물리탐사 Mulli-Tamsa
Vol. 10, No. 2, 2007, p. 147~153

3차원 MT 역산에서 CG 법의 효율적 적용

김희준[1] · 한누리[2] · 최지향[2] · 남명진[3] · 송윤호[4*] · 서정희[5]

[1]부경대학교 환경탐사공학과
[2]서울대학교 지구환경시스템공학부
[3]Dept. of Petroleum and Geosystems Eng., The University of Texas at Austin
[4]한국지질자원연구원 지하수지열연구부
[5]별세, 전 서울대학교 지구환경시스템공학부

Conjugate Gradient Least-Squares Algorithm for Three-Dimensional Magnetotelluric Inversion

Hee Joon Kim[1], Nuree Han[2], Jihyang Choi[2], Myung Jin Nam[3], Yoonho Song[4*] and Jung Hee Suh[5]

[1]Dept. of Environmental Exploration Eng., Pukyong National University
[2]Dept. of Civil, Urban and Geosystem Eng., Seoul National University
[3]Dept. of Petroleum and Geosystem Eng., The University of Texas at Austin
[4]Korea Institute of Geoscience & Mineral Resources
[5]Deceased, Formerly Dept. of Civil, Urban and Geosystem Eng., Seoul National University

요 약: CG (conjugate gradient) 법은 선형 연립방정식을 반복적으로 푸는 가장 효율적인 해법 중 하나이고, 또한 비선형 최소자승문제에도 적용할 수 있다. 자기지전류(MT) 역산 문제를 풀 때에는 최소자승문제의 목적함수 자체의 최소화에 직접 CG 법을 적용하거나, Gauss-Newton 법에 기초한 반복역산의 각 반복단계에서 모형의 변화량 계산에 CG 법을 이용할 수 있다. CG 법을 적용할 경우, 임의의 벡터에 대한 감도행렬의 영향 및 그 전치행렬의 전치행렬의 영향을 감도행렬을 직접 구하지 않고 계산할 수 있다는 장점이 있기 때문에 감도행렬의 계산 규모가 방대한 3차원 역산 문제에서 계산시간을 월등히 줄일 수 있다.

주요어: CG, 최소자승법, 자기지전류, 역산, 감도

Abstract: The conjugate gradient (CG) method is one of the most efficient algorithms for solving a linear system of equations. In addition to being used as a linear equation solver, it can be applied to a least-squares problem. When the CG method is applied to large-scale three-dimensional inversion of magnetotelluric data, two approaches have been pursued; one is the linear CG inversion in which each step of the Gauss-Newton iteration is incompletely solved using a truncated CG technique, and the other is referred to as the nonlinear CG inversion in which CG is directly applied to the minimization of objective functional for a nonlinear inverse problem. In each procedure we only need to compute the effect of the sensitivity matrix or its transpose multiplying an arbitrary vector, significantly reducing the computational requirements needed to do large-scale inversion.

Keywords: conjugate gradient, least-squares, magnetotelluric, inversion, sensitivity

서 론

물리탐사에서 비선형 역산 문제를 푸는 가장 일반적인 방법은 이를 선형화하여 반복적 해법으로 푸는 것이다. 즉, 모델링 함수를 임의의 기준 모형에 대해 1차 Taylor 전개한 함수로 근사하고 이 선형화된 역산 문제를 푼 다음, 그 해를 새로운 기준 모형으로 하여 위의 과정을 반복한다. 이와 같은 방법은 Gauss-Newton 법, Marquardt-Levenberg 법 등으로 대표되는 Newton 법의 한 형태이다. 선형화된 역산 문제의 해가 수렴할 때 주어진 모형에 대해 목적함수가 최소화되므로 비선형 역산 문제의 해를 찾을 수 있다. 대부분의 자기지전류(magnetotellurics; MT) 탐사의 역산 문제는 이와 같이 반복적 선형화 해법을 이용하여 푼다.

2007년 3월 8일 접수; 2007년 4월 5일 채택
*Corresponding author
E-mail: song@kigam.re.kr
Address: Groundwater & Geothermal Resources Division
Korea Institute of Geoscience and Mineral Resources (KIGAM),
30 Gajeong-dong, Yuseong-gu, Daejeon, 305-350 Korea

선형화된 역산 문제를 풀기 위해서 감도(sensitivity, Jacobian) 행렬을 구해야 하는데 일반적으로 Green 함수의 상반성을 이용하여 그 효율을 증대시킨다 해도 이 계산에는 모델링을 한 번 하는 경우의 몇 배에 달하는 계산이 필요하다. 또한, 선형화된 역산 문제를 반복 해법으로 풀 때에는 각 반복 단계에서 해를 구하기 위해 연립방정식을 풀어야 하므로 계산량은 더욱 방대해진다. 3차원 MT 역산 문제는 일반적으로 자료 및 모형 매개변수의 개수가 수천에 이르므로 역산 문제를 푸는데 사용되는 대부분의 계산 시간이 위의 두 단계에서 소요된다.

Mackie and Madden (1993)은 Gauss-Newton 법의 각 반복 단계에 CG (conjugate gradient) 법을 적용하여 감도행렬을 직접 구하지 않고 역산을 수행하는 LCG (linear CG) 역산법을 개발하였다. 이 방법에서는 대규모의 선형 연립방정식의 해를 완벽하게 계산할 필요가 없으며, 또 전체 감도행렬을 계산하는 대신에 임의의 벡터에 미치는 감도행렬의 영향만을 계산한다. 전형적인 반복적 선형화 역산에 비해 CG 법에 기반한 이 알고리듬은 감도행렬을 근사하지 않으면서 계산시간 및 컴퓨터 메모리를 훨씬 적게 이용할 수 있다. 한편, 비선형 역산 문제에서 목적함수의 최소화에 CG 법을 직접적으로 적용할 수 있으며 이를 NLCG (nonlinear CG) 역산법이라 한다(Newman and Alumbaugh, 2000).

