
혼합 잡음 영상에서 SA 필터의 성능 분석

송 종 관*

The performance Evaluation of SA filters for images corrupted by mixed noise

Jongkwan Song*

이 연구는 2005학년도 경성대학교 연구년 과제로 수행된 것입니다

요 약

SA 필터는 선형 필터와 순서통계에 기초한 비선형 필터의 특성을 모두 포함하는 광범위한 필터군으로 소개되었다. 이 필터에 대한 최적설계 방법이 소개되면서 선형 필터와 비선형 필터를 통합된 구조하에서 설계할 수 있게 되었다. 본 논문에서는 선형 필터가 최적의 성능을 보이는 가우스 잡음과 비선형 필터가 최적의 성능을 보이는 일필스 잡음이 동시에 존재하는 혼합 잡음 환경에서 최적 SA 필터를 설계하고 성능 분석을 통하여 이러한 응용에서 SA 필터가 기존의 필터에 비하여 우수한 성능을 나타낸다는 것을 보였다.

ABSTRACT

The SA filters encompass a large class of filters based on order statistics as well as linear FIR filters. Using SA filter structure, it is possible to design linear and non-linear filters under a unified framework. In this paper SA filters are applied to an image smoothing problem for mixed noise. Original image is contaminated by Gaussian and impulsive noise. Optimal SA filters are designed and applied to contaminated image. The experimental result shows that SA filters outperform linear FIR and ordering-based nonlinear filters.

키워드

SA filters, LWOS filters, ETBF, median filters, nonlinear filters, mixed noise, optimization

I. 서 론

최근 소개된 SA(subset averaged) 필터[1]와 LWOS 필터[2]는 선형 FIR 필터와 순서통계에 기초한 비선형 필터를 포함하는 매우 광범위한 필터군을 포함하는 새로운 필터로 임계치 분해 성질[3]을 갖는 모든 필터를 포함한다. SA 필터의 부분군으로 표현할 수 있는 기존의 필터로는 선형 FIR 필터 뿐 아니라 미디언 필터[4], 가중치

미디언 필터[5,6], L-필터[7], 스택 필터[8], TBF[9] 등 순서 통계에 기초한 대부분의 필터가 포함된다.

SA 필터는 다단 필터(multi-stage filters)의 형태를 가지며 두개의 단(stage)으로 구성된다. 이 필터의 첫 번째 단에는 max(maximum), min(minimum), xor(exclusive-OR)와 같은 비선형 연산자가 사용되며, 이들 첫번째 출력들의 가중 평균으로 최종 출력이 주어진다. 첫번째 단에 사용된 연산자의 종류에 따라서 SA 필터는 SAMAX,

SAMIN, SAXOR 필터로 명명되며, 첫채단 필터의 최대 부윈도우 크기(maximum subwindow size)를 제한함으로써 필터의 성능을 다소 희생하면서 구현의 복잡도를 줄일 수 있다[10]. 따라서 설계시 필터 성능과 구현 복잡도 사이의 적절한 trade-off가 가능하므로 응용 영역에 따라서 가장 적합한 성능과 구현 복잡도의 선택이 가능한 장점을 갖는다. 기존의 대부분의 필터들이 필터의 윈도우 크기가 결정되면 성능과 구현 복잡도를 조절할 수 있는 다른 파라메타가 없다는 점과 비교하면 SA 필터의 이러한 성질은 보다 다양한 응용 영역에 적용될 수 있는 기초가 된다.

부가잡음이 있는 영상의 품질개선 분야는 선형 및 비선형 필터들의 적용이 활발한 분야이다. 선형 FIR 필터는 가우스 잡음 환경에서 MSE를 성능 조건에서 최적의 필터로 성공적으로 적용되어왔다. 반면, 미디언 필터를 포함한 순서통계에 기초한 비선형 필터들은 임펄스 잡음 환경에서 선형 필터에 비하여 보다 우수한 성능을 보임으로써 많은 응용 영역을 확보하고 있다.

본 논문에서는 SA 필터를 가우스 잡음과 임펄스 잡음이 동시에 존재하는 혼합 잡음 환경의 영상 품질 향상 문제에서 적용하고, 윈도우 크기와 SA 필터 차수를 변화시킴으로써 선형성과 비선형성을 조절하면서 필터 성능의 변화를 분석하였다.

II절에서는 SA 필터에 대한 정의와 본 논문에서 사용된 최적설계방법에 대하여 설명하였으며, III절에서는 혼합잡음에서의 SA 필터의 성능을 분석하였다.

