

## 엔진과 추진축의 비틀림 가진력에 관한 해석적 연구

김병삼\*, 장일도<sup>+</sup>, 이봉구<sup>+</sup>, 문상돈<sup>++</sup>  
(논문접수일 2006. 8. 14, 심사완료일 2007. 3. 17)

### An Analytical Study on Torsional Excitation Force of an Engine and Propeller Shaft

Byoung-Sam Kim\*, Il-Do Chang<sup>+</sup>, Bong-Goo Rhee<sup>+</sup>, Sang-Don Mun<sup>++</sup>

#### Abstract

Torque fluctuation of an engine and angular velocity variation of a propeller shaft are the main excitation sources in a vehicle driveline. This paper presents the mechanism of these excitation sources. An equivalent model of the engine system and propeller shaft system is constructed to simulate the excitation phenomena. The analytical model contains the geometrical and dynamic mechanism. Combustion pressure of the cylinder is measured from dynamometer. The computer simulation is carried out by commercial program package. Results of the simulations show the characteristics of the torsional excitation source of the driveline.

**Key Words** : Driveline(동력 전달계), Engine(엔진), Propeller Shaft(추진축), Torsional Vibration(비틀림 진동), Harmonic Excitation(조화 가진)

#### 기호 설명

A	: Piston Area [m <sup>2</sup> ]	k	: Order
c <sub>g</sub>	: Cosine Coefficient of the Gas Torque [N/m]	L <sub>c</sub>	: Length of Connecting Rod [m]
c <sub>k</sub>	: Cosine Coefficient of the kth Order Fluctuation Torque [N/m]	M <sub>D</sub>	: Equivalent Reciprocate Mass of Connecting Rod
f <sub>Hz</sub>	: Frequency [Hz]	M <sub>P</sub>	: Piston Mass
f <sub>rpm</sub>	: Engine rpm [rev/min]	M <sub>PP</sub>	: Piston Pin Mass
		M <sub>rec</sub>	: Total Mass of Reciprocating Part [Kg]
		N <sub>cycle</sub>	: Cycle Number of Engine

\* 원광대학교 기계자동차공학부 (anvkbs@wonkwang.ac.kr)  
주소: 570-749 전북 익산시 신용동 344-2

+ 원광대학교 기계자동차공학부

++ 익산대학 산업설비제어과

- $N_{cylinder}$  : Number of Cylinder
- $ORDER_{dominant}$  : Dominant Firing Order
- $P''$  : Force Component for Tangential Direction to Crank Radius [N]
- $p$  : Indicated Gas Pressure for Each Cylinder [ $N/m^2$ ]
- $R$  : Crank Radius [m]
- $s_k$  : Sine Coefficient of the kth order fluctuation torque [N/m]
- $s_g$  : Sine Coefficient of the Gas Torque [N/m]
- $s_i$  : Sine Coefficient of the Inertia Torque [N/m]
- $T_k$  : The Amplitude of the kth Order Fluctuation Torque [N/m]
- $T(t)$  : Total Fluctuating Torque
- $T_q(t)$  : Time Delayed Torque [N/m]
- $T_{rec}(t)$  : Inertia Torque from the Motion of the Reciprocating Mass [N/m]
- $t$  : Time [sec]
- $\ddot{y}$  : Piston Acceleration [ $m/sec^2$ ]
- $u, \zeta, \eta$  : Coordinate of the Universal Joint Input Side

시 피동축은 구동축의 회전 주파수에 대해 2차 조화 주파수로 회전하게 된다<sup>(4-6)</sup>. 이는 엔진의 폭발력에 의한 비틀림 가진력과 더불어 동력 전달계에 있어서 가장 큰 가진력으로 작용한다.