여기서는 먼저 선형 연립방정식의 해법으로서의 CG 법을 설명하고 이를 최소자승 문제에 적용할 수 있음을 보여 준다. 다음으로 MT 역산에서 감도행렬을 직접 계산하지 않고, 감도행렬 혹은 그의 전치행렬과 임의의 벡터의 곱을 이용하여 역산을 수행하는 방법을 설명한다.

CG (Conjugate Gradient) 법

이 절에서는 연립방정식의 해법으로서 CG 법을 이용하여 양의 정부호(positive-definite) 대칭행렬 $\mathbf{A}$에 대한 연립방정식 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$를 푸는 방법을 알아보고자 한다. 아래 2차식의 최적화 문제를 생각해보자.

$$\min \ \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\,, \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{A}$는 n행 n열의 양의 정부호 대칭행렬이다. $\mathbf{A}$가 양의 정부호 행렬일 때에 함수 $\phi(\mathbf{x})$는 볼록(convex) 함수이고 유일한 최소값을 가진다. 이 함수는 기울기 $\nabla\phi(\mathbf{x})$ $(= \mathbf{Ax} - \mathbf{b})$가 0일 때 최소값을 가지므로 결국 $\phi(\mathbf{x})$를 최소화하는 문제는 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$를 푸는 문제로 귀결된다.

함수 $\phi(\mathbf{x})$를 최소화하기 위한 CG 법의 알고리듬은 다음과 같다(Golub and Van Loan, 1996). 초기해를 $\mathbf{x}_0$라 하고, 각 변수의 초기값이 $\beta_0 = 0$, $\mathbf{p}_{-1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$, $k = 0$일 때, 아래의 계산을 해가 수렴할 때까지 반복한다.

(1) $\beta_k = (\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k) / (\mathbf{r}_{k-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{k-1})$
(2) $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k\mathbf{p}_{k-1}$
(3) $\alpha_k = (\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k) / (\mathbf{p}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{p}_k)$
(4) $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k\mathbf{p}_k$
(5) $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k\mathbf{A}\mathbf{p}_k$, 수렴 여부 확인
(6) $k = k + 1$, (1)단계로 돌아가기

여기서, $\mathbf{p}_k$는 행렬 $\mathbf{A}$에 대해서 서로 켤레(mutually conjugate)인 특성을 가지는 기저(basis)벡터이고, $\mathbf{x}_i$는 해벡터, $\mathbf{r}_i (= \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i)$는 잔여(residual)벡터, α_k는 k번째 해벡터를 수정하기 위한 스텝의 길이, β_k는 기저벡터를 수정하기 위한 상수이다. 이론적으로 이 알고리듬을 n회 반복하면 연립방정식의 정확한 해를 구할 수 있지만, 실제로는 계산 과정에서 수치 오차로 인하여 정확한 해를 구할 수 없을 것이다. 따라서, 이 알고리듬을 실제로 적용할 때에는 잔여가 미리 정해놓은 값 이하로 감소할 때까지만 반복 계산을 수행한다.

CG 법의 가장 큰 장점은 벡터 $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{r}_k$와 행렬 $\mathbf{A}$를 저장하기 위한 공간만을 필요로 한다는 점이다. 또한, $\mathbf{A}$가 대규모의 산재(sparse) 행렬이라면, 이를 효율적으로 저장하기 위한 방법을 이용할 수 있으므로 저장 공간을 더 줄일 수 있으며, 이 때 새로 구성되는 $\mathbf{A}$에는 0으로 채워지는 공간이 없다. 따라서, 연립방정식의 규모가 극도로 큰 경우, 대규모의 저장 공간을 필요로 하는 직접적 해법의 적용에 무리가 있는 경우에도 CG 법을 이용하면 효율적인 계산이 가능하다. 그리고 CG 법의 알고리듬에서 $\mathbf{A}$를 이용하는 경우는 항상 $\mathbf{A}\mathbf{p}_k$의 형태로만 계산하므로 $\mathbf{A}$를 직접 계산할 필요없이 $\mathbf{A}\mathbf{p}_k$ 만을 계산하여 적용할 수 있다.

CGLS (Conjugate-Gradient Least-Squares) 법

앞에서 살펴본 연립방정식의 해법인 CG 법을

$$\min \ \|\mathbf{Fm} - \mathbf{d}\|^2, \tag{2}$$

로 주어지는 역산 문제를 푸는 데에 적용하고자 한다. 기본적인 CG 법은 양의 정부호 연립방정식에만 적용 가능하므로 일반적인 최소자승 문제에는 직접적으로 적용할 수 없다. 따라서, CGLS 법에서는 (2)식에 대한 정규방정식

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{m} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{d}, \tag{3}$$

에 CG 법을 적용한다.

CGLS 알고리듬을 적용할 때에는 수치 오차를 줄이는 것이 매우 중요하다. 수치 오차는 잔여 $(\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} - \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{m})$를 계산할 때 크게 발생하는데, $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$를 괄호 밖으로 빼내어 $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(\mathbf{d} - \mathbf{Fm})$을 계산하면 수치 오차를 줄이고 보다 정확한 해를 구할 수 있다. 여기서 $\mathbf{d} - \mathbf{F}\mathbf{m}_k$를 $\mathbf{s}_k$라 하고, $\mathbf{r}_k = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_k$로 표현한다. $\mathbf{s}_{k+1}$은

$\mathbf{s}_k$를 이용해서 반복적으로 계산할 수 있다.