II. SA 필터의 최적 설계

2.1. SA 필터

$X(n)$ 을 입력 신호라 하고 $X(n)$ 을 시간 n 에서 윈도우(window) 안에 있는 N 개의 입력 샘플로 구성되는 입력 벡터라 하자. 즉, $X(n) = [X(n-L_1), \dots, X(n), \dots, X(n+L_2)]^t = [X_1(n), \dots, X_k(n), \dots, X_N(n)]^t$. 여기서 $N = L_1 + L_2 + 1$ 이며 $X_k(n) = X(n-L_1-1+k)$ 이다. 이 때 입력 샘플 X_k 는 $\{0, 1, \dots, M\}$ 중의 한 값을 갖는다고 가정한다. 앞으로는 표기(notation)를 간단히 하기 위하여 시간 계수 n 을 생략한다.

ETBF는 다음과 같이 정의된다[11].

$$F(X) = \sum_{m=1}^M f_B(x^m) \tag{1}$$

여기서 $x^m = [T_m(X_1), T_m(X_2), \dots, T_m(X_N)]^t$ 이며, $T_m(X_k)$ 는 $X_k \geq m$ 이면 1을 아니면 0을 출력으로 내는 임계 연산자(threshold operator)이다. $f_B: \{0, 1\}^N \rightarrow \mathbb{R}$ 은 이진 입력 벡터 x 를 실수 $f_B(x)$ 로 대응시키는 함수이다. 이 때 $f_B(\cdot)$ 가 부울 함수인 경우 ETBF는 TBF[6]가 되며, $f_B(\cdot)$ 이 양부울 함수(positive Boolean function)인 경우 ETBF는 스택 필터[5]가 되고, $f_B(\cdot)$ 이 가중 평균 연산자라면 ETBF는 선형 FIR 필터가 된다. 식 (1)의 ETBF는 이진 영역 함수인 $f_B(\cdot)$ 에 의해 완전히 규명된다. 또 다른 방법으로, 식 (1)의 ETBF는 모든 가능한 입력 벡터와 그것에 대응하는 결과 값을 나열하는 확장 진리표 [11]에 의해 기술되어질 수 있다.

윈도우의 크기가 N 인 SA 필터는 다음과 같이 주어진다.

$$F(X) = h^t Z_f = h_0 + \sum_{i=1}^N F_f^i(X) \tag{2}$$

여기서

$$F_f^i(X) = \sum_{\substack{m_i=1 \\ m_i \neq m_{i-1} \neq \dots \neq m_1}}^N \dots \dots \sum_{m_1=1}^N h_i(m_1, \dots, m_i) f(X_{m_1}, \dots, X_{m_i})$$

이 고

$f(\cdot)$ 는 max, min, xor에 해당하는 다진 영역 연산자(multi-level operator)이다[1]. 또한 벡터 h 와 Z_f 는 2^N 의 길이를 갖는 계수 벡터(coefficent vector)와 관측 벡터(observation vector)로 다음과 같이 주어진다.

$$h = (h_0, h_1(1), \dots, h_1(N), h_2(1, 2), h_2(1, 3), \dots, h_2(N-1, N), \dots, h_N(1, \dots, N))^t$$

$$Z = (1, X_1, \dots, X_N, f(X_1, X_2), f(X_1, X_3), \dots, f(X_{N-1}, X_N), f(X_1, \dots, X_N))^t$$

예를 들어 $N=3$ 인 경우 SAMAX 필터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{X}) &= h_0 + F_{\max}^1(\mathbf{X}) + F_{\max}^2(\mathbf{X}) + F_{\max}^3(\mathbf{X}) \\
 &= h_0 \\
 &\quad + h_1(1)X_1 + h_1(2)X_2 + h_1(3)X_3 \\
 &\quad + h_2(1,2)\max(X_1, X_2) \\
 &\quad + h_2(1,3)\max(X_1, X_3) \\
 &\quad + h_2(2,3)\max(X_2, X_3) \\
 &\quad + h_3(1,2,3)\max(X_1, X_2, X_3) \\
 &= \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_{\max}
 \end{aligned}$$

여기서

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1(1), h_1(2), h_1(3), h_2(1,2), h_2(1,3), h_2(2,3), h_3(1,2,3))^t$$

$$\mathbf{Z}_{\max} = (1, X_1, X_2, X_3, \max(X_1, X_2),$$

$$\max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3), \max(X_1, X_2, X_3))^t$$

이며, 관측 벡터의 차원(M_K)은 $M_K = 2^3 = 8$ 이 된다.