본 연구에서는 엔진과 추진축의 가진력의 발생 메커니즘을 밝히고 이를 해석하기 위한 비틀림 등가 모델을 개발하였다. 엔진의 경우 플라이휠까지를 엔진 시스템으로 보고 전체를 6자유도계로 모델링 하였다. 엔진의 가진력을 해석하기 위한 가진 압력 함수를 만들기 위하여 해석 대상과 동종 엔진에 대한 다이나모미터 실험을 수행하였다. 추진축의 가진 효과는 입력되는 각속도에 대한 변동 성분으로 나타난다. 추진축의 교각 효과에 의한 동력 전달계에서의 가진 효과를 파악하기 위해 추진축에 입력되는 속도는 일정하다고 보고 해석하였고, 해석의 대상은 추진축 이후의 차축까지를 해석 대상으로 포함하였다. 추진축의 교각 효과를 해석하기 위한 모델은 추진축과 차축 및 차륜으로 이루어지는 시스템이 모터로 구동되고 있다고 보고 이에 대한 등가 모델을 구성하였다. 모터-추진축-차축-차륜으로 구성된 시스템을 10 자유도계의 등가 모델로 해석하였다. 구성되어진 모델은 비틀림 진동 전용 해석 프로그램인 ARLA Simul v6.70과 ARLA Simstat v2.3을 사용하였으며 수치해석을 통한 결과를 이론식과 비교 분석하였다.

## 1. 서론

차량의 동력 전달계는 엔진으로부터 차륜까지 엔진의 구동력을 전달하는 장치들의 조합이다. 동력 전달계의 주요 부품들은 대부분 회전하는 부품으로 구성되어 있으며, 이들 부품은 동력의 전달 과정에서 가진력에 대한 공진 및 회전 불평형 등의 원인으로 비틀림 및 굽힘 진동을 일으키는 진동계로 볼 수 있다. 구동력이 토크의 형태로 전달되며 각 구성 부품이 회전운동을 하고 있으므로 동력 전달계에서의 진동, 소음 발생 현상은 비틀림 진동의 지배를 받는다고 볼 수 있다.

엔진동력 전달계에 있어서 주된 가진력은 엔진의 폭발에 따른 토크의 변동과 교각을 포함한 추진축의 기구학적 특성에 기인한 속도 변동을 들 수 있다. 엔진의 폭발에 따른 토크 변동은 동력 전달계의 가장 두드러진 비틀림 가진원이며 엔진의 행정 수와 실린더의 수 및 회전수에 따라 지배적인 주파수가 결정된다<sup>(1-3)</sup>. 이러한 엔진의 가진력은 플라이휠을 통하여 구동계로 직접 전달된다. 추진축은 교각을 갖는 유니버설 조인트를 포함하고 있으며, 이로 인해 토크의 전달

## 2. 가진 메커니즘

### 2.1 엔진의 가진 메커니즘

엔진의 가진력은 실린더의 폭발 압력에 기인하고 크랭크 메커니즘과 관계되어 회전 질량에 의한 토크와 합성되어 플라이휠을 통하여 동력 전달계로 작용한다. 각각의 실린더는 일정한 위상 차이를 가지고 폭발한다. 엔진의 폭발력에 기인한 가진력은 각 실린더의 행정 수와 엔진의 실린더 수 및 회전수의 함수로 작용한다. 식 (1)은 동력 전달계에 가해지는 가진력의 엔진 회전수에 대한 조화 차수이다.  $N_{cylinder}$ 와  $N_{cycle}$ 는 각각 실린더 수와 행정수를 나타낸다. 식 (2)는 가진 주파수이다.

$$ORDER_{dominant} = \frac{N_{cylinder}}{N_{cycle}/2} \quad (1)$$

$$f_{rpm} = \frac{60 \cdot f_{Hz}}{ORDER} \quad (2)$$

$f_{Hz}$ 는 엔진의 회전 주파수이다. 식 (1)로부터 4행정 4실린

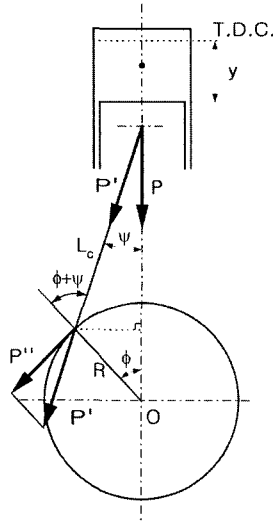


Fig. 1 Schematic diagram of single cylinder

더 엔진은 크랭크축 회전수의 2차 성분이 주성분임을 알 수 있다.