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{F}\mathbf{p}_k \,. \tag{4}$$

(4)식을 이용하여 CGLS 알고리듬을 다음과 같이 정리할 수 있다. 주어진 연립방정식 $\mathbf{Fm} = \mathbf{d}$에 대해서, 초기해를 $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$, 각 변수의 초기값을 $k = 0$, $\mathbf{p}_{-1} = \mathbf{0}$, $\beta_0 = 0$, $\mathbf{s}_0 = \mathbf{d}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_0$라 하고, 아래의 계산을 해가 수렴할 때까지 반복한다.

(1) $\beta_k = (\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k) / (\mathbf{r}_{k-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{k-1})$
(2) $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1}$
(3) $\alpha_k = (\mathbf{r}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_k) / [(\mathbf{F}\mathbf{p}_k)^{\mathrm{T}}(\mathbf{F}\mathbf{p}_k)]$
(4) $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$
(5) $\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{s}_k - \alpha_k \mathbf{F}\mathbf{p}_k$
(6) $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_{k+1}$, 수렴 여부 확인
(7) $k = k + 1$, (1)단계로 돌아가기

이 알고리듬을 1회 반복할 때에 행렬과 벡터의 곱이 단 두 번 ($\mathbf{F}\mathbf{p}_k$, $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{s}_{k+1}$) 뿐임에 주목하자. 게다가 이 방법에서는 계산 시간이 상당히 길고 $\mathbf{F}$보다 0이 아닌 값을 더 많이 가지는 $\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$를 직접 계산하지 않는 장점이 있다.

CGLS 알고리듬은 악조건(ill-posed)인 문제에 대해서 매우 유용한 특성을 가지고 있다. 수학적으로 $\|\mathbf{m}_k\|^2$는 단조 증가하고 $\|\mathbf{F}\mathbf{m}_k - \mathbf{d}\|^2$는 단조 감소하는 특성을 가짐이 알려져 있다. 역산문제의 정규화된(regularized) 해를 구하는 데에 이 특성과 discrepancy 원리(역산으로 측정과 계산 자료 사이의 잔여를 줄이는 모델을 구할 때 자료를 완벽하게 재현하는 것은 자료에 포함된 오차에 맞추는 것 밖에 되지 않으며, 역산을 오차 범위 내에서 실현하는 것이 합리적이라는 원리)를 함께 적용하면, CGLS 알고리듬에서 반복 계산은 $\|\mathbf{F}\mathbf{m}_k - \mathbf{d}\|^2 < \delta$를 만족할 때까지만 수행하여도 충분함을 알 수 있다. 실제로 이와 같은 조건을 이용하면 적은 수의 반복 계산으로 만족할 만한 해를 구할 수 있다.

또한, CGLS 법을 아래와 같은 Tikhonov의 정규화 문제(Tikhonov and Arsenin, 1977)를 푸는데 이용할 수 있다.

$$\min \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \lambda \mathbf{L} \end{bmatrix} \mathbf{m} - \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|^2 . \tag{5}$$

정규화 변수 λ에 대해 (5)식의 최소자승 문제는 좋은 조건(well-conditioned)이다. 자료의 잔여($\|\mathbf{F}\mathbf{m}_k - \mathbf{d}\|^2$)와 모델의 거칠기($\|\mathbf{m}_k\|^2$)를 여러 λ에 대해 표시하면 일반적으로 L자 모양의 곡선으로 나타나고, 최적의 λ는 그 꼭지점, 즉 곡률이 최대인 곳으로 주어진다. 몇 개의 λ에 대해서 위의 문제를 풀면 L-커브를 계산할 수 있으며, 이로부터 적절한 λ를 찾는다. 그러나 이 방법의 단점은 적절한 해를 구하기 위해서는 여러 개의 λ에 대해서 위의 문제를 풀어야 한다는 것이다. 즉, 해를 구하기 위한 계산량이 매우 많아진다.

MT 역산

CGLS 법을 이용하여 MT 역산 문제를 풀기 위해서, 먼저 최소자승법을 이용하여 MT 역산 문제의 정규방정식을 구성하는 방법을 설명한다. 다음으로 역산과정에서 감도행렬을 계산하는 일반적인 방법과 LCG 역산법 혹은 NLCG 역산법을 이용하여 감도행렬을 직접 계산하지 않고 역산을 수행하는 방법을 설명하고자 한다.

최소자승 문제의 정규방정식

최소자승 역산 문제는 측정자료와 예측자료의 차를 최소화하는 해를 구하며, 종종 역산과정을 안정시키기 위한 제한조건을 가진다. 여기서는 역산의 악조건을 제거하기 위한 Tikhonov 정규화 제한을 가진 역산 문제에 대해 다루겠다. 이런 제한조건 하에서 역산 문제는 주어진 λ, $\mathbf{W}_d$, $\mathbf{W}_m$에 대해 아래의 목적함수를 최소화시키는 최적화 문제가 된다.

$$\phi(\mathbf{m}) = \|\mathbf{W}_d[\mathbf{d} - F(\mathbf{m})]\|^2 + \lambda \|\mathbf{W}_m \mathbf{m}\|^2, \tag{6}$$

여기서 자료가중행렬 $\mathbf{W}_d$는 i번째 측정자료의 잡음이 평균이 0이고 표준편차가 ε_i인 Gaussian 무작위 분포를 따른다면 $\mathbf{W}_d = \mathrm{diag}\{1/\varepsilon_1,\ 1/\varepsilon_2,\ \ldots,\ 1/\varepsilon_N\}$가 되는 것이 적합하다. 이 때 N은 측정자료의 개수이다. 모형 매개변수의 부드러운 변화를 이끄는 모형가중행렬 $\mathbf{W}_m$은 보통 Laplacian 연산자의 유한차분근사로 이루어져 있다.

