대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 2, 91-109. May 2007

그림그리기 전략을 통한 초·중등수학의 연립방정식 지도 연결성 강화

권 석 일* · 임 재 훈**

이 논문은 이원일차연립방정식과 관련하여 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 분석한 것이다. 초등학교 수학 교과서와 중학교 수학 교과서에서 이원일차연립방정식 문장제가 다루어지는 방식을 연결성 측면에서 분석하고, 연결성을 강화하는 접근법을 제안하였다. 교과서 분석 결과 이원일차연립방정식 문장제에 대한 초등학교 수학 교과서와 중학교 수학 교과서의 접근법이 서로 연결되어 있지 않았다. 이에 이 논문에서는 이원일차연립방정식 문장제 해결에 그림그리기 전략을 도입하여 초등수학과 중등수학의 연결성을 강화하는 방안을 한 초등 6학년 아동의 사례를 통해 제시하였다.

I. 서 론

우리나라의 교원 양성 체제는 교육대학에서 초등교사를 양성하고 사범대학에서 중등교사를 양성하는 체제이다. 이러한 체제 속에서 초등수학교육은 교육대학의 영역, 중등수학교육은 사범대학의 영역이 되어 있다. 교육대학에서는 초등교육의 문제를 사범대학에서는 중등교육의 문제를 집중적으로 연구한다. 이것은 현재의 이원화된 교사 양성 체제 하에서 불가피한 것이기도 하고, 12년의 학교 교육을 초등 6년, 중등 6년으로 나누어 해당 기간의 교육 문제를 보다 전문적으로 집중 연구할 수 있다는 점에서 장점이 있다.

다만 이러한 양분 체제 하에서 생길 수 있는 문제점에 주의를 기울일 필요가 있다. 이러한 체제 하에서 생길 수 있는 문제점 중 하나는 초등수학과 중등수학의 연결성에 관한 것이다. 이 연결성은 교육대학의 주 관심 영역도 사범대학의 주 관심 영역도 아닌 양 체제의 가장자리 근처에서 생기는 문제이므로 어느 쪽에서도 집중적으로 다루어지지 않을 수 있다.

초등수학과 중등수학의 연결성 문제는 교육과정 내용 구성의 위계성과 관련 있다. 이를테면, 자연수 계산을 초등학교에서 다루고, 중학교에서는 정수의 계산을 다루는 것이다. 그러나 정수 계산을 먼저 다루고 자연수 계산을 나중에 다루는 것을 상상하기 어려운 것처럼, 교육과정의 내용 요소의 위계성 측면에서는 초등수학과 중등수학의 연결성에 문제가 될 것이 거의 없다.

그러나 세부적인 내용 요소로 들어가 그 내용 요소를 구체화한 교재로 들어가서 보면 연결성의 문제가 새롭게 제기될 수 있다. 초등학교와 중등학교에서 반복적으로 다루고 있는 내

---

* 경인교육대학교 산학협력단, steinein@dreamwiz.com
** 경인교육대학교, jhyim@ginue.ac.kr

용의 경우가 더욱 그렇다. 예를 들어, 초등학교 교과서에서도 사각형의 포함관계를 다루고 중학교 교과서에서도 사각형의 포함 관계를 다룬다. 초등학교의 접근법과 중학교의 접근법 사이의 연결성은 무엇인가? 초등학교 교과서에서도 삼각형의 합동조건을 다루고 중학교 교과서에서도 삼각형의 합동조건을 다룬다. 둘 사이의 연결성은 무엇인가? "두발자전거와 세발자전거를 합쳐서 50대 만들려고 한다. 준비된 바퀴는 127개이다. 두발자전거와 세발자전거를 각각 몇 대 만들 수 있는가?"와 같은 문제를 초등학교에서도 다루고 중학교에서도 다룬다. 둘 사이의 연결성은 무엇인가? 초등수학과 중등수학의 연결성의 문제는 이와 같이 세부적인 내용 수준에서 각 학교급의 교과서가 취하고 있는 접근법 사이의 연결성을 논의할 때 구체적으로 논의[1]될 수 있다.

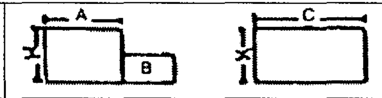
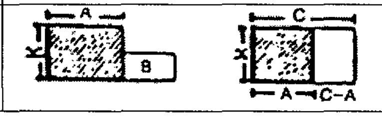
이 논문은 이원일차연립방정식에 대하여 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 논한 것이다. 이원일차연립방정식 자체는 중학교의 내용 요소이며 초등학교의 내용 요소는 아니다. 그러나 위에 제시한 자전거 문제와 같은 유형의 문제, 곧 중학교에서 이원일차연립방정식으로 푸는 문제(이하 '이원일차연립방정식 문장제'라고 부르기로 한다)는 중학교 교과서뿐 아니라 초등학교 수학 교과서에서도 다루어진다. 그러므로 초등학교 교과서에서 이원일차연립방정식 문장제를 다루는 방식과 중학교 교과서에서 다루는 방식을 대상으로 하여 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 논의할 수 있다.

이원일차연립방정식에 대하여 초등수학과 중등수학의 연결성을 논하는 것은 크게 보아 산술과 대수의 연결성에 관한 논의에 속한다. 학교수학에서 산술과 대수는 오랫동안 초등수학과 중등수학을 대표하는 영역으로 자리 잡아 왔다. 그러나 산술과 대수를 초등과정과 중등과정으로 엄격히 구분하는 대수 교육과정에 따른 대수 학습에 많은 문제점이 발생하고 있으며 이러한 구분은 산술에서 대수로의 이행을 어렵게 하는 주요 원인이 되기도 한다(김성준, 2004). 학교수학에서 대수 학습과 관련된 여러 문제는 산술에서 대수로의 이행 과정에서 나타나는 장애와 직간접적으로 관련을 맺고 있으며, 이에 여러 연구들이 산술과 대수 사이의 간격에 대해서 논의하였다(김성준, 2004; Filloy & Rojano, 1989; Herscovics & Linchevski, 1994; Linchevski & Herscovics, 1996; Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1994). 그러나 산술에서 대수로의 이행 문제가 연립방정식과 관련하여 본격적으로 논의되지는 않았다. 이에 이 논문에서는 이원일차연립방정식에 관하여 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 논의하고자 한다. 초등학교 수학 교과서와 중학교 수학 교과서에서 이원일차연립방정식 문장제가 다루어지는 방식을 연결성 측면에서 분석하고, 그림그리기 전략의 도입을 통해 연결성을 강화하는 방안을 제안할 것이다.

II. 선행연구 고찰

Herscovics와 Linchevski(1994)는 산술과 대수 사이의 간격 중 하나가 미지수를 대상으로 하는 조작을 할 수 있는 것과 그렇지 못한 것 사이에 있다고 하면서, 일차방정식의 풀이와 관련하여 산술에서 대수로의 이행 문제를 논의하였다. Linchevski와 Herscovics(1996)는 산술과 대수의 간격을 극복하는 방안으로 $3n = n + n + n$으로

1) V장에서 자세하게 다루어지겠으나, 예를 들어, 초등학교에서 사용되는 '거꾸로풀기 전략'은 중학교의 일차방정식 풀이법으로 연결될 수 있다.

	기하모델	천칭모델
$Ax+B=Cx$		
$B=(C-A)x$		

[그림 II-1] 기하모델과 천칭모델
(Filloy & Rojano, 1989: 21)

나타내는 등 같은 항을 묶거나 나누는 방법으로 이항을 통한 대수적 조작을 대신하는 방안을 고안하였다. 이와 같은 수업을 통해 학생들은 같은 항을 묶거나 이미 묶여져 있는 항을 나누는 것은 비교적 쉽게 익혔지만, 방정식을 푸는 과정에서 어떻게 주어진 항을 나누어야 하는지는 쉽게 알지 못하였다. Filloy와 Rojano (1989)는 학생들이 일차방정식을 이해하고 푸는 데에 있어, $x+5=5+2$와 같이 x가 한쪽 변에만 있는 경우와 $3+2x=5x$와 같이 x가 양쪽 변에 있는 경우 사이에 간격이 존재함을 확인하고 직사각형을 이용한 기하모델과 천칭모델을([그림 II-1])을 사용하여 $Ax+B=Cx$ $(C>A)$꼴의 방정식을 풀게 하였다. 그리고 $Ax-B=Cx+D$ 등과 같이 좀 더 복잡한 형태를 제시하면서 학생들이 모델을 통한 조작을 반복하면서 어떻게 그 과정을 추상화하는지를 관찰하였다. 이들의 연구는 적절한 모델의 사용이 방정식 이해에 도움이 될 수 있음을 시사한다.