Fig. 1은 단 실린더의 개략도이다. 단 실린더에 있어서 크랭크축에 작용하는 토크는 폭발에 의한 가진 토크와 관성력에 의한 토크가 있다. 폭발에 의해 크랭크축에 작용하는 가진 토크는 Fig. 1에서와 같이 폭발 압력의 크랭크축에 대한 수직 방향 성분에 의해 발생하고 식 (3)과 같다.

$$T_g = RP'' \approx RP(\sin\phi + \frac{R}{2L_c} \sin 2\phi) \quad (3)$$

관성력에 의한 토크는 식 (4)와 같으며 관성력, 등가 질량, 피스톤의 가속도는 각각 식 (5), (6), (7)과 같다.

$$T_{rec} = -RF_{rec}(\sin\phi + \frac{R}{2L_c} \sin 2\phi) \\ = M_{rec}\omega^2 R^2 [\frac{R}{4L_c} \sin\phi - \frac{1}{2} \sin 2\phi - \frac{3R}{4L_c} \sin 3\phi] \quad (4)$$

$$F_{rec} = -M_{rec}\ddot{y}_p \quad (5)$$

$$M_{rec} = M_p + M_{pp} + M_D \quad (6)$$

$$\ddot{y} \approx \omega^2 R(\cos\phi + \frac{R}{L_c} \cos 2\phi) \quad (7)$$

단실린더에서 발생하여 크랭크축에 전달되는 토크는 식 (8)

과 같다.

$$T(t) = T_g(t) + T_{rec}(t) \quad (8)$$

또한 식 (8)에 식 (3), (4)를 대입하여 정리하면 식 (9)와 같다.

$$T(t) = \sum_{k=0.5}^{h_0} s_k \sin(k\omega t) + \sum_{k=0.5}^{h_0} c_k \cos(k\omega t) \\ = \sum_{k=0.5}^{h_0} T_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (9)$$

여기서 k는 조화 차수이고, 이는 크랭크축이 1회전하는 동안 몇 번의 가진이 일어나는가를 의미한다. 본 연구 대상이 4행정 기관이라고 가정하면  $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ 이다. 여기서  $T_k$ 와  $\gamma_k$ 는 각각 k번째 차수의 진폭과 위상각을 가리키며 식 (10)과 같은 관계를 가진다.

$$T_k = \sqrt{s_k^2 + c_k^2} = \sqrt{(s_g + s_i)_k^2 + c_{gk}^2} \\ \gamma_k = \tan^{-1} \frac{c_k}{s_k} = \tan^{-1} \frac{c_k}{(s_g + s_i)_k} \quad (10)$$

여기서 c와 s는 각각 코사인, 사인 계수를 의미하며 아래 첨자 g와 i는 가스과 관성을 의미한다.

실제의 엔진은 다수의 실린더가 직렬 또는 병렬로 연결되어 있다. 4실린더 엔진의 경우 각 실린더는  $\pi$  rad의 위상차를 가지고 폭발하며, 본 연구에서 사용된 엔진은 폭발 순서가 1-3-4-2이다. 각각의 실린더에서 발생하는 토크는 동일하고 위상차만 있다고 생각하면 폭발 순서에 따라 동일한 시간차를 갖는다고 볼 수 있으며 단 실린더의 가진 토크는 식 (11)과 같다. 따라서 플라이 휠에 작용하는 가진력은 식 (12)와 같다. 여기서 q는 폭발 순서를 나타낸다.

$$T_q(t) = \sum_{k=0.5}^{h_0} T_k \sin\{k\omega(t - \Delta t) + \gamma_k\} \\ \Delta t = \frac{60}{2 \times rpm}(q-1) \quad (11)$$

$$T_{flywheel} = \sum_{q=1}^4 T_q \quad (12)$$

## 2.2 유니버설 조인트의 가진 메커니즘

Fig. 2는 상하교각( $\alpha_u$ )과 좌우교각( $\beta_u$ )을 갖는 유니버설 조인트 기구이다. 구동축의 좌표계를  $\iota, \zeta, \eta$  로, 피동축의

좌표계를  $x, y, z$  로 설정하고 구동축과 피동축의 각속도 관계를  $\overline{CD}$  와  $\overline{EF}$  의 직교성을 이용하여 나타낼 수 있다. 십자축의 중심으로부터 점 C, E에 접촉하는 벡터를 각각  $r_C, r_E$ 라 하고, 구동축의 회전각이  $\theta_{11}$ 이라 하면  $r_C$ 는 식 (13)과 같이 나타낼 수 있다. 이때 R은 십자축의 한끝에서 중심까지의 거리이다.