이 최적화 문제는 비선형이므로 반복해법을 이용하여야 한다. 기본적인 Gauss-Newton법을 이용하면 각 반복 단계에서 모형의 변화량 $\Delta\mathbf{m}$은 아래 식과 같이 계산된다.

$$(\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d\mathbf{J} + \lambda \mathbf{W}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m)\Delta\mathbf{m} = \mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{W}_d^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_d[\mathbf{d} - F(\mathbf{m})], \tag{7}$$

여기서 $\mathbf{J}$는 감도행렬(Jacobian, $J_{ij} = \partial d_i / \partial m_j$)이고, 위첨자 H는 Hermitian 행렬을 의미한다. $\mathbf{J}$의 각 원소는 모형 매개변수의 변동에 따른 자료의 변동, 즉 자료의 감도를 나타낸다. $k+1$번째 반복시의 모형 매개변수는 $\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \Delta\mathbf{m}_k$가 된다. (7)식에서 모형의 변화량은 매 반복단계에서 측정자료와 예측자료 사이의 오차를 최소화하며 동시에 부드럽게 변화하는 모형이 되는 값이다. 자료 오차 및 모형 매개변수에 대한 제한 사이의 중요도는 λ에 의해 결정된다.

일반적인 MT 역산 문제에서 자료와 모형 매개변수는 전기전도도 혹은 전기비저항에 대수를 취한 값을 이용한다. 이렇게 하는 데에는 몇 가지 이유가 있다. 우선, 모형 매개변수로서 전기전도도 혹은 전기비저항을 직접 이용하는 경우에 생길 수 있는 자료의 편향성을 없애고, 모형 매개변수가 항상 양수가 되게 한다. 또한, 모형 매개변수에 대수를 취하는 것은 지표 임피던스와 같이 대수 크기와 위상의 합으로 구성되는($\ln \mathbf{Z} = \ln|\mathbf{Z}| + i\theta$) 복소수 자료를 다루기에 적합하다. 마지막으로, 모

형 매개변수가 역산 과정에서 큰 폭으로 변화할 때에도 안정적으로 해를 구할 수 있다. 예를 들어, 전기탐사의 경우에 전기전도도의 크기가 몇 배씩 변화할 수 있는데, 이 때 모형 매개변수에 대수를 취하면 해가 수렴할 때까지의 반복 횟수가 감소한다.

MT 역산에서 감도의 계산과 상반성

일반적인 MT 역산 문제에서는 정규방정식 (7)식을 풀기 위해 감도행렬을 계산한다. Madden and Mackie (1989)와 Mackie and Madden (1993)은 MT 문제에서 감도의 계산과 상반성에 대하여 상세히 기술하였다. 이는 반복해법을 이용하는 역산 문제에서 매우 중요하므로 몇 가지 중요한 사항을 지적하고자 한다.

Maxwell 방정식을 행렬식으로 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \nabla\times \\ \nabla\times & i\mu\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

여기서, $\mathbf{J}_s$는 매질의 전기 송신원으로써 MT 문제에서는 보통 지표면으로부터 멀리 떨어진 곳에서의 일정한 평면파 송신원으로 표현한다. 매질의 전기전도도가 $\delta\sigma$만큼 변화하면 이에 따라 전기장 및 자기장도 각각 $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{H}$만큼 변화할 것이다.

$$\begin{bmatrix} -(\sigma+\delta\sigma) & \nabla\times \\ \nabla\times & i\mu\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{E}+\delta\mathbf{E} \\ \mathbf{H}+\delta\mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

(9)식을 전개하여 (8)식을 뺀 후, 2차 미분항($\delta\sigma\delta\mathbf{E}$)을 무시하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} -\sigma & \nabla\times \\ \nabla\times & i\mu\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta\mathbf{E} \\ \delta\mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\,\delta\sigma \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

(10)식으로부터 전기장 및 자기장의 변화량 $\delta\mathbf{E}$, $\delta\mathbf{H}$는 (8)식에서 송신항을 매질의 전기전도도 변화량 $\delta\sigma$와 본래의 전기장 $\mathbf{E}$를 곱한 값으로 대체한 식을 만족함을 알 수 있다. 따라서, 송신원이 $\mathbf{E}\delta\sigma$인 경우에 모델링을 수행하면 전자기장의 변화량을 계산할 수 있다.

(8)식을 Green 함수를 이용해서 다시 쓰면 아래와 같다 (Kong, 1986).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}(r) \\ \mathbf{H}(r) \end{bmatrix} = \iiint d^3s\,\mathbf{G}(r,s)\cdot\mathbf{J}_s(s), \tag{11}$$

여기서, $\mathbf{G}(r, s)$는 dyadic Green 함수이다. 이와 같은 표현을 이용해서 (10)식을 다시 쓰면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{E}(r) \\ \delta\mathbf{H}(r) \end{bmatrix} = \iiint d^3s\,\mathbf{G}(r,s)\cdot\mathbf{E}(s)\,\delta\sigma(s). \tag{12}$$

(12)식으로부터 전기전도도의 변화에 따른 전자기장의 변화량, 즉 감도를 계산하고 싶다면 매질 내의 모든 점에서 Green 함수를 계산해야 함을 알 수 있다. Green 함수의 원소 $G_{ij}(r, s)$는 송신점이 s이고 수신점이 r일 때, j번 송신원($j = 1, 2, 3$은 각각 J_x, J_y, J_z에 해당)에 의한 i번 측정 자료($i = 1, 2, \ldots, 6$은 각각 E_x, E_y, …, H_z에 해당)를 의미한다.