일반적으로 산술과 대수는 문자 기호의 사용 유무를 기준으로 구분되지만, 산술과 대수는 요구되는 사고에 있어서도 근본적인 차이가 있다(김성준, 2004; Van Amerom, 2002). Vinner (1991)와 Sfard(1991)의 개념형성 과정에 관한 논의를 산술에서 대수로의 전이와 관련하여 보면, 산술에서 대수로의 전이는 개념 이미지에서 새로운 개념 정의가 등장하는 과정으로 볼 수 있으며, 대수적인 개념 형성 과정에서 산술에서의 개념을 내면화하고 다시 그 개념을 압축하여 대수에서 요구하는 새로운 개념으로 실재화의 단계가 일어나는 일련의 과정으로 생각할 수 있다(김성준, 2004). 그러므로 산술에서 대수로의 이행 과정에서 산술에서의 개념을 내면화하고 압축하는 변화 과정을 촉진하는 방안을 연구할 필요가 있다.

대수와 기호는 분리될 수 없으나, 산술에서 대수로의 이행을 돕는 방안은 대수적인 추론과 기호화하기를 구분하여 생각함으로써 모색될 수 있다. Van Amerom(2003)은 비형식적 방법 또는 전대수적(pre-algebraic) 방법으로 추론하고 기호화하기를 통하여 산술에서 대수로의 전이를 쉽게 하려는 연구를 수행하면서, 추론하기와 기호화하기가 반드시 같은 속도로 발달하는 것은 아니라는 점을 발견하였다. 이는 방정식에 대한 구조적인 이해와 방정식의 기호 조작이 상대적으로 독립적인 요소라는 점을 시사한다. 학생들은 산술에서 대수로의 이행 과정에서 대수적 조작 습득뿐 아니라 방정식의 구조적 이해에도 어려움을 겪고 있으므로, 이 어려움을 줄여줄 수 있는 방안을 모색해야 한다.

Breiteig와 Grevholm(2006)의 연구는 그러한 방안 모색에 단초를 제공한다. Breiteig와 Grevholm(2006)은 두 수의 합이 19이고 두 수의 차가 5인 두 수를 구하는 문제를 해결하는데

학생들이 사용한 방법을 분석하여, 예상과 확인 전략, 표 만들기 전략, 산술적인 방법(두 수를 $\frac{(19-5)}{2}$, $\frac{(19-5)}{2}+5$로 구하거나 $\frac{19}{2}+\frac{5}{2}$, $\frac{19}{2}-\frac{5}{2}$로 구하는 방법), 방정식(변수가 하나 또는 두 개인 식) 풀이, 일반해 구하기로 분류하였다. 여기서 예상과 확인 전략 및 표 만들기 전략과 대수적인 풀이 사이에 있는, 산술적인 방법이라고 명명된 방법에 주목할 필요가 있다. 이 방법은 문제에 나온 구체적인 수를 사용한다는 점에서 산술적이지만, 문제 구조의 통찰에 기초한 일반성을 지니고 있다. Van Amerom(2003)의 표현을 빌면, 대수적인 표현의 발달보다 구조적인 이해의 발달이 앞선 방식이라고 할 수 있다. Breiteig와 Grevholm(2006)의 연구는 문제의 구조적 이해가 산술에서 대수로의 이행에 촉매 역할을 할 가능성을 시사한다. 또한 김성준(2004)은 산술과 대수의 연결성 문제를 사고 요소를 중심으로 연결하고자 시도하면서, 초등학교에서 양적인 추론을 통한 관계 파악을 좀 더 드러내어 지도할 필요가 있다고 하였다. 양적인 추론은 문제 상황에서 양 사이의 관계를 먼저 생각하게 하고, 특정한 수 값이 아닌 양 사이에 내재된 관계를 파악하게 하며, 특정한 계산 방법보다 일반적인 관계 구조를 표현함으로써 일반화를 가능하게 한다.

이와 같은 선행연구는 이원일차연립방정식에 대한 초등학교 중학교 교과서의 연결성 문제를 논의하는데 다음과 같은 시사점을 제공한다. 이원일차연립방정식 문장제에 대한 초등수학 교과서의 접근방식은 중등 교과서에서 내면화되고 압축되어 대수적 풀이법으로 연결되고 있는가? 이원일차연립방정식 문장제의 구조 통찰에 기초한 방법으로 초등수학과 중등수학을 연결하고 있는가? 양 사이에 내재된 관계를 파악하여 일반적인 관계 구조를 표현하여 일반화를 가능하게 함으로써 산술적 방법과 방정식 풀이법을 연결할 수 없는가? 모델을 사용하여 이원일차연립방정식 문장제의 일반적인 관계 구조를 표현하면서 방정식 풀이법으로 연결할 수는 없는가? IV장에서는 이와 같은 문제에 대하여 고찰하기로 한다.

III. 연구 방법

이 논문은 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 이원일차연립방정식에 대하여 논의하기 위하여, 초등학교 수학교과서와 익힘책과 중학교 교과서의 해당 부분에 대한 교과서 분석, 연결성을 강화하기 위한 방안으로서 그림 그리기 전략을 고안하기 위한 교수학적 분석, 고안된 방안의 실현 가능성 검증을 위한 실험 수업의 세 가지 방법을 병행하였다.

우선 현재 초등학교에서 사용되고 있는 수학 교과서와 익힘책을 이원일차연립방정식 문장제를 중심으로 분석하고, 13종의 중학교 수학 교과서를 이원일차연립방정식에 초점을 맞추어 분석하였다. 한편, 이원일차연립방정식에 대한 초등수학과 중등수학의 연결성을 강화하는 방안을 모색하고자 중등수학에서의 이원일차연립방정식 풀이의 핵심적인 아이디어인 가감법의 아이디어를 담고 있는 그림그리기 전략을 고안하고, 그 적용가능성의 검증을 위한 실험을 실시하였다.

실험은 한 명의 6학년 아동을 대상으로 한 명의 교사의 지도에 따라 이루어졌다. 학생이 속진 학습을 통해 가감법을 알고 있으면, 수업 상황에서 학생의 그림 그리기 전략 수행에 영향을 미칠 수 있기 때문에, 초등 5학년까지의 학습 내용을 잘 알고 있으면서 동시에 속진 학습의 경험이 없는 아동을 대상으로 하였다. 본 논문의 연구 대상인 도영이는 학급에서 수학을

잘 하고 좋아하는 학생에 속하지만, 별도의 사교육, 학습지 교육, 영재교육을 받고 있지 않으며, 속진 학습을 하지 않아 방정식 풀이법에 대해서 모르고 있었다.

도영이의 탐구는 2회에 걸쳐 총 약 100분간 이루어졌다. 연구대상자의 활동은 모두 디지털 캠코더로 녹화되었다. 우리는 녹화된 내용과 연구대상자가 종이에 기록한 내용을 바탕으로 연구대상자의 활동을 분석하였다.

Ⅳ. 초중등 교과서의 연결성 분석

Polya(1981)는 '닭과 토끼의 머리가 50개이고 발이 140개이다. 닭과 토끼는 각각 몇 마리인가?'라는 문제를 해결하는 세 가지 접근법을 기술하였다. 첫 번째 접근법은 시행착오를 거듭하면서 바라는 최종 결과에 점점 가까워지는 것이다. 만약 모두 닭이라면 발이 100개뿐이므로, 모두 닭일 수는 없다. 모두 토끼라면 발이 200개이므로, 모두 토끼도 아니다. 절반이 닭이고 절반이 토끼라면, 발은 150개가 된다. 닭의 수를 적게 하면 토끼의 수가 많아지고 발의 수는 늘어난다. 반대로 닭의 수를 많게 하면, 발의 수는 줄어든다. 그러므로 닭은 25마리보다 많다. 닭이 30마리라고 해보자.

이와 같은 추측을 계속하여 보는 것이 이 방법의 기본 전략이다. 이 때 <표 IV-1>과 같이 표를 만들어 조사하는 것이 이 접근법의 실행에 도움이 된다.