$$r_C = [T_0] \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{11} & -\sin\theta_{11} \\ 0 & \sin\theta_{11} & \cos\theta_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} = -r_D \quad (13)$$

동일한 시간 간격동안 피동 축에서의 회전각을  $\theta_{12}$ 라 하면  $r_E$ 는 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.  $T_1, T_2, T_3$ 는 각각 직선  $\overline{EF}$ 에 대한 회전각도  $\alpha$ ,  $\overline{CD}$ 에 대한 회전각도  $\beta$ , 피동축에 대한  $\theta_{12}$ 에 대한 변환 행렬이다.

$$r_E = T_1 T_2 T_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} = -r_F$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{12} & -\sin\theta_{12} \\ 0 & \sin\theta_{12} & \cos\theta_{12} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$r_C, r_E$ 는 서로 직교하는 벡터이므로 식 (15)와 같이 나타낸다.

$$r_C \cdot r_E = 0 \quad (15)$$

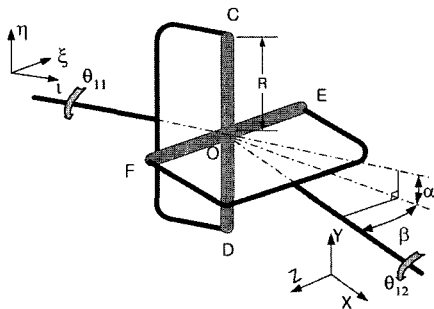


Fig. 2 Universal joint system

식 (13)과 식 (14)를 전개한 후 식 (15)의 관계를 적용하면 구동 회전각  $\theta_{11}$ 과 피동 회전각  $\theta_{12}$ 의 관계는 식 (16)과 같다.

$$\tan\theta_{12} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \tan\theta_{11} + \tan\alpha \sin\beta \quad (16)$$

식 (16)은 측면 및 평면 교각을 고려한 경우이고 측면 교각만을 고려한다면 식 (17)과 같다.

$$\tan\theta_{12} = \frac{1}{\cos\alpha} \tan\theta_{11} \quad (17)$$

0° 위상차 유니버설 조인트의 경우  $\theta_{11}$ 과  $\theta_{12}$ 는 식 (18)의 관계를 갖는다.

$$\theta_{12} = \arctan\left(\frac{1}{\cos\alpha} \tan\theta_{11}\right) \quad (18)$$

식 (18)을 급수 전개한 후 고차항을 무시할 경우 식 (19)와 같고 이를 미분하여 식 (20), (21)과 같은 각속도와 각가속도를 얻을 수 있다.

$$\theta_{12} = \theta_{11} + \epsilon \sin 2\Omega t \quad (19)$$

$$\dot{\theta}_{12} = \Omega (1 + 2\epsilon \cos 2\theta_{11}) \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_{12} = -4\Omega^2 \epsilon \sin 2\theta_{11} \quad (21)$$

이때  $\epsilon = \tan^2(\frac{\alpha}{2})$ 이며, 식 (20), (21)을 통해 교각을 갖는 유니버설 조인트에 연결된 피동 축은 구동 주파수  $\Omega$ 에 대해  $\theta_{12} = \theta_{11} + f(2\Omega t)$  형태의 비정속 회전이 발생하며  $2\Omega$ 의 각주파수를 가지고 진동함이다. 식 (20)으로부터 입력축의 각속도가 증가함에 따라 피동 축에서 각속도의 진폭은  $\Omega$ 배가 증가함을 알 수 있다.

### 3. 수치해석 모델 및 운동 방정식

엔진과 추진축에서 발생하는 비틀림 가진력을 수치해석하기 위하여 엔진계는 Fig. 3, 추진축 계는 Fig. 4와 같이 등가화하였다.  $J_1$ 은 실린더 전방의 폴리류를 포함하고  $J_2 \sim J_5$ 는 네 개의 실린더에 대하여 각각의 등가 관성을 나타낸다. 각 실린더에는 엔진의 가진력  $T_i$ 가 작용한다고 가정하였다. 각각의 관성은 질량이 없는 강성과 감쇠로 연결되어있고 실린더에는 질량 감쇠가 작용한다고 가정하였다. 추진축은 3자유도계로 모델링하였다. 수치해석에는 3자유도계로 구성된 추진축을 포함한 모터-추진축-차축-차륜으로 구성된 시스템에 대한 10자유도계 등가 모델을 사용하였다. 구성되어