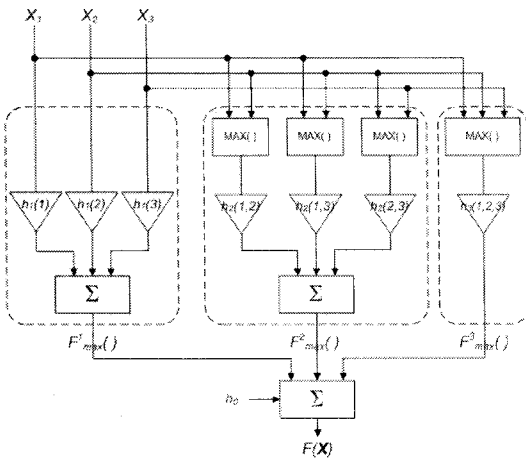


그림 1. $N=3$ 인 SAMAX 필터
Fig. 1. SAMAX filters with $N=3$

이들 SA 필터의 차수를 제한함으로써 필터의 여러 가지 부분군(subclass) 필터가 가능해지며, 이를 K 차 SA 필터(K -th order SA filters)로 부른다. 앞의 예제처럼 원도 우의 크기가 3인 경우, 필터 차수(부필터의 최대 입력 샘플 수, 이후 K 로 표기함)를 2로 제한하면 관측 벡터의

길이 $M_K=7$ 이 되며, 차수(K)를 1로 제한하면 $M_K=4$ 가 된다. 차수가 1인인 경우 $h_0=0$ 로 가정하면 이 필터는 선형 FIR 필터가 된다.

SA 필터의 정의식 (2)로부터 K 차 SA 필터를 다음과 같이 정의한다.

$$F(\mathbf{X}) = \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_f = h_0 + \sum_{i=1}^K F_f^i(\mathbf{X}), K \leq N \quad (3)$$

2.2. SA 필터의 최적설계

원 신호를 $s(n)$ 이라하고, 이 신호가 잡음에 의해 왜곡되어 입력 신호 $X(n)$ 으로 주어진다고 하자. 이 때 최적화를 위해서는 입력 샘플의 집합 $X(n), X(n-1), \dots, X(n-N+1)$ 로부터 원 신호 $S(n)$ 을 추정하여야 한다. 앞서와 마찬가지로 표기를 간단히 하기 위하여 입력신호와 원 신호에서 시간 계수 n 을 생략하고 각각 X 와 S 로 표기하기로 한다.

다음의 평균자승오차(MSE: mean squared error)를 고려해 보자.

$$J(\mathbf{h}) = E[(S - \mathbf{h}^t \mathbf{Z}_f)^2] \quad (3)$$

여기서 $E[\cdot]$ 는 기대치 연산자(expectation operator)를 나타내며, \mathbf{h} 와 \mathbf{Z}_f 는 각각 M_K 차원을 갖는 필터 계수 벡터와 관측벡터이다. $J(\mathbf{h})$ 를 최소화하는 \mathbf{h} 를 구하는 문제는 일반적인 선형 추정이론의 문제이며 그 결과는 다음과 같이 주어진다.

$$[\mathbf{R}_{xx}] \mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}_{dx} \quad (4)$$

여기서 $[\mathbf{R}_{xx}] = E[\mathbf{Z}_f \mathbf{Z}_f^t]$ 로 정의되는 $M_K \times M_K$ 자기상관행렬이며, $\mathbf{R}_{dx} = E[S \mathbf{Z}_f^t]$ 로 주어지는 상호상관행렬이다. 만일 $[\mathbf{R}_{xx}]$ 와 \mathbf{R}_{dx} 가 알려져 있다면 최적 필터의 설계는 단순히 식 (4)를 푸는 것으로 완료된다. 그러나 실제의 응용의 경우에는 $[\mathbf{R}_{xx}]$ 와 \mathbf{R}_{dx} 가 알려져 있지 않은 경우가 많으므로 신호에서 직접 추정하여야 한다.

III. 혼합 잡음에서의 SA 필터 성능 분석

본 절에서는 2차원 영상에서 최적 SA 필터를 설계하고 그 성능을 분석하였다. 실험에 사용된 영상은 그림 2 (a)에 보인 "bridge"로 512x512 크기를 갖고 8bit/pixel의 해상도를 갖는다. 원영상에 가우스 잡음과 임펄스 잡음이 동시에 존재하는 혼합 잡음을 부가하였다. 가우스 잡음은 평균값이 0이고, 분산(variance)이 200이다. 부가된 임펄스 잡음은 확률 0.1로 임펄스가 발생하며 임펄스의 크기는 ± 200 이고, 양과음(positive and negative)의 임펄스가 같은 확률로 발생한다(그림 2. (b)).