<표 IV-1> 시행착오 접근법

닭	토끼	발의 수
50	0	100
0	50	200
25	25	150
30	…	…

두 번째 접근법은 '기발한 착상'이라고 불린 것으로, 다음과 같다. 특이한 행동을 해서 동물들을 놀라게 한다. 놀란 닭들은 한 발로 서고, 토끼는 뒷발로 선다. 이 때 땅에 닿아 있는 발의 수는 전체 발의 절반인 70개이다. 이 70에서 전체 머리 수 50을 빼면, 토끼의 마리 수 20이 나온다. 세 번째 접근법은 '대수를 이용한 풀이'이다. 닭의 수를 x, 토끼의 수를 y라고 하면, $x+y=50\cdots①$, $2x+4y=140\cdots②$과 같은 연립방정식을 세울 수 있다. 둘째 식을 2로 나누면, $x+y=50\cdots①'$, $x+2y=70\cdots②'$이고, 이로부터 $y=20$을 얻는다.

Polya는 이 세 접근법을 비교하면서, 방정식 풀이법의 중요성을 강조하였다. 더 크고 복잡한 수로 된 문제였다면, 첫 번째 접근법으로는 더 많이 시도해야 하고 행운도 더 많이 따라야 할 것이다. 두 번째 접근법은 독창적이고 기발하다. 그러나 기발한 착상은 드물고, 그러한 착상이 떠오르려면 행운이 많이 따라야 한다. 세 번째 접근법은 여러 번의 시도, 우연, 요행, 기발한 상상력을 필요로 하지 않는다. 큰 수일 경우에도 작은 수의 경우처럼 잘 적용되며, 게다가 일반화와 관련하여 강력한 힘을 지니고 있다.

초등학교 수학교과서에서는 이원일차연립방정식 문장제를 Polya가 말한 첫 번째 접근법으로 해결하고 있다. 초등학교 수학교과서와 익힘책에는 이원일차연립방정식 문장제가 여러 학기에 걸쳐 반복적으로 나온다. 5-가, 5-나, 6-가, 6-나 교과서와 익힘책의 마지막 단원인 '문제 푸는 방법 찾기'에 이원일차연립방정식 문장제가 나온다(교육인적자원부, 2004b, 2004c, 2004d, 2004e, 2004f, 2004g, 2004h, 2004i). 학기별로 한 문제씩만 예시하면 다음과 같다.

5-가 : 민수와 정범이는 다트판을 가지고 놀고

있습니다. 민수는 다트핀을 19번 던져 105점을 얻었습니다. '빨간색 과녁은 7점짜리, 노란색 과녁은 3점짜리야. 민수는 7점짜리 과녁을 몇 번 맞혔을까?' (교육인적자원부, 2004b: 130)

5-나: 자전거 공장에서 두발자전거와 세발자전거를 만듭니다. 두발자전거와 세발자전거를 합쳐 50대를 만들려고 합니다. 준비된 바퀴의 개수는 127개입니다. 두발자전거와 세발자전거는 몇 대씩 만들 수 있습니까?(교육인적자원부, 2004f: 130)

6-가: 지혜는 4000원을 주고 200원짜리 지우개와 150원짜리 연필을 합하여 23개를 샀습니다. 지우개와 연필을 각각 몇 개씩 샀는지 알아보시오. (교육인적자원부, 2004d: 126)

6-나: 놀이 동산의 어른 입장료는 600원이고, 어린이는 400원입니다. 입장권 15장을 사는 데에 7200원이 들었다면, 어른과 어린이는 각각 몇 명입니까? (교육인적자원부, 2004i: 136)

처음 문제는 7점짜리 과녁을 맞힌 횟수를 x, 3점짜리 과녁을 맞힌 횟수를 y라고 하면, 연립방정식 $\begin{cases} x+y=19 \\ 7x+3y=105 \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. 유사한 방법으로 둘째 문제는 $\begin{cases} x+y=50 \\ 2x+3y=127 \end{cases}$, 셋째 문제는 $\begin{cases} x+y=23 \\ 200x+150y=4000 \end{cases}$, 넷째 문제는 $\begin{cases} x+y=15 \\ 600x+400y=7200 \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다. 이 문제들은 상황은 다양하지만, 모두 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 꼴의 이원일차연립방정식으로 표현될 수 있는 동일 구조의 문제이다.

초등학교 교과서에서는 이 문제들을 산술적인 접근법을 써서 해결한다. 초등 수학 교과서와 익힘책에서 이 유형의 문제를 해결하는 방법은 '예상과 확인'과 '표 만들기'이다. 예를 들어, 다음 [그림 IV-1]과 [그림 IV-2]는 위의 네 번째 문제인 '놀이 동산의 입장료 문제'의 해결 방법으로 제시된 것이다.

예상한 후 확인하기 방법으로 해결하여 보시오.

어른 표와 어린이 표를 각각 몇 장씩 샀는지 예상하여 보시오.

그 때의 금액을 계산하여 보시오.

금액에 맞게 구해졌습니까? 맞게 구해지지 않았으면 다시 예상해 보고, 맞는 답이 나올 때까지 예상과 확인을 반복하시오.

어른과 어린이는 각각 몇 명입니까?

[그림 IV-1] 예상과 확인
(교육인적자원부, 2004i: 136)

표를 만들어서 해결하여 보시오.

표를 완성하시오.

어른(명)	0								
어린이(명)	15								
어른의 입장료(원)	0								
어린이의 입장료(원)	6000								
합계(원)	6000								

어른과 어린이는 각각 몇 명입니까?

[그림 IV-2] 표 만들기
(교육인적자원부, 2004i: 136)

예상과 확인 전략을 사용하여 다음과 같이 문제를 해결할 수 있다. 어른이 7명 어린이가 8명이라고 예상하고 입장료를 계산해 보면 7×600+8×400=7400(원)이 되어 주어진 입장료 7200원보다 크다. 입장료를 줄이기 위해 어른을 한 명 줄이고 어린이를 한 명 늘여서 어른이 6명, 어린이가 9명이라고 하면, 입장료가 200원 줄므로(또는 6×600+9×400=7200의 계산에 의해) 입장료는 주어진 7200원이 된다. 이러한 전략은 연립방정식을 이루는 두 식에서 x 또는 y의 계수를 같게 만들어 뺀다는 가감법의 아이디어와 직접적인 관련이 없다. [그림 IV-2]와 같은 표 만들기도 표를 활용하여 규칙을 찾으며 체계적으로 접근하는 좋은 전략이지만, 연립방정식을 이루는 두 식에서 x 또는 y의 계수를 같게 만들어 뺀다는 가감법의 아이디어와 직접적인 관련이 없다. 그러므로 예상과 확인 전략과 표 만들기 전략은 실례를 찾아가면서 귀납적으로 이해하고 접근하는 유효한 방법

이나, 가감법을 안내하는 접근이라고 보기 어렵다.

이원일차연립방정식 문장제는 중학교 2학년 이원일차연립방정식 단원에서 다시 등장한다. 중학교 수학 교과서에서는 기본적으로 Polya가 말한 세 번째 접근법, 곧 가감법이나 대입법으로 해결한다(강옥기 · 정순영 · 이환철, 2002; 강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙, 2002; 고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영, 2002; 금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주, 2002; 박규홍 · 고성군 · 김성국 · 김유태 · 박재용 · 육상국 · 임창우 · 한옥동, 2002; 박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종, 2002; 박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선, 2002; 배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철, 2002; 양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철, 2002; 이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은, 2002; 조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재, 2002; 최용준, 2002; 황석근 · 이재돈, 2002).

가감법이나 대입법이 나오기 이전에, 연립방정식의 해의 의미를 설명하는 부분에서는 표가 사용된다. 다음 [그림 IV-3]처럼 초등학교 교과서에 있는 것과 유사한 표가 사용되는 경우도 있지만, 대체로는 [그림 IV-4]처럼 각각의 방정식의 해를 구하는 표 2개가 사용된다. [그림 IV-4]에서 각각의 표는 $x+y=5$과 $2x+y=8$ 각각의 부정방정식의 해를 나열하는 방편이다. 중학교 8-가 단계 수학 교과서에서, 표는 각각의 방정식의 공통인 해라는 연립방정식의 해의 의미를 설명하는 수단으로 사용되고 있다.