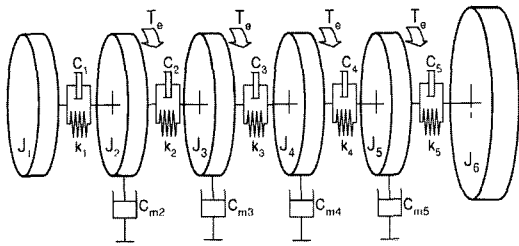


Fig. 3 Equivalent model of engine system

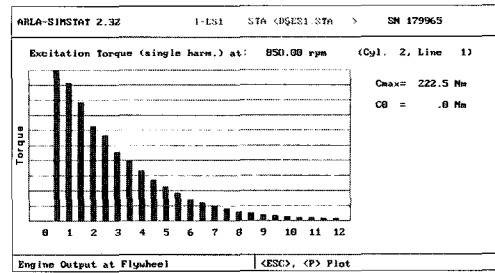


Fig. 7 Harmonic components of excitation torque on 1-cylinder(850rpm, experiments)

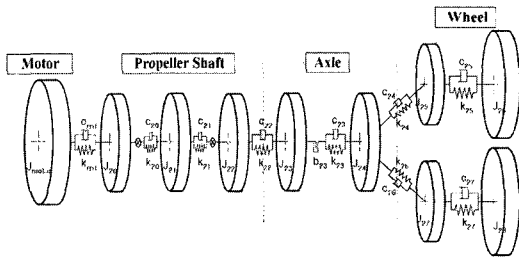


Fig. 4 10 D.O.F. model of motor-propeller shaft-axle-wheel system

진 모델의 회전관성은 실측 치수와 물성 규격표를 참조하여 계산하였고 강성 및 감쇠값은 근사식을 참조하였다. 추진축의 유니버설 조인트는 각각 측면과 상하 교각  $\alpha, \beta$ 를 포함한다.

엔진 가진력을 수치해석 하기 위하여 Fig. 5와 같은 다이나모미터로부터 실린더의 폭발 압력을 측정하여 엔진 가진력 해석에 있어서의 입력 값으로 사용하였다. Fig. 6은 850rpm, 0% 하중 작용시의 실린더 내부의 폭발 압력 선도이다. 수치해석에서는 Fig. 6을 푸리에 급수로 분해하여 1차수 간격으로 12차까지의 값으로 조합하여 입력 함수로 사용하였다. Fig. 7은 폭발압력의 차수 성분이다.

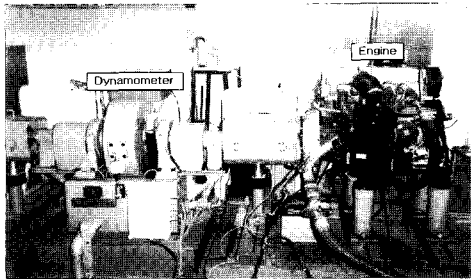


Fig. 5 Engine dynamometer

#### 4. 수치 해석 결과 및 분석

수치 해석은 비틀림 진동 해석 전용 상용 프로그램인 ARLA-SIMUL v6.7과 ARLA-SIMSTAT v.2.3을 사용하였다. Fig. 8은 단 실린더에서 한 사이클이 진행되는 동안의 크랭크축에서의 토크 변동이다. 이는 식 (9)에 대응하는 결과이다. 실린더 내부에서의 폭발이 발생하는 시점을 전·후로 하여 큰 토크의 변동이 발생함을 알 수 있다. Fig. 9는 크랭크축이 720° 회전하는 동안에 플라이 휠에서 발생하는 토크의 변동이다. 이는 식 (13)에 대응되는 결과이며 식 (12)로 표현되어지는 위상차를 갖는 4개의 실린더 토크를 합산한 결과이다. 크랭크축이 1회전 당 2회씩의 커다란 토크의 변동이 발생하고 있음을 알 수 있다. 이는 엔진의 실제 회전수에 대하여 2차 조화 성분이 지배적으로 영향을 미치는 원인이 된다. Fig. 10은 Fig. 9의 결과를 주파수 분석한 결과이다. 이 결과는 식 (2)에서 보여주는 가진 주파수의 결과이다. 즉, 4사이클 4행정 기관의 주 가진 주파수는 회전수의 2차 성분이라는 것과 일치한다. Fig. 10의 결과로부터 850rpm의 2차 성분인 1700rpm(28.3Hz) 성분이 주 가진 함