한편, Green 함수의 상반성(reciprocity)

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{s},\ \mathbf{r}) = \mathbf{G}_{kj}(\mathbf{r},\ \mathbf{s}), \tag{13}$$

을 이용하면 매질 내의 모든 점에서 Green 함수를 계산하는 대신, 지표의 모든 측점에서만 이 함수의 값을 계산하면 된다. 따라서, 3차원 MT 문제에 대해서 감도행렬을 계산하고자 할 때에는 지표의 각 측점에 송신원이 있는 경우의 모델링만을 수행하면 되는 것이고, 이로부터 계산 시간을 대폭 절감할 수 있다.

CG 법에서 감도행렬의 계산

위에서 설명한 방법으로 역산을 수행하기 위해서는 자료가중행렬을 무시한 경우 감도행렬 $\mathbf{J}$와 $\mathbf{J}^H\mathbf{J}$를 계산해야 하고, $\mathbf{J}^H\mathbf{J}$를 계수행렬로 하는 연립방정식을 풀기 위하여 이의 역행렬을 구하여야 한다. 또한, 3차원의 경우 $\mathbf{J}$의 계산은 상반성을 이용하여 계산의 효율을 증대시킨 경우에도 엄청난 계산량을 필요로 한다(김희준 등, 2004). $\mathbf{J}$의 계산에 필요한 모델링 횟수는 $N_r \times N_f$번으로, 여기서 N_r은 측점의 개수이고 N_f는 사용한 주파수의 개수이다. 3차원에서 20개의 측점과 8개의 주파수를 사용한다고 가정하면 역산의 반복 1회당 $\mathbf{J}$를 구성하는 데에만 필요한 모델링 횟수는 160번이다. 이는 송신원의 분극방향과 측정하고자 하는 전자기장 성분을 고려하지 않은 경우의 최소의 횟수이다. 게다가, 대부분의 3차원 문제에는 대략 수천 개의 모형 매개변수가 있다($20 \times 20 \times 10$ 블록 $= 4000$개 모형 매개변수). 따라서 모형 매개변수의 차원을 가지는 $\mathbf{J}^H\mathbf{J}$를 계수행렬로 하는 연립방정식을 푸는 것은 엄청난 계산량을 필요로 한다. 그럼에도 불구하고 3차원 역산을 가능하게 하려면, $\mathbf{J}$ 및 $\mathbf{J}^H\mathbf{J}$를 직접 계산하지 않는 방법을 찾아야 한다. $\mathbf{J}$를 직접 계산하지 않고 역산을 수행하는 방법에는 LCG 역산법(Mackie and Madden, 1993)과 NLCG 역산법(Rodi and Mackie, 2001; Newman and Alumbaugh, 2000)이 있다.

Mackie and Madden (1993)은 역산 문제에서 최대공산(maximum likelihood) 해를 구하기 위하여 반복해법을 이용하였다. 이들은 역산의 각 반복 단계에서 모형 매개변수의 변화량을 근사적으로 계산하는 데에 CG 법을 적용하였다. 이 방법을 이용하면 역산의 각 반복단계에서 정확한 역행렬을 계산하지 않아도 되며, 이를 LCG 역산법이라 하였다. 이 때 역산 문제는 양의 정부호 Hermitian 방정식이므로 기본적인 CG 법을 적용할 수 있다. 비선형 역산 문제를 반복법으로 푸는 것은 두 단계의 반복 계산으로 이루어진다(부록 A). 내부 반복 단계에서 CG 법을 적용하여 모형의 변화량 $\Delta\mathbf{m}_k$의 근사해를 계산하면, 외부 반복 단계에서는 모형을 수정하고 역산의 모든 단계

를 새로 시작한다. 이 방법의 특징은 모형을 수정한 후 역산의 모든 단계를 새로 시작해야 하므로, 내부 반복에서 모형의 변화량을 정확하게 계산하는 대신 몇 번의 반복만으로 변화량을 근사적으로 계산해도 충분하다는 것이다.

한편, CG 알고리듬을 비선형 역산 문제의 목적함수인 (6)식을 최소화하는데 직접 적용할 수도 있다. Rodi and Mackie (2001)와 Newman and Alumbaugh (2000)는 CG 법을 목적함수의 최소화에 적용하는 방법을 NLCG 역산법이라 명명하고, 선처리를 포함한 NLCG 역산법이 MT 역산 문제를 푸는 데에 효율적임을 보였다. 이 방법을 이용하면 주파수당 단지 6회의 모델링만으로 모형의 변화량을 계산할 수 있다.

LCG 역산법 및 NLCG 역산법과 같이 CG 법을 이용한 역산에서는 감도행렬 **J**를 직접 계산할 필요가 없고, 단지 **J** 혹은 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}$와 임의의 벡터의 곱만을 계산하는데, 이들은 각각 한번의 모델링으로 계산할 수 있음을 보이고자 한다.

감도행렬 **J**는 매질의 물성의 작은 변화에 따른 지표의 측정자료의 변화를 의미하며, 이값은 전자기장의 물성에 대한 미분항($\partial E_x/\partial m_k$, $\partial E_y/\partial m_k$, $\partial H_x/\partial m_k$, $\partial H_y/\partial m_k$)으로 이루어져 있다. **J**의 행은 모형 매개변수에 관련된 공간으로서, 특정 행의 i번째 성분은 i번째 모형 매개변수의 변동에 따른 특정 측정자료의 변동을 의미한다. 감도행렬 **J**와 임의의 벡터 **x**의 곱은 단순히 모든 모형 매개변수(m_j)에 대한 **J**의 각 항과 **x**의 각 성분의 곱의 합으로 표현된다.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Jx} \sim \sum_j \frac{\partial (E,H)}{\partial m_j} x_j , \tag{14}$$

여기서, j는 모형 매개변수의 번호이고, 기호 '~'는 벡터 **Jx**의 임의의 행에 해당하는 값을 나타낸다. 벡터 **y**의 각 성분은 지표상의 한 측점에서 한 주파수에 대한 값으로 정의된다. **J**를 직접 계산하지 않고 **y**를 계산하기 위해서는 선형 중첩(superposition)의 원리를 이용한다. 선형 중첩의 원리는 **T**가 선형계에서의 연산자일 때, 임의의 두 입력변수 v_1, v_2와 임의의 스칼라 상수인 c에 대해 다음의 관계가 성립한다는 것이다.