연립방정식의 해의 의미를 설명한 다음에 가감법과 대입법과 같은 연립방정식의 풀이법이 나온다. 가감법의 도입은 연립방정식을 직접 대수적으로 조작하는 상황을 통하여 이루어진다. 표는 연립방정식의 해의 의미를 설명하는데 한정해서 쓰일 뿐, 그 다음 나오는 가감법이나 대입법과 직접 관련이 없다. 연립방정식을 표를 만들어 구한 해와 대입법을 이용하여 구한 해가 같다는 것을 확인하게 하는 교과서도 있으나, 이 또한 표에 의한 풀이와 대입법에 의한 풀이를 병렬적으로 대조하거나 비교하는 것이지, 표와 대입법을 연결하는 것은 아니다.

먼저, x, y의 값이 자연수인 ①의 해를 다음 표와 같이 구하고, ①의 해 중에서 $2x+3y$의 값을 조사하여 ②의 해를 구하면 된다.

$x+y=7$	x	1	2	3	4	5	6
	y	6	5	4	3	2	1
$2x+3y$		20	19	18	17	16	15

위의 표에서 방정식 ①, ②를 동시에 만족하는 x, y의 값은 $x=4$, $y=3$이므로 순서쌍 (4, 3)이 두 일차방정식 ①, ②의 공통인 해이다.

[그림 IV-3] 중학교 교과서의 표 1 (양승갑 외, 2002: 75.)

먼저 방정식 ①, ②의 해를 구하기 위하여 표로 나타내면 다음과 같다.

①

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

②

x	1	2	3
y	6	4	2

위의 표에서 ①과 ②에 공통으로 있는 x, y의 값의 순서쌍은 (3, 2)이다.

[그림 IV-4] 중학교 교과서의 표 2
(강행고 외, 2002: 81.)

요약하면, 초등학교 교과서에서는 예상과 확인과 표 만들기에 의한 풀이, 중학교 교과서에서는 가감법 또는 대입법에 의한 방정식 풀이라는 별개의 접근법을 취하고 있다. 이상과 같은 초등학교와 중학교 수학교과서의 접근법에 대하여 다음과 같은 문제를 제기할 수 있다.

첫째, 초등학교 교과서에서, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나의 네 단계에 걸쳐 동일 유형의 문제를 계속 다루고 있지만 다루는 방식에 있어서는 예

상과 확인 전략과 표 만들기 전략이라는 두 개 전략이 반복적으로 사용될 뿐 새로운 접근법으로 접근하지 않고 있다는 점이다. 동일한 유형의 문제를 초등학교 5학년과 6학년의 4개 학기에 걸쳐 동일한 방법으로 푸는 경험을 학생들에게 반복하게 하는 것의 필요성과 효율성에 의문을 제기할 수 있다. 4개 학기에 걸친 반복적 경험을 통해 이와 같은 유형의 문제는 예상과 확인 전략과 표 만들기 전략으로 푼다는 생각을 강화하는 것이 그 자체로 어떤 의의가 있는지, 그리고 그것이 장차 중학교에 가서 방정식 풀이법에 의한 접근법을 학습할 때 어떤 기능을 하는지 불분명하다. 초등학교에서 이 유형의 문제를 4개 학기에 걸쳐 다룬다면, 지금보다 더 다양한 접근법을 다루되, 특히 예상과 확인 전략이나 표 만들기 전략보다 중학교의 방정식 풀이법과 잘 연결되는 접근법을 구체화하여 이를 6학년 수준에서 다루는 것을 고려해야 한다.

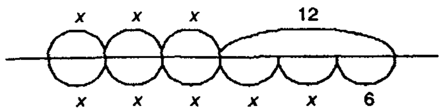
둘째, 중학교 수학 교과서와 초등학교 수학 교과서가 각각 별개의 접근법을 제시하고 있을 뿐, 두 접근법이 서로 연결되지 않는다. 초등학교 교과서의 접근법과 중학교 교과서의 접근법의 연결 고리를 찾는다면, 그것은 양쪽 모두에 표가 나온다는 것이다. 초등학교 교과서에서는 예상과 확인과 표 만들기, 중학교 교과서에서는 표 만들기와 방정식 풀이법, 이렇게 표 만들기가 양쪽에 다 나와 연결고리 역할을 하고 있는 것처럼 보이기도 한다. 그러나 중학교 교과서에서 표는 연립방정식의 해의 의미를 설명하는 과정에서 각각의 방정식의 해를 나열하는 방편이며, 가감법과 대입법은 표와 무관하게 대수적 조작에 의해 도입된다. 초등학교 교과서에 제시된 접근법이 중학교 교과서의 방정식 풀이법과 연결되지 않는다는 것은, 초등수학 교과서의 접근방식이 압축 내면화되어 중학교 교과서의 접근법이 되지 않는다는 것, 문제 구조 통찰을 통해 양 사이에 내재된 관계를 파악하고 일반적인 관계 구조를 표현하여 산술적 방법과 방정식 풀이법이 연결되도록 초등학교와 중학교 교과서가 구성되어 있지 않다는 것을 뜻한다.

V. 그림그리기 전략 도입을 통한 연결성 강화 방안

앞 장의 교과서 분석은 이원일차연립방정식과 관련된 초등학교와 중학교의 내용이 연결성 측면에서 보완될 필요가 있음을 시사한다. 이 장에서는 이원일차연립방정식과 관련된 초등학교와 중학교의 연결성 강화 방안을 모색하고자 한다. 그 방안은 다음 두 가지를 만족하는 것이 되어야 할 것이다. 첫째로, 초등학생이 할 수 있는 수준의 접근법이어야 한다. 둘째로, 중학교의 내용인 이원일차연립방정식의 가감법 풀이법과 연결되는 것이어야 한다.

이원일차연립방정식에 대해 고찰하기에 앞서, 일차방정식에 대해서 살펴보자. 초등학교에서 사용되는 '거꾸로풀기 전략'은 중학교의 일차방정식 풀이법으로 연결될 수 있다. '은주는 용돈으로 문방구점에서 400원짜리 공책 3권을 사고, 서점에서 5000원짜리 동화책 2권을 샀습니다. 다음 날, 아버지에게 용돈 5000원을 받았더니 남아 있는 돈이 6100원이 되었습니다. 처음에 가지고 있던 돈은 얼마인지 알아보시오 (교육인적자원부, 2004d: 130)'와 같은 문제를 초등학교에서는 거꾸로 풀기 전략을 사용하여 과정을 거꾸로 하여 마지막에 6100원, 용돈을 받기 전에는 1100원, 동화책을 사기 전에는 11100원과 같이 거꾸로 푼다. 이 과정을 수식으로 형식화하면 중학교의 방정식 풀이 과정

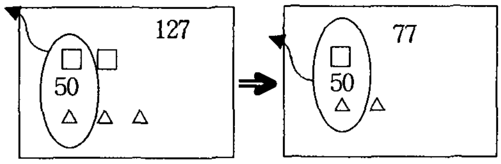
$x-400\times3-5000\times2+5000=6100$,
$x-400\times3-5000\times2=6100-5000=1100$,
$x-400\times3=1100+5000\times2=11100$과 연결될 수 있다. 한편, Dickinson와 Eade(2004)는 수직선을 이용하여 변수가 하나인 일차방정식을 표현하고 해를 구하는 방법을 소개하였다. 예를 들어 방정식 $3x+12=5x+6$을 [그림 V-1]과 같이 표현하면 $2x+6=12$가 한눈에 드러나며(p. 43), 그림에 의한 풀이를 형식화하면 방정식 풀이법이 된다. 이와 같이 일차방정식의 경우에는 거꾸로 풀기 전략이나 수직선을 이용한 그림 표현이 일차방정식 풀이법과 잘 연결된다.



[그림 V-1] 일차방정식의 수직선 표현
(Dickinson & Eade, 2004: 43)

이와는 달리 초등학교 교과서의 예상과 확인 전략이나 표 만들기 전략을 압축, 형식화하면 이원일차연립방정식의 가감법이 되지 않는다. 그러므로 가감법으로 보다 쉽게 연결될 수 있는 다른 접근법을 찾을 필요가 있다. 그 접근법은, II장에서 논의한 바와 같이, 문제 구조를 통찰하여 양 사이에 내재된 관계를 파악하고 일반적인 관계 구조를 표현하면서 가감법으로 형식화될 수 있는 것이어야 할 것이다.