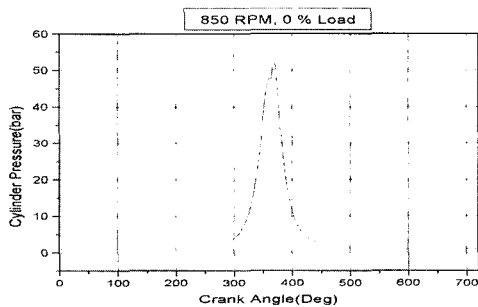


Fig. 6 Engine combustion pressure(850rpm, 0% load)

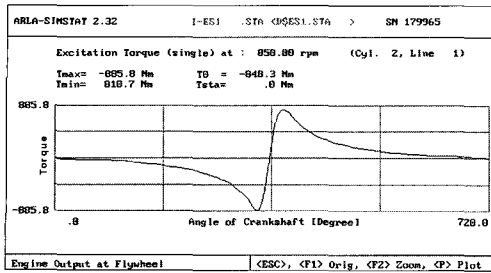


Fig. 8 Excitation torque on 1-cylinder(850rpm)

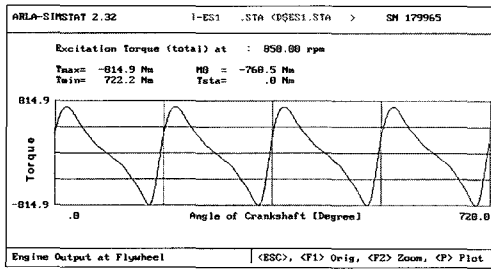


Fig. 9 Torque fluctuation of flywheel(850rpm)

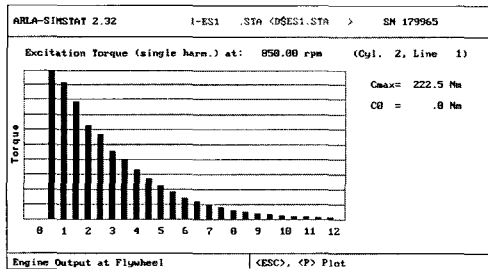
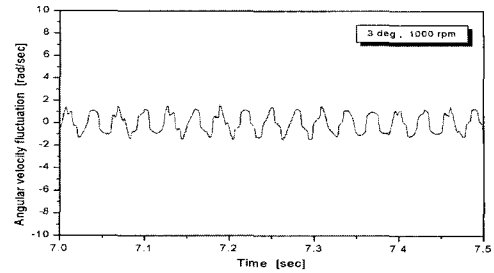
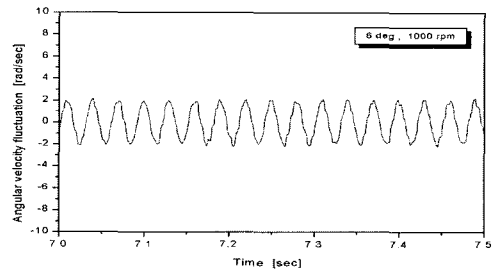


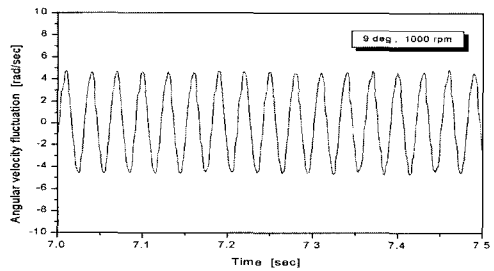
Fig. 10 Harmonic components of excitation torque on flywheel(850rpm)



(a) 3°, 1000rpm



(b) 6°, 1000rpm



(c) 9°, 1000rpm

Fig. 11 Angular velocity fluctuation of propeller shaft

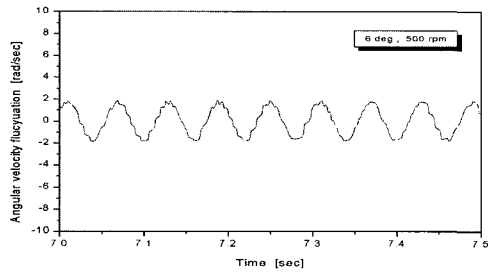
수임을 알 수 있다.

