오류에 접근하는 방식을 테스트를 통해 알아보고 그 의미를 논의하였다.

이 글에서 우리는 Logo와 DGS의 통합 환경에서 두 표현의 연결을 위해 도입된 Circle model에 주목하고 있다. 이 모델은 마이크로월드에서 구현되는 여러 가지 기하적 상황 중에서 하나이지만, 여러 가지 평면 곡선의 구성 도구로 확장이 가능하며, '벡터의 합성과 분해'라는 평면 곡선을 이해하는 '강력한 아이디어'를 담고 있는 모델이다. Circle model에서는 마우스 끌기 조작의 결과로 점의 자취가 시각적으로 나타나지만, 다시 이 조작의 결과가 거북 행동을 이끌게 된다는 점에 주목할 필요가 있다. 다시 말해 Circle model은 DGS 표현에서 Logo 표현으로 이어주는 매개 모델이다. 또한 이 모델은 평면 곡선을 벡터 합성으로 조작하는 모델이며 나아가 다양한 평면 곡선을 구성할 수 있게 하는 모델이다. 또한 이 모델의 구성 원리는 물고기 모양 곡선과 같이 확장될 수 있으며 마찬가지로 이를 통해 물고기 모양 곡선의 Logo 표현이 가능하게 된다. Logo 표현은 곡선에 동적인 움직임을 부여한다.

구성주의적 관점을 수학교육과 연결하는 '컴퓨터와 수학교육'의 실천 방법으로 Circle model은 큰 의미를 가지며 이와 같은 매개 모델 개발 연구는 매우 중요하다. 이 글에서 살펴본 매개 모델은 비록 오류를 만들어내기는 하지만 매개 모델의 역할과 오류의 교육적 가치를 고려한다면 수학교육에서 매개 모델을 보다 주목할 필요가 있다.

참고문헌

교육인적자원부(2002a). **수학 3-가 익힘책.** 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 4-가 익힘책.** 대한교과서주식회사.

김홍종 (2004). **미적분학 1.** 서울: 서울대학교 출판부.

김화경 (2006). **'컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 교육학 박사학위 논문.

송민호 · 김화경(2006). 마이크로월드와 평면 곡선. **수학교육학논총 29**, 533-550.

조한혁(2003). 컴퓨터와 수학교육. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42**(2), 177-192.

Abelson, H., & diSessa, A. (1980). Turtle geometry. Cambridge, MA: MIT Press.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2004). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking.* NY: Springer.

Cho, H., Kim, H., & Song, M. (2006). Qualitative Approach to Graphs of Functions in a Microworld. *The SNU Journal of Education Research 15*, 129-140.

Goldenberg, E. P., & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*(pp. 351-368). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mason, J., & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education.* London: RoutledgeFalmer.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas.* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Sherin, B. (2002). Representing geometric constructions as programs: a brief exploration. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(1), 101-115.

Watson, A. Spirou, P. & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education 12*, 73-97.

A Mediation Model between Logo and DGS

Kim, Hwa Kyung (Korea Institute of Curriculum & Evaluation)
Song, Min Ho (Graduate School, Seoul National University)

In this article, we introduce an example about 'computers and mathematics education' and discuss its educational meaning. First, we survey two microworlds of Logo and DGS, which are two different representation systems for geometric phenomena. And we propose needs of connecting two microworlds with common perspective. And we suggest a mediation model that connects two representations in a microworld. Using this mediation model(Circle model), we construct a circle, a ellipse, and a cardioid with two different representations. It is important that the mediation model makes it possible that we translate descriptions from one representation into the other, and guess perimeters of planar curves. We also discuss roles and mathematical implications of this mediation model by error case in calculating perimeters of ellipses.

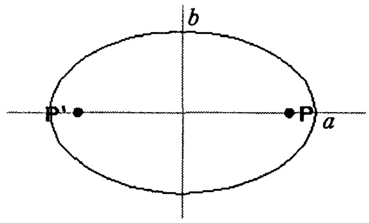
* **Key words** : computers and mathematics education('컴퓨터와 수학교육'), microworld(마이크로월드), Logo(로고), DGS(동적 기하 환경), mediation model(매개 모델), Circle model(원 모델), planar curve(평면 곡선), perimeter of ellipse(타원 둘레의 길이)

논문 접수: 2007. 3. 21
심사 완료: 2007. 4. 30

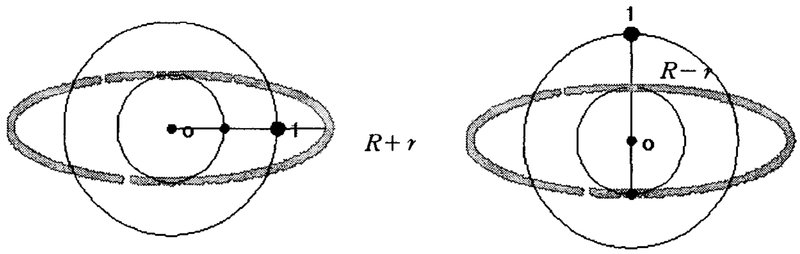
<부록>

아래 내용은 어떤 학생이 타원의 둘레의 길이를 추측하는 과정을 담은 것이다. 이 추측의 정당성에 대한 자신의 의견을 써라.

일반적으로 아래 그림과 같이 장축의 길이가 $2a$이고, 단축의 길이가 $2b$인 타원은 두 원의 합성이다.

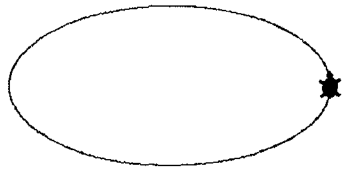


아래와 같이 두 원의 합성이며 $m=-1$이므로 아래의 그림에서 $a=R+r$이고, $b=R-r$임을 알 수 있다. 따라서 하나의 원은 반지름의 길이가 $R=\frac{a+b}{2}$이고, 다른 한 원은 반지름의 길이가 $r=\frac{a-b}{2}$이다.



이에 'Circle model'을 move 명령으로 바꾸면 다음과 같은 명령을 얻을 수 있다.

```
tt a, 0
k=2*pi*R/360  (2πR/360)
l=2*pi*r/360  (2πr/360)
for i=1 to 360
    move -k*Sin(i), k*Cos(i)
    move -l*Sin(i), -l*Cos(i)
next
```



즉, 거북이가 총 움직인 거리가 타원의 둘레의 길이와 같다. 거북이가 움직인 거리는 아래와 같다.

$$k\times 360 + l\times 360 = 2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R+r) = 2\pi a$$

즉, 원래 타원의 둘레의 길이는 $2\pi a$이고 단축의 길이에 관계없이 타원의 둘레의 길이는 일정하다.

위의 논리에 대한 자신의 의견을 써라.