김성준(2004)은 □, △와 같은 기호로 양을 나타내 추론하는 양적 추론을 초등학교에서 강화하면 산술에서 대수로의 이행에 도움이 될 것이라고 하였다. 이와 같은 입장에서, 이원일차연립방정식 문장제의 양적 추론에 의한 해결 방안을 초등학교에서 다루는 방안을 고려할 수 있을 것이다. 초등학교 5학년과 6학년에 반복해서 나오는 $\begin{cases}x+y=u\\ax+by=v\end{cases}$ 유형의 문장제는 다음과 같이 양적 추론으로 풀 수 있다. "두발자전거와 세발자전거를 합쳐 50대를 만들려고 한다. 바퀴의 개수는 127개이다. 두발자전거와 세발자전거는 몇 대씩 만들 수 있는가?"라는 문제를 생각하여 보자. 만들 수 있는 두발자전거의 대수를 □, 세발자전거의 대수를 △라고 하면, [그림 V-2]와 같이 □와 △의 짝을 하나씩 제거하는 과정을 두 번 반복하여 △를 구할 수 있다.

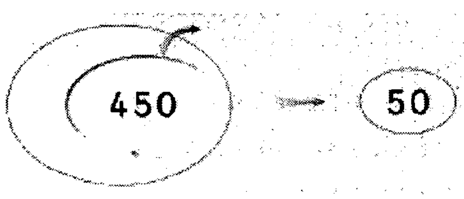


[그림 V-2] 양적 추론에 의한 풀이

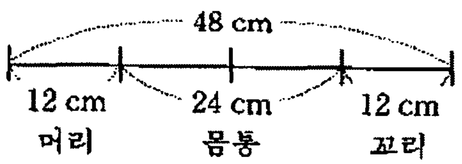
이와 같은 방법은 한 조건에서 주어진 □, △의 적당한 짝을 다른 조건에서 제거하는 행위를 적절히 결합하여 □, △중 적당한 한 가지만 남길 수 있는 경우, 예를 들어 $\begin{cases}2\times\square+\triangle=50\\4\times\square+3\times\triangle=126\end{cases}$나 $\begin{cases}2\times\square+\triangle=7\\3\times\square+2\times\triangle=12\end{cases}$과 같은 경우에 적용된다. $\begin{cases}2\times\square+\triangle=50\\4\times\square+3\times\triangle=126\end{cases}$는 아래에서 □, □, △(즉, 2×□+△)를 두 번 제거하여 △=26을 구할 수 있고, $\begin{cases}2\times\square+\triangle=7\\3\times\square+2\times\triangle=12\end{cases}$는 아래에서 □, □, △(즉, 2×□+△)를 제거하고 남은 □, △를 위에서 제거하여 □=2를 구할 수 있다.

보다 중요한 것으로, 초등학교에서 가르치고 있는 문제해결전략 중에 그림그리기 전략이 있다. 그림그리기 전략의 장점은 문제 상황을 구조적으로 표현하여 문제에 나오는 여러 정보를 종합적으로 파악하고 해결 방안을 찾기가 유리하다는 것이다. 때문에 그림그리기 전략은 초등학교 저학년 고학년을 막론하고 광범위하게 사용된다. 이를테면, 2-나 단계의 '현민이는 주

스를 사려고 자동 판매기에 백 원짜리 동전을 몇 개 넣고 단추를 눌렀더니, 450원짜리 주스 한 개와 거스름돈 50원이 나왔습니다. 현민이가 넣은 돈은 얼마였는지 알아보시오.'와 같은 문제를 [그림 V-3]으로 표현하면 문제의 구조가 잘 드러난다. 5-가 단계의 '물고기의 전체 길이는 48cm이다. 머리의 길이는 전체 길이에서 머리 부분을 뺀 나머지의 $\frac{1}{3}$과 같고, 꼬리는 머리와 길이가 같다. 머리, 몸통, 꼬리의 길이는 각각 얼마일까?'라는 문제도 [그림 V-4]와 같이 표현하면, 문제의 구조가 한눈에 보여 쉽게 풀 수 있다.



[그림 V-3] 그림그리기전략의 예1
(교육인적자원부, 2004a: 110)

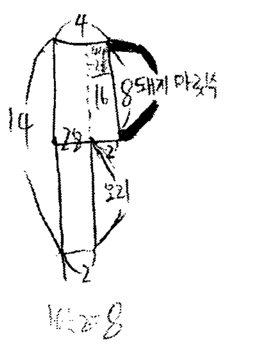


[그림 V-4] 그림그리기전략의 예2
(교육인적자원부, 2000: 264)

이와 같이 그림그리기 전략은 문제의 구조를 전체적으로 파악하여 구조적인 해결방안을 찾는데 장점이 있다. 가감법과 같은 이원일차연립방정식 풀이법도 문제의 구조에 기초한 해결방법이다. 그러므로 그림그리기 전략과 전략과 가감법 풀이법은 유사한 장점을 가지고 있다고 할 수 있다. 그러나 이와 같은 일반적인 장점의 공통성만 가지고 그림그리기 전략이 표 만들기 전략이나 예상과 확인 전략에 비해 연립이원일차방정식과의 연결성 면에서 가감법을 안내하기에 우수하다고 말하기는 어렵다. 이것은 구체적으로 어떤 그림을 사용하는가, 그 그림이 가감법으로 안내하는데 유효한가에 달려있다. 그러므로 그림그리기 전략이 가감법으로 안내하는데 유효한 전략인가는 구체적으로 어떤 그림을 사용할 것인가와 관련하여 논의되어야 한다.

다음에서는 '직사각형의 넓이 모델'을 이용한 그림그리기 전략이 초등학생들이 사용할 수 있는 전략인 동시에 중학교에서 가감법을 안내하는데 사용하기에도 적합한 점을 지니고 있음을 한 초등학생의 사례를 들어 논의하고자 한다. 이는 곧 직사각형의 넓이 모델을 이용한 그림그리기 전략이 이원일차연립방정식에 관한 초등수학과 중등수학 사이의 간격을 메우는 방편이 될 수 있음을 주장하는 것이 될 것이다.

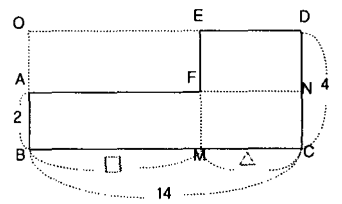
"농장에 돼지와 오리가 있습니다. 돼지와 오리의 머리의 수를 세었더니 14개이고, 다리 수를 세었더니 44개였습니다. 돼지와 오리는 각각 몇 마리씩 있습니까?"라는 문제를 한 초등학생은 다음과 같이 그림그리기 전략을 사용하여 풀었다.



[그림 V-5] 그림그리기 전략을 사용한 초등학생의 풀이
(김지원, 2003: 51).

위 초등학생의 풀이를 다시 보면, 오리를 □

마리, 돼지를 △ 마리라고 할 때 오리와 돼지의 마리 수는 [그림 V-6]의 가로의 길이로 표현된다. 오리와 돼지의 다리 수는 각각 □ABMF와 □MCDE의 넓이로 표현되므로, 전체 다리의 개수 44는 」 모양의 도형 ABCDEF의 넓이로 표현된다.

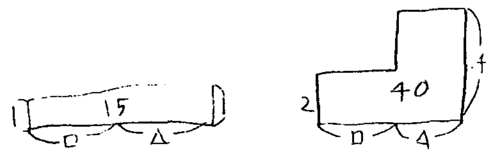


[그림 V-6] 도형을 이용한 연립방정식 문장제 풀이

□ABCN의 넓이는 2×14=28이고 □EFND의 넓이는 44-28=16이므로, 이를 DN=4-2=2로 나누어 돼지의 마리 수 △=8을 구할 수 있다. 왼쪽의 들어간 부분 □AFEO에 주목하여, □OBCD의 넓이에서 」 모양의 도형 ABCDEF의 넓이를 빼어 오리의 마리 수를 구할 수도 있다. 이상의 방법에서 오른쪽의 튀어나온 부분 □FNDE이나 왼쪽의 들어간 부분 □AFEO에 주목하는 것이 문제 해결에 중요한 역할을 한다.