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(v_1 + v_2) = \mathbf{T}(v_1) + \mathbf{T}(v_2), \\ &\mathbf{T}(cv_1) = c\mathbf{T}(v_1). \end{aligned} \tag{15}$$

두 입력변수에 대해 (15)식이 성립한다면, 이는 입력변수의 개수에 관계없이 항상 성립한다. 이를 MT 문제에 적용하면, 선형 연산자 **T**는 Maxwell 방정식이고, 입력변수는 전기 혹은 자기송신원에 해당한다. 앞에서 지표에서 전자기장의 감도는 모형 내의 임의의 점에서 단위 송신원과 그 지점에서의 1차 전기장의 곱을 송신원으로 함을 살펴보았다. 따라서, 벡터 **y**는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{T}[J(1)E_0(1)]x(1) + \mathbf{T}[J(2)E_0(2)]x(2) + \ldots + \mathbf{T}[J(n)E_0(n)]x(n), \tag{16}$$

여기서, $J(i)$는 단위 전기송신원이고, $E_0(i)$는 1차 전기장, $x(i)$는 **x**의 각 성분, i는 모형 블록의 번호를 나타낸다. (16)식에 선형 중첩의 원리를 적용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{T}[J(1)E_0(1)x(1) + J(2)E_0(2)x(2) + \ldots + J(n)E_0(n)x(n)]. \tag{17}$$

(17)식은 매질 내의 모든 격자에 동시에 송신원이 존재하는 경우에 지표에서의 반응을 계산하는 1회의 모델링과 동일하다. 여기서는 한 주파수에서 두 분극에 대한 모델링을 한번의 모델링으로 정의하였다. 이와 같이 계산된 지표에서의 전자기장은 **J**와 **x**의 곱을 하나의 주파수에서 지표의 모든 측점에서 계산한 값으로, **J**를 직접 구하지 않고도 원하는 값을 계산한 것이다. 이와 같은 방법을 이용하면 계산시간을 엄청나게 단축시킬 수 있다. 상반성을 이용하지 않은 전형적인 방법으로 **J**를 계산할 때에는 주파수 당 모형 매개변수의 개수만큼 모델링을 수행하여야 한다. 상반성을 적용하는 경우에 필요한 모델링 횟수는 주파수 당 지표 측점의 개수로 감소한다. 그렇지만, 위에서 설명한 방법을 이용하면 **Jx**를 계산하는 데에 주파수 당 한 번의 모델링이면 충분하다.

마찬가지로 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}$과 임의의 벡터 **y**의 곱도 비슷한 방법으로 계산할 수 있음을 설명한다. 벡터 **q**를 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}$과 **y**의 곱이라 할 때 ($\mathbf{q} = \mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$), 양변에 켤레를 취하면 $\mathbf{Q} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^*$가 되고, $\mathbf{q} = \mathbf{Q}^* = (\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^*)^* = \mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$의 관계가 성립한다. **J**의 각 열은 자료 공간에 해당되므로, 특정 열에서 j번째 성분은 특정 모형 매개변수의 변동에 대해 j번 자료의 변동을 나타낸다. 따라서, 벡터 **Q**는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Q} \sim \sum_{freq} \sum_{site} \frac{\partial (E,H)_{site}}{\partial m_j} y^*_{site} . \tag{18}$$

(18)식에서 **Q**는 모든 주파수와 모든 지표 측점에서 감도행렬의 각 성분과 그에 해당하는 **y**의 성분을 곱하여 모두 더한 것으로, 그 결과는 모형 내부의 각 격자에 주어진 값이다. 앞에서와 마찬가지로 **Q**의 계산에 선형 중첩의 원리를 이용할 수 있다. 상반성에 의하면, 지표 각 측점에서의 감도는 지표에 존재하는 단위 전기 또는 자기송신원(계산하고자 하는 지표에서의 감도가 전기장 혹은 자기장에 대한 것인가에 따라 달라짐)에 의한 모형 내부에서의 반응이다. 따라서, **Q**는 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\{\mathbf{T}[S(1)]y^*(1) + \mathbf{T}[S(2)]y^*(2) + \ldots + \mathbf{T}[S(k)]y^*(k)\}E_0(i), \tag{19}$$

여기서, $S(k)$는 지표에서의 단위 전기 혹은 자기송신원이고, $y(k)$는 **y**의 각 성분, k는 지표 측점의 번호, $E_0(i)$는 i번 격자에서의 1차 전기장이다. 선형중첩의 원리에 따라 (19)식을 다시 쓰면 **Q**는 아래와 같다.

$$\mathbf{T}[S(1)y^*(1) + S(2)y^*(2) + \ldots + S(k)y^*(k)]E_0(i). \tag{20}$$

(20)식은 지표의 모든 측점에 동시에 존재하는 송신원에 대한

모델링에 해당한다. 이 계산은 지표 전자기장이 하향 전파하는 것과 매우 비슷하지만, 실제로는 역시간에서 하향 전파하는 것이다. 역산 과정에서 실제로 계산하는 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$는 Green 함수의 상반성에 의해 지표 송신원에 의한 Green 함수의 켤레 복소수의 합으로 계산되는데, Green 함수의 켤레 복소수는 음의 주파수, 즉 역시간을 포함하기 때문이다.