Fig. 11은 1000rpm으로 일정하게 Fig. 4와 같은 시스템을 회전시켰을 때 교각의 변화에 따른 추진축에서의 각속도를 수치 해석한 결과이다. 교각을 3°, 6°, 9°로 변화시켰을 때의 결과로 교각이 변화함에 따라 진폭이 커짐을 알 수 있다. 이는 식 (20)에서 교각이 증가할수록  $\epsilon$  값이 증가함과 같다. 6°~9°로 변화했을 때, 진폭의 변화가 큰 것은  $\epsilon$  값이  $\tan^2$ 의 함수로 변하기 때문이다.

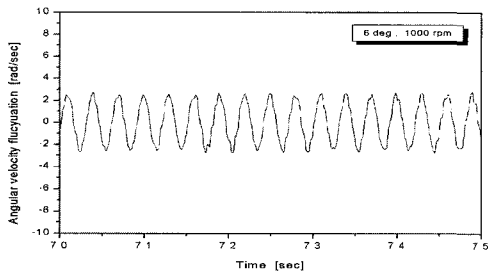
Fig. 12는 교각을 6°로 고정시킨 상태에서 입력축의 회전수만 500, 1000, 1500rpm으로 증가시킨 경우이다.

## 5. 결론 및 고찰

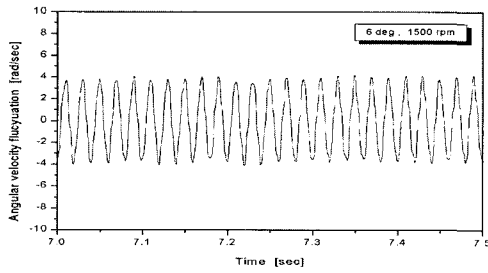
본 연구에서는 차량 동력 전달계에서 발생하는 비틀림 진동의 주 가진원인 엔진의 가진력과 추진축의 교각 효과에 따른 각속도 변동에 대한 메커니즘을 해석하였다. 또한 수치 해석을 위한 등가모델을 개발하였고 비틀림 진동 전용 프로그램을 사용하여 엔진과 추진축의 가진 효과를 해석하였다. 수치 해석 결과 엔진과 추진축의 가진력 발생 메커니즘에서 고찰되었던 관계식과 일치하는 결과를 얻을 수 있었다. 그러나 이 결과는 수치해석을 통한 결과이므로 추후 동일 해석 대상에 대한 실험을 통한 검증이 필요할 것으로 사료된다.



(a) 6°, 500rpm



(b) 6°, 1000rpm



(c) 6°, 1500rpm

Fig. 12 Angular velocity fluctuation of propeller shaft

## 감사의 글

이 논문은 2007년도 원광대학교의 교비 지원에 의해서 수행됨.

## 참고 문헌

- (1) Christopher, S. K., 1992, "Prediction and Control of Heavy Duty Powertrain Torsional Vibration," SAE 922481.
- (2) Rizzoni, R., 1989, "Diagnosis of Individual Cylinder Misfires by Signature Analysis of crankshaft speed fluctuation," SAE 890884.
- (3) Taraza, D., 1993, "Estimation of the Mean Indicated Pressure from Measurements of the Crankshafts Angular Speed Variation," SAE 932413.
- (4) Willumeit, H.-P. and Park, B. Y., *Vehicle Dynamics*, Dongmyoung Press.
- (5) Joyner, R. G., 1976, "The Truck Drive line as a Source of Vibration," SAE 760843.
- (6) Otake, T., 1992, "Prediction of Torsional Vibration Caused by Hook's Joint in Drive Train," SAE 925068.
- (7) Kim, B. S., 2005, "A Study on Vibration Characteristics of Automobile Al-alloy wheel," *Transactions of The Korean Society of Machine Tool Engineers*, Vol. 14, No. 3, pp. 122~127.