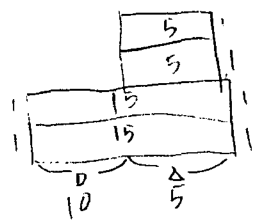
그런데 위의 풀이에서 머리 수는 길이 다리 수는 넓이라는 다른 차원의 양으로 표현되어 있다. 그림그리기 전략에 의한 풀이를 일반적인 이원일차연립방정식으로 확장하려면, 이 둘을 동일 차원의 것으로 통일하는 것이 편리하다. 머리의 수는 가로의 길이로 생각할 수도 있지만, 높이가 1인 직사각형의 넓이로 생각할 수 있다.

이와 같이 표현하기로 하면 앞의 오리 돼지 문제와 같이 초등학교 5, 6학년에서 반복적으로 등장하는 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제를 다음과 같이 그림그리기 전략으로 해결할 수 있다. 다음은 초등 6학년 학생 도영이가 머리 수가 15, 다리 수가 40인 경우를 그림그리기 전략을 써서 해결한 것이다.[2] 도영이는 문제의 조건을 다음 [그림 V-7]과 같이 표현하였다.



[그림 V-7] 그림을 이용한 문제 표현

그리고 이 두 그림을 이용하여 문제를 해결하였다. 도영이가 사용한 전략은 '채워넣기'였다. 왼쪽의 넓이가 작은 도형은 오른쪽 도형에 포함된다. 도영이는 이 점에 주목하여 다음 [그림 -8]과 같이 왼쪽 도형을 오른쪽 도형에 두 번 채워넣고 남는 영역의 넓이(40-15-15=10, 10÷2=5)를 이용하여 문제를 해결하였다.

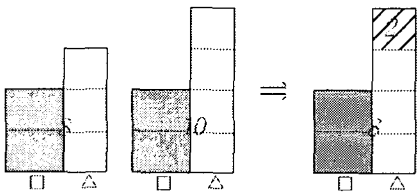


[그림 V-8] 그림그리기 전략을 사용한 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제 풀이

$\begin{cases} ax+by=u \\ ax+cy=v \end{cases}$ 유형의 문제는 [그림 V-9]와 같이 도형의 단순비교를 통해서 해결된다. 그러나 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제는 도형의 단순비교를 통해서 바로 해결되지 않는다. 위에서 도영이가 한 넓이가 작은 도형으로 큰 도형을 채우는 활동은 결과적으로 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제를 단

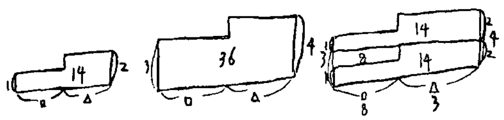
2) 머리 수와 다리 수를 위와 같이 넓이 모델로 표현할 수 있다는 것은 연구자가 도영이에게 알려 주었다.

순비교로 해결할 수 있는 $\begin{cases} ax+by=u \\ ax+cy=v \end{cases}$ 유형의 문제로 바꾼 효과를 낳는다.

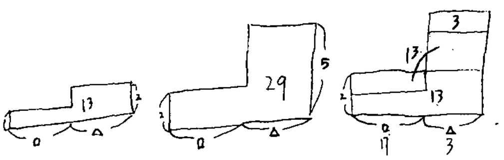


[그림 V-9] 도형의 단순비교로 해결되는 $\begin{cases} ax+by=u \\ ax+cy=v \end{cases}$ 유형

$\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제를 위와 같이 그림그리기 전략으로 푼 도영이의 경험은 '모자 1개와 안경 2개에 14달러, 모자 3개와 안경 4개에 36달러일 때 모자와 안경의 가격 구하기'와 같이 $\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$ 유형의 문제 중 작은 도형을 큰 도형에 □나 △ 중 한 쪽을 꽉 채웠을 때 다른 쪽(△나 □쪽)이 큰 도형 밖으로 벗어나지 않는 유형의 문제를 푸는데 도움이 되는 것으로 보인다. $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형의 문제에 이어 위와 같은 모자 안경 가격 구하기 문제를 제시하였을 때, 도영이는 다음과 같이 그림그리기 전략으로 문제를 해결하였다.



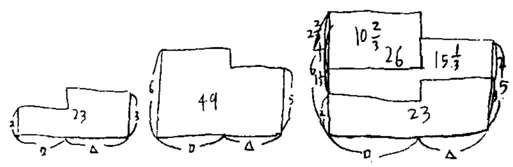
[그림 V-10] $\begin{cases} x+2y=14 \\ 3x+4y=36 \end{cases}$의 그림 풀이



[그림 V-11] $\begin{cases} x+2y=13 \\ 2x+5y=29 \end{cases}$의 그림 풀이

두 문제의 풀이에서 큰 도형에 작은 도형의 넓이를 채워넣는 방법에 차이가 있다. 도영이는 [그림 V-10]과 같이 작은 도형의 모양을 그대로 유지하면서 큰 도형에 반복해서 넣어 큰 도형의 어느 한 쪽을 채울 수 있을 때에는 그렇게 하는 것을 선호하였다. 그러나 [그림 V-11]과 같이 그렇게 할 수 없는 경우에는 작은 도형과 넓이가 같은 영역을 큰 도형에 채워나가는 변형된 방식으로 문제를 해결하였다. 도영이는 문제를 푼 방법을 설명할 때에 반복적으로 "네모가 못 들어갈 때까지", "네모에 더 이상 1이 없을 때까지", "네모가 꽉 찼을 때까지", "세모가 안 들어갈 때까지"와 같은 표현을 사용하였다.

이이서 도영이는 $\begin{cases} 2x+3y=23 \\ 6x+5y=49 \end{cases}$에 해당하는 문장제 해결을 시도하였다.

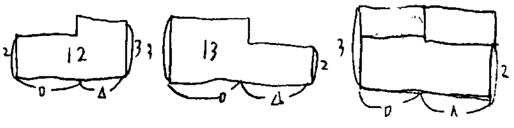


[그림 V-12] $\begin{cases} 2x+3y=23 \\ 6x+5y=49 \end{cases}$의 그림 해결

□쪽 줄을 맞추기 위해 작은 도형을 큰 도형에 세 번 넣는 방식으로 해결할 것이라고 예상하였으나, 도영이는 □쪽 줄을 맞추려고 작은 도형을 큰 도형에 두 번 넣으려고 하다가 그렇게 하면 △쪽이 큰 도형의 영역을 벗어나는 것을 깨닫고 중단하였다. 그리고 잠시 후 △쪽 높이를 맞추는 방법으로 문제를 해결하였다([그림 V-12]). △쪽은 작은 도형을 자연수번 넣어서는 높이가 큰 도형과 맞지 않는다. 도영이는 △쪽 높이를 딱 맞추기 위해 작은 쪽 도형을 $\frac{2}{3}$배로 축소하여 삽입하여,[3] 작은 도형을 반복 삽입한 것이 큰 도형을 벗어나지 않게 하면서

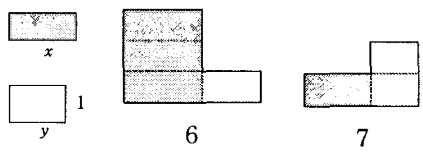
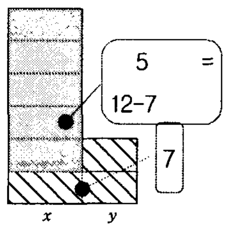
△쪽 높이를 맞추었다.

도영이가 □쪽 높이를 맞추려고 하다가 △쪽을 맞추는 쪽으로 전환한 것은 도영이가 '한쪽 높이를 맞출 때까지 작은 도형을 큰 도형에 삽입하되 작은 도형을 삽입한 것이 큰 도형을 벗어나면 안 된다'고 생각하고 있음을 보여준다. 그런데 이와 같은 생각은 $\begin{cases}2x+3y=12\\3x+2y=13\end{cases}$와 같은 유형의 문장제를 그림그리기 전략으로 해결하는데 방해가 된다. 실제로 도영이는 이 문제를 다음과 같이 그림을 그리고 나서 더 이상 해결하지 못하였다([그림 V-13]). 이것을 풀기 위해서는 도형 속을 '채운다'는 것에서 □와 △ 중 어느 한 쪽 높이를 '맞춘다'는 것으로 관념의 전환이 필요하다.[4]



[그림 V-13] $\begin{cases}2x+3y=12\\3x+2y=13\end{cases}$의 해결 실패

한쪽 도형을 반복하여 삽입하면 다른 도형을 벗어나는 유형도 그림그리기 전략으로 해결할 수 있다. 예를 들어, 연립방정식 $\begin{cases}3x+y=6\\x+2y=7\end{cases}$ 은 [그림 V-14]와 같이 벗어난 부분의 넓이를 이용해 해결할 수 있다.