이와 같은 방법으로 감도행렬을 직접 계산하지 않고도 CG 법의 반복계산을 구현할 수 있다. 이 때 각 반복단계에서는 매질 내의 송신원과 지표의 송신원에 대해 각각 1회씩, 주파수 당 2회의 모델링만을 필요로 한다. 부록 B에 자세한 증명을 기술하였다. 한편, Mackie and Madden (1993) (부록 A)의 LCG 역산법에서는 반복 계산을 수행하기 전에 잔여벡터와 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}$의 곱을 계산하기 위해서 1회의 모델링이 추가로 필요하다.

맺음말

과거의 Gauss-Newton법을 이용한 역산 알고리듬을 CG 역산법으로 대체함으로써 계산의 효율이 현격하게 향상되었지만, 이를 3차원 MT 역산에 적용하는 데에는 여전히 두 가지 문제가 따른다. 첫 번째는 3차원 모형에 대한 계산은 일반적으로 사용하기에는 여전히 너무 느리다는 것이고, 두 번째는 3차원 자료 획득을 위해서는 많은 비용과 시간이 소요되어 아직까지도 대부분의 자료 획득이 어느 한 측선상에서만, 즉 2차원적으로 이루어지고 있다는 점이다. 그러나 최근 한국에서는 포항 근교와 제주도에서 대량의 MT 자료가 얻어지고 있다. 그리고 그 자료의 질도 일본 Kyushu에서의 원거리 기준점(remote reference)을 이용하는 방식이 적용되어 과거와는 비교할 수 없을 정도로 좋아졌다. 이렇게 획득된 양질의 대량 자료를 이용하면 향후 3차원 역산을 통해 보다 더 정확하고 합리적인 지하구조가 얻어질 것으로 기대된다.

사 사

이 연구는 한국지질자원연구원의 기본사업 지열수 자원 실용화 기술 개발 사업 및 2006년 교육인적자원부의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행되었다(KRF-2006-311-D00985).

참고문헌

김희준, 남명진, 한누리, 최지향, 이태종, 송윤호, 서정희, 2004, MT 자료의 3차원 역산 개관, 물리탐사, **7**, 207-212.

Golub, G. H., and Van Loan, C. F., 1996, *Matrix Computations*, 3rd ed., Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore and London.

Kong, J. A., 1986, *Electromagnetic Wave Theory*, John Wiley & Sons, New York.

Mackie, R. L., and Madden, T. R., 1993, Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients, *Geophys. J. Int*., **115**, 215-229.

Madden, T. R., and Mackie, R. L., 1989, Three-dimensional magnetotelluric modeling and inversion, *Proc. IEEE*, **77**, 318-333.

Newman, G. A., and Alumbaugh, D. L., 2000, Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients, *Geophys. J. Int*., **140**, 410-424.

Rodi, W., and Mackie, R. L., 2001, Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion, *Geophysics*, **66**, 174-187.

Zhang, J., Mackie, R. L., and Madden, T. R., 1995, 3-D resistivity forward modeling and inversion using conjugate gradients, *Geophysics*, **60**, 1313-1325.

부록 A. CG 법을 이용한 비선형 역산 문제의 해법

Mackie and Madden (1993)은 LCG 역산법을 최대공산법의 정규방정식

$$(\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{J}+\mathbf{C}_m^{-1})\Delta\mathbf{m}_k = \mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}_d^{-1}[\mathbf{d}-F(\mathbf{m}_k)] + \mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{m}_0-\mathbf{m}_k)\,, \tag{A1}$$

에 적용하였다. LCG 역산법의 개략적인 알고리듬은 아래와 같이 두 단계의 반복 계산으로 이루어진다.

For $k = 1$ to max. # of inversion iterations

$F(\mathbf{m}_k)$! 현재 모형의 반응

$\mathbf{d} - F(\mathbf{m}_k)$! 자료의 잔여

$\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_k$! 모형의 잔여

$\mathbf{b} = \mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}_d^{-1}[\mathbf{d} - F(\mathbf{m}_k)]$

$+ \mathbf{C}_m^{-1}(\mathbf{m}_0 - \mathbf{m}_k)$! 정규방정식의 우변*1

$\Delta\sigma_0 = 0,\ \mathbf{r}_0 = \mathbf{b}$! CG 법의 초기값 설정

For $i = 1$ to max # of CG iterations

$\beta_i = \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i / \mathbf{r}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{i-1}$! $(\beta_0 = 0)$

$\mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i + \beta_i\mathbf{p}_{i-1}$! $(\mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_0)$ 방향벡터를 수정

$\mathbf{B}\mathbf{p}_i = [\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{J} + \mathbf{C}_m^{-1}]\mathbf{p}_i$! 정규방정식의 좌변*2

$\alpha_i = \mathbf{r}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_i / \mathbf{p}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{p}_i$! 탐색방향으로 스텝의 길이

$\Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + \alpha_i\mathbf{p}_i$! 모형 변화량의 수정

$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i\mathbf{B}\mathbf{p}_i$! 잔여 수정

end loop on CG iterations

$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \Delta\sigma_k$! 모형 매개변수 수정

End loop on inversion iterations

*1 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$의 계산: 송신원이 각 주파수에서 지표의 모든 측점에 주어진 $\mathbf{y} = \mathbf{C}_d^{-1}[\mathbf{d} - F(\mathbf{m}_k)]$일 경우의 모델링에 해당함.

*2 $\mathbf{J}\mathbf{x}$와 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$를 각각 1회 계산: $\mathbf{J}\mathbf{x}$는 송신원이 각 주파수에서 매질 내의 모든 격자점에 주어진 $\mathbf{x} = \mathbf{p}_i$일 경우의 모델링, 그리고 $\mathbf{J}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}$는 송신원이 각 주파수에서 지표의 모든 측점에 주어진 $\mathbf{y} = \mathbf{C}_d^{-1}\mathbf{J}\mathbf{x}$일 경우의 모델링에 해당함.