	$\begin{cases}3x+y=6\\x+2y=7\end{cases}$
	$\begin{cases}6x+2y=12\\x+2y=7\end{cases}$ $5x=5$로부터 $x=1$

[그림 V-14] 한쪽 도형을 반복하여 삽입하면 다른 도형을 벗어나는 유형의 그림 풀이

3) 이와 같은 그림을 이용한 풀이에는 등식의 성질이 이용되고 있다. 등식의 성질은 교육과정상 중학교 학습 내용이다(교육부, 1998). 이 점을 생각하면 초등학교에서 그림그리기 전략을 사용한 위의 접근법은 논리적으로 도입이 불가능해 보인다. 그러나 실상은 꼭 그렇지 않다. 수학사를 보면 인류가 어떤 수학적 개념을 의식적 반성의 대상으로 삼기에 앞서 이미 문제해결의 도구로 오래 동안 사용해 온 사례들을 볼 수 있다(Brousseau, 1997). 도영이에게 이 문제 해결에 사용된 $(2\times\square+3\times\triangle)\times\frac{2}{3}=23\times\frac{2}{3}$와 같은 '등식의 성질'은 수학적 개념으로 의식화되어 있지 않으면서 암묵적으로 문제의 해결에 사용되는, Brousseau의 용어로, 원시수학적 개념에 해당하는 것으로 볼 수 있다.

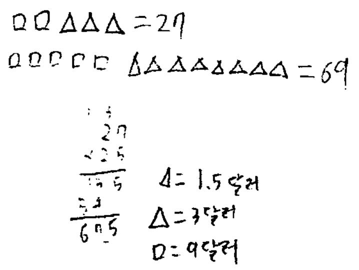
4) 도영이의 사례는 그림그리기 전략으로 초등학교 교과서에 제시된 $\begin{cases}x+y=u\\ax+by=v\end{cases}$ 유형의 문제와 한 도형을 반복적으로 다른 도형을 벗어나지 않게 채우면서 한쪽 높이를 일치하게 할 수 있는 유형의 문제를 해결하는 것이 초등 6학년 학생 수준에서 가능함을 시사한다. 또한 이런 유형의 문제를 해결하는 과정에서 생긴 '채운다'는 관념이 더 일반적인 유형을 그림으로 푸는 단계에서는 극복해야 할 장애가 됨을 보여준다.

그러나 그림그리기 전략을 논의하는 이유가 가감법과 연결될 수 있는 전략을 초등학생 수준에서 너무 어렵지 않은 범위에서 경험하게 하고 이를 장차 가감법 도입의 바탕으로 삼으려는 데에 있다는 점에서 보면, 이와 같은 유형의 문제 또는 더 일반적인 유형의 문제까지 계속하여 그림그리기 전략으로 풀게 할 필요성은 강하지 않다. 도영이가 이미 경험한 문제 해결 속에 가감법 풀이법과 연결되는 아이디어가 들어 있으므로, 이 경험을 가감법과 연결시킬 수 있다.

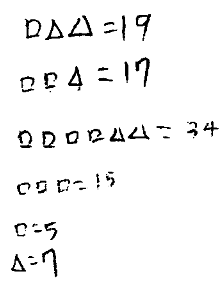
도영이가 그림그리기 전략으로 이상과 같이 문제를 해결하는 경험을 한 뒤에, 그림을 그리지 않고 문제를 풀 수 있는지 생각해 보도록 하였다.

연구자: 도영아, 그림 그렸을 때 어떤 식으로 생각을 했었지?.
도영: 이걸 이거에 넣어서..
연구자: 언제까지 넣었지?
도영: 꽉 찰 때까지. 한 쪽이.
연구자: 한 쪽이 꽉 차서
도영: 못 들어갈 때까지.
연구자: 딱 맞을 때까지 했었지?
도영: 응. 그러면 이것도 네모가 2개니까 4개로 만들려면......

도영이는 그림그리기 전략으로 해결한 경험을 반성하면서 '딱 맞을 때까지' 채운다는 아이디어를 의식하였고, 그 아이디어를 적용하여 일련의 문제를 그림을 그려 채우지 않고 해결하였다. 예를 들어, [그림 V-15]에서 도영이는 첫 줄의 □ 2개를 둘째 줄의 □ 5개와 같게 만들기 위해 첫 줄을 2.5배를 하였다.[5] 그리하여 □ 5개와 △ 7개 반이 67.5 달러임을 구한 후, 세모 반 개의 값을 구하여 문제를 해결하고 있다. [그림 V-16]에서는 둘째 줄에 두 배를 하여 △를 첫째 줄과 같이 두 개로 만들어 문제를 해결하고 있다.

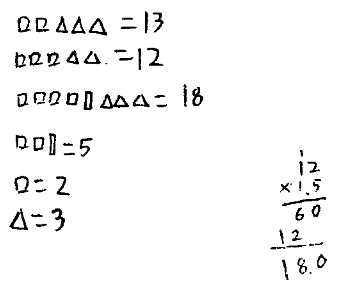


[그림 V-15] $\begin{cases}2x+3y=27\\5x+8y=69\end{cases}$ 의 해결



[그림 V-16] $\begin{cases}x+2y=19\\2x+y=17\end{cases}$ 의 해결

나아가 도영이는 앞서 그림그리기 전략으로 해결하지 못했던 $\begin{cases}2x+3y=12\\3x+2y=13\end{cases}$ 유형의 문장제도, 이전과는 달리 둘째 줄의 △ 2개를 첫째줄의 △의 개수 3과 같게 만들기 위하여 둘째 줄 '□□□△△'에 1.5배를 하여 푸는데 성공하였다.



[그림 V-17] $\begin{cases}2x+3y=12\\3x+2y=13\end{cases}$ 의 해결

5) 모자 2개 안경 3개에 27달러, 모자 5개, 안경 8개에 69달러일 때, 모자와 안경 가격 구하기 문제

연구자: 지난 번에는 이거 못 풀었지. 왜 못 풀었지? 채우려고 했었는데....

도영: 꽉 안 찼어. 음... 이게 넘쳤네.[6]

연구자: 이 문제를 그림으로 할 때에 중요한 생각이 뭐겠어? 도영이가 썼던 방법은 뭐였지?

도영: 채워넣기

연구자: 채워넣기. 언제까지?

도영: 끝까지 꽉 찰 때까지.

연구자: (위 [그림 V-17]의 풀이를 가리키며) 여기서는 다른 건가?

도영: 나중에 채워 넣는 것은 마찬가지야.

도영이는 처음에 사용한 그림그리기 전략과 새로 사용한 방법이 어느 한 쪽이 끝까지 꽉 찰 때까지 채워 넣는다는 공통점이 있음을 인지하고 있었다. 어느 한 쪽이 끝까지 꽉 차게 채운다는 아이디어는 연립방정식을 이루는 두 식에서 x 또는 y의 계수를 같게 만든다는 가감법의 아이디어와 직접적인 관련이 있다. 그러므로 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형 및 작은 도형을 반복 삽입한 것이 큰 도형을 벗어나지 않는 유형의 문제를 그림그리기 전략으로 푸는 활동과 경험을 압축, 형식화하여 가감법으로 이행할 수 있다.

이상의 분석을 바탕으로 우리는 이원일차연립방정식 문제 지도에 대하여 다음과 같은 방법을 생각해볼 수 있을 것이다. 먼저 학생에게 $\begin{cases} ax+by=u \\ ax+cy=v \end{cases}$ 유형으로 표현될 수 있는 문장제 문제를 그림그리기 전략으로 푸는 경험을 제공한다. 이를 통하여 좌우 양쪽 중 높이가 일치하는 쪽은 문제가 되지 않으며 높이가 일치하지 않는 쪽에 주목하면 문제가 풀린다는 것을 알게 된다. 그 다음으로 이와 같은 단순 비교로 해결할 수 없는 $\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$ 유형으로 표현될 수 있는 문장제 문제 혹은 그 이상의 수준의 문제를 그림그리기 전략으로 푸는 경험을 통해 도형 속을 채우는 것, 나아가서 □와 △ 중 어느 한 쪽 높이를 맞춘다는 아이디어를 터득하게 된다. 그림그리기 전략으로 문제를 해결하는 경험을 한 뒤에, 그림을 그리지 않고 문제를 풀 수 있는지 생각해 보도록 하여, 이미 경험한 문제 해결 속에 들어있는 가감법 풀이법과 연결되는 아이디어를 가감법과 연결할 수 있도록 한다. 이 모든 과정 전반에 걸쳐 그림그리기 전략으로 푸는 활동과 경험을 압축, 형식화하여 가감법으로 이행할 수 있도록 한다.

이 장에서 제시한 접근법은 초등학교에서 이미 지도하고 있는 전략인 그림그리기 전략을 사용한 동시에, 문제 구조 통찰을 통해 양 사이에 내재된 관계를 파악하고 일반적인 관계 구조를 표현하게 하는 방법이다. 앞의 교과서 분석에서 초등학교 교과서에서, 5-가, 5-나, 6-가, 6-나의 네 단계에 걸쳐 동일 유형의 문제를 계속 다루고 있지만, 예상과 확인 전략과 표 만들기 전략이라는 제한된 전략이 반복 사용되고 있다는 문제점을 지적한 바 있다. 이 장에서 제시한 그림그리기 전략을 사용한 접근법을 6학년 수준에서 다루는 것은 2년간 제한된 전략을 반복 사용하게 하고 있는 문제점을 완화하는 방안이 될 수 있다. 뿐만 아니라 이 접근법은 중학교의 방정식 풀이법인 가감법과 잘 연결된다. 초등학교에서는 예상과 확인 및 표 만들기에 이어 그림그리기 전략으로 접근하고, 중학교에서는 초등수학의 접근법을 반성하고 형식화하는 과정을 거쳐 가감법을 도입하면, 초등수학과 중등수학의 연계성이 강화될 수 있을 것이며, 중학교 수학 교과서와 초등학교 수학 교과서가 각각 별개의 접근법을 제시하고

6) □쪽을 꽉 채우려고 하면 △쪽이 주어진 영역 밖으로 나간다는 의미이다.

있을 뿐 서로 연결되지 않는다는 문제점이 완화될 것이다.

Ⅵ. 결 어

현재의 이원화된 교사 양성 체제 하에서는 초등수학과 중등수학의 연결성 문제에 주의를 기울일 필요가 있다. 교육과정 내용 구성의 위계성 차원에서는 그다지 문제가 없으나 세부적인 내용 요소로 들어가 교과서 수준에서 보면, 초등수학과 중등수학의 연결성의 문제가 새롭게 제기될 수 있다. 특히 이원일차연립방정식 문장제와 같이 초등학교와 중등학교에서 반복적으로 다루어지고 있는 내용의 경우가 그러하다. 산술에서 대수로의 이행의 문제와 같이 초등수학과 중등수학의 연결성을 다룬 연구는 많으나, 연립방정식과 관련하여 초등수학과 중등수학의 연결성을 본격적으로 논의한 연구는 부족하다. 이에 이 논문에서는 이원일차연립방정식 문장제와 관련하여 초등수학과 중등수학의 연결성 문제를 논의하였다. 초등학교 수학 교과서와 중학교 수학 교과서에서 이원일차연립방정식 문장제가 다루어지는 방식을 연결성 측면에서 분석하고 연결성을 강화하는 접근법을 제안하였다.

교과서 분석 결과, 초등학교 교과서에서 5-가, 5-나, 6-가, 6-나의 네 단계에 걸쳐 동일 유형($\begin{cases} x+y=u \\ ax+by=v \end{cases}$꼴로 식을 세울 수 있는 유형)의 문장제가 계속 다루어지고, 예상과 확인 전략과 표 만들기 전략이 반복적으로 사용되고 있었다. 또한 초등학교 수학 교과서와 중학교 수학 교과서가 각각 별개의 접근법을 취하고 있을 뿐 두 접근법이 서로 연결되고 있지 않다는 문제점이 발견되었다.

이 논문에서는 그림그리기 전략을 사용하여 위의 문제점을 개선하는 방안을 한 초등 6학년 아동의 사례와 더불어 제시하였다. 이 논문에서 제시한 그림그리기 전략을 통한 접근법은 이원일차연립방정식을 도입하는 최적의 방법으로서가 아니라 초등수학과 중등수학의 연결성을 강화하는 방안으로 제안된 것이다. 본 논문에서 제시한 접근법은 초등학교 5, 6학년에서 이원일차방정식 문장제를 현재보다 다양하게 접근하는 데 도움이 될 수 있다. 또한 그림그리기 전략을 사용한 접근법 속에는 가감법으로 형식화될 수 있는 아이디어가 들어 있으므로, 이를 형식화하면서 가감법을 도입하면 이원일차연립방정식과 관련된 초등수학과 중등수학의 연결성이 강화될 것이다.

참고문헌

강옥기 · 정순영 · 이환철(2002). **중학교 수학 8-가**. 서울: 두산.

강행고 · 이화영 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙(2002). **중학교 수학 8-가**. 서울: 중앙교육진흥연구소.

고성은 · 박복현 · 김준희 · 최수일 · 강운중 · 소순영(2002). 중학교 수학 8-가. 서울: 블랙박스.

교육부(1998). **수학과교육과정**. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2000). **수학 5-가 교사용지도서**. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004a). **수학 2-나**. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004b). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004c). **수학익힘책 5-가**. 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004d). **수학 6-가.** 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004e). **수학익힘책 6-가.** 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004f). **수학 5-나.** 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004g). **수학익힘책 5-나.** 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004h). **수학 6-나.** 서울: 대한교과서.

교육인적자원부(2004i). **수학익힘책 6-나.** 서울: 대한교과서.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 고려출판.

김성준(2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

김지원(2003). **한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구.** 인천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

박규홍 · 고성군 · 김성국 · 김유태 · 박재용 · 육상국 · 임창우 · 한옥동(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 두레교육.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 교학사.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 대한교과서.

배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 한성교육연구소.

양승갑 · 박영수 · 박원선 · 배종숙 · 성덕현 · 이성길 · 홍우철(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 금성출판사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 도서출판 디딤돌.

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 금성출판사.

최용준(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 천재교육.

황석근 · 이재돈(2002). **중학교 수학 8-가.** 서울: 한서출판사.

Breiteig, T., & Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: To reason, explain, argue, generalize, and justify. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225-232). Prague: PME.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.fv* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dickinson, P., & Eade, F. (2004). Using the number line to investigate the solving of linear equations. *For the learning of Mathematics, 24*(2), 41-47.

Filloy, E. & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Herscovics, N. & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Linchevski, L. & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra: Operating on the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*(1), 39-65.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* NY: John Wiley & sons, Inc.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 191-228.

Van Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra.* CD β-Press/Freudenthal Institute.

Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 63-75.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Crossing the Gap between Elementary School Mathematics and Secondary School Mathematics: The Case of Systems of Linear Equations

Kwon, Seok Il · Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

This study deals with the problem of transition from arithmetic to algebra and the relationship between elementary and secondary school mathematics for systems of linear equations. In elementary school, activity for solving word problems related to systems of linear equations in two variables falls broadly into using two strategies: Guess and check and making a table. In secondary school, those problems are solved algebraically, for example, by solving systems of equations using the technique of elimination. The analysis of mathematics textbooks shows that there is no link between strategies of elementary school mathematics and secondary school mathematics

We devised an alternative way to reinforce link between elementary and secondary school mathematics for systems of linear equations. Drawing a diagram can be introduced as a strategy solving word problems related to systems of linear equations in two variables in elementary school. Moreover it is closely related to the idea of the technique of elimination of secondary school mathematics. It may be a critical juncture of elementary-secondary school mathematics in the case of systems of linear equations in two variables.

* **Key words** : systems of linear equations(연립방정식), transition from arithmetic to algebra(산술에서 대수로의 이행), word problem(문장제), problem-solving strategy(문제해결전략), drawing a diagram(그림그리기)

논문 접수: 2007. 3. 31
심사 완료: 2007. 5. 1