부록 B. Zhang *et al.* (1995)의 유도

Zhang *et al.* (1995)은 전기비저항의 3차원 역산에서 CG를 이용한 효율적인 감도 계산법을 매우 쉽게 기술하였다. 그들의 설명은 매우 일반적인 것이어서 MT 문제에도 그대로 적용 가능하다. MT 모델링은 아래와 같이 행렬식으로 표현된다.

$$\mathbf{Kv} = \mathbf{s}, \tag{B1}$$

여기서, $\mathbf{K}$는 전체좌표계의 강성행렬이고, $\mathbf{v}$는 구하고자 하는 미지수벡터로서 전기장 혹은 자기장 성분으로 이루어진 벡터, $\mathbf{s}$는 하중벡터이다. 각 측점에서의 측정자료는 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$d_i = \mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{v},\ (\mathbf{d} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}), \tag{B2}$$

여기서, $i = 1, 2, \ldots, M$는 측점의 번호, $\mathbf{v}$는 모든 격자의 모서리에 정의된 전기장 값들로 이루어진 벡터, $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$이고, 여기서 1은 벡터 $\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}$의 i번째 성분으로, 이는 해벡터에서 i번 측점의 값을 추출하는 역할을 한다.

모형 매개변수 m_j ($j = 1, 2, \ldots, N$)에 대한 (B1)식의 편미분은 아래와 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_j}\mathbf{v} + \mathbf{K}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial m_j} = 0\,. \tag{B3}$$

(B2)식을 (B3)식에 대입하면 아래와 같이 감도행렬을 계산할 수 있다.

$$J_{i,j} = \frac{\partial d_i}{\partial m_j} = -\mathbf{a}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_j}\mathbf{v}\,. \tag{B4}$$

강성행렬 $\mathbf{K}$의 각 성분 중 모형 매개변수에 관련된 항은 몇 개 안되므로, 행렬 $\partial\mathbf{K}/\partial m_j$은 m_j와 관련된 몇 개의 성분만을 가지고 있다. 감도행렬 $\mathbf{J}$와 벡터 $\mathbf{x}$의 곱은 아래와 같은 형태가 된다.

$$\mathbf{Jx} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial d_i}{\partial m_1}x_1 + \dfrac{\partial d_1}{\partial m_2}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial d_1}{\partial m_N}x_N \\ \dfrac{\partial d_2}{\partial m_1}x_1 + \dfrac{\partial d_2}{\partial m_2}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial d_2}{\partial m_N}x_N \\ \vdots \\ \dfrac{\partial d_M}{\partial m_1}x_1 + \dfrac{\partial d_M}{\partial m_2}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial d_M}{\partial m_N}x_N \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_M^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\mathbf{K}^{-1}\left(x_1\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_1}\mathbf{v} + x_2\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_2}\mathbf{v} + \ldots + x_N\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_N}\mathbf{v}\right). \tag{B5}$$

이와 마찬가지로, 감도행렬의 전치행렬과 임의의 벡터 $\mathbf{y}$와의 곱은 아래와 같다.

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = -(y_1\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} + y_2\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} + \ldots + y_M\mathbf{a}_M^{\mathrm{T}})\mathbf{K}^{-1}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_1}\mathbf{v} \\ \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_2}\mathbf{v} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_N}\mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{B6}$$

(B5)식과 (B6)식에서 $\mathbf{Jx}$와 $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$를 계산하는 방법은 두 가지가 있다. 첫 번째로, (B5)식의 계산을 위해서 벡터 $\mathbf{u}$를 아래와 같이 정의하고,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\left(x_1\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_1}\mathbf{v} + x_2\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_2}\mathbf{v} + \ldots + x_N\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_N}\mathbf{v}\right), \tag{B7}$$

(B6)식의 계산을 위해서 벡터 $\mathbf{w}$를 아래와 같이 정의한다.

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}} = (y_1\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} + y_2\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} + \ \ldots\ + y_M\mathbf{a}_M^{\mathrm{T}})\mathbf{K}^{-1}. \tag{B8}$$

(B7)식은 아래와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Ku} = x_1\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_1}\mathbf{v} + x_2\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_2}\mathbf{v} + \ldots + x_N\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial m_N}\mathbf{v}\,. \tag{B9}$$

이 식에서 알 수 있듯이, 벡터 $\mathbf{u}$는 송신항이 (B9)식의 우변에 해당하는 모델링을 수행하면 계산할 수 있다. (B9)식의 우변 송신항은 모형 내부에 분산되어 있는 송신항을 의미한다. 모델링을 통해 벡터 $\mathbf{u}$를 계산한 후 이를 (B5)식에 대입하면 $\mathbf{Jx}$를 계산할 수 있다. 같은 방법으로, 행렬 $\mathbf{K}$는 대칭 행렬이므로 (B8)식은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Kw} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \ \ldots\ + y_M\mathbf{a}_M. \tag{B10}$$

(B10)식의 우변은 i번 측점에 크기가 y_i인 송신원이 모든 측점에 존재하는 송신원을 나타낸다. 따라서, (B10)식의 우변에 해당하는 송신원에 대해 모델링을 수행하면 벡터 $\mathbf{w}$를 계산할 수 있고, 이를 (B6)식에 대입하여 $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$를 계산할 수 있다. (B9)식과 (B10)식의 모델링을 살펴보면, 각각의 경우에 송신원의 크기는 $\mathbf{x}$와 $\mathbf{y}$의 크기에 의해 조절됨을 알 수 있다.