II 절의 방법으로 원 영상과 잡음 영상으로부터 최소 MSE를 갖는 SA 필터를 설계하였다. 최적 필터 설계를 위한 자기상관행렬 $[R_{xx}]$ 와 상호상관행렬 R_{dx} 를 원영상과 잡음 영상의 상부 좌측 1/4 영상으로부터 추정(estimate)하였다. 그 후 설계된 필터를 잡음 영상 전체에 대하여 적용하여 그 결과를 분석하였다. 본 실험에서는 윈도우의 크기를 3X3, 즉 $N = 9$ 를 사용하였다. 앞 선 연구의 결과 SAMAX, SAMIN, SAXOR 필터는 동일한 윈도우 크기(N)와 동일한 차수(K)에서 같은 성능을 보이는 것으로 알려졌다[10]. 따라서 본 실험에서는 SAMAX 필터와 SAMED 필터에 대해서만 실험을 수행하고 그 결과를 나타내었다.

표1에 원 영상과 설계된 최적 필터 출력 영상과의 PSNR을 보였으며, 그림 3과 그림 4에서 그 결과를 나타내었다. SAMED 필터는 홀수의 차수에 대하여만 정의되므로 홀수의 K 에 대해서만 그 결과가 존재한다. 실험 결과는 K 가 증가하면 필터의 성능이 좋아지면서 동시에 구현의 복잡도(M_K)가 동시에 상승함을 보여준다. 또한 본 실험의 결과는 필터의 성능은 차수(K)가 3에서 5 정도에서 거의 포화된다는 것을 보여준다. 따라서 차수(K)를 3에서 5정도로 제한함으로써 성능의 저하가 거의 없이 필터의 복잡도를 감소시킬 수 있음을 알 수 있다. 또한 SAMAX 필터 대신 SAMED 필터를 사용함으로써 무시할 수 있는 정도의 성능저하를 대가로 상당한 수준의 복잡도 감소를 이룰 수 있음을 보여준다.

표 1. 원 영상과 필터 출력 영상과의 PSNR.
Table 1. PSNR between the original and filtered image.

K	SAMAX		SAMED	
	M_K	PSNR	M_K	PSNR
1	9	22.23	9	22.23
2	45	22.36		
3	129	25.97	93	25.96
4	255	26.02		
5	381	26.94	219	26.91
6	465	26.95		
7	501	27.04	255	27.00
8	510	27.04		
9	511	27.04	256	27.00

V. 결 론

본 논문에서는 영상복원 분야에서 가우스 잡음과 임펄스 잡음이 동시에 존재하는 경우에 SA 필터를 적용하여 그 성능을 분석하였다.

잘 알려진 바와 같이 Wiener FIR 필터는 가우스 잡음 환경에서 MSE 오차 기준에서 최적의 성능을 보인다. 이는 SA 필터에서 차수를 증가시킴으로써 성능의 개선을 이룰 수 없음을 의미한다. 그러나 본 실험에서의 혼합 잡음을 포함하여 가우스 잡음이 아닌 경우에는 필터 차수의 증가는 성능의 개선을 가져온다. 만일 필터의 구현 복잡도(M_K)가 고정된 응용의 경우 성능을 최대화시키기 위해 두 가지의 접근이 가능하다. (1) 차수(K)를 고정시키고 윈도우 크기(N)를 증가시키는 방법과 (2) 윈도우 크기(N)를 고정시키고 차수(K)를 증가시키는 방법이다. 본 논문에서는 필터의 차수를 3에서 5정도에서 성능이 포화된다는 것을 보였으며, 추가적인 성능의 향상을 위해서는 윈도우의 크기를 키우는 것이 보다 적절한 접근이라는 사실을 보여주었다. 또한 본 실험 조건에서는 SAMAX(또는 SAMIN, SAXOR) 필터 보다는 SAMED 필터가 동일한 성능 조건에서 보다 구현 복잡도를 낮출 수 있음을 보여 주었다. 이러한 실험 결과의 원인은 부가된 잡음이 대칭적인 통계성질을 가지는데 이유가 있을 것으로 추정되며, 이론적으로 이를 밝히기 위해서는 보다 면밀한 추가 연구가 필요할 것으로 보인다.



(a)



(b)

그림 2. (a) 원 영상, (b) 혼합잡음이 부가된 영상.



(a)



(b)



(c)



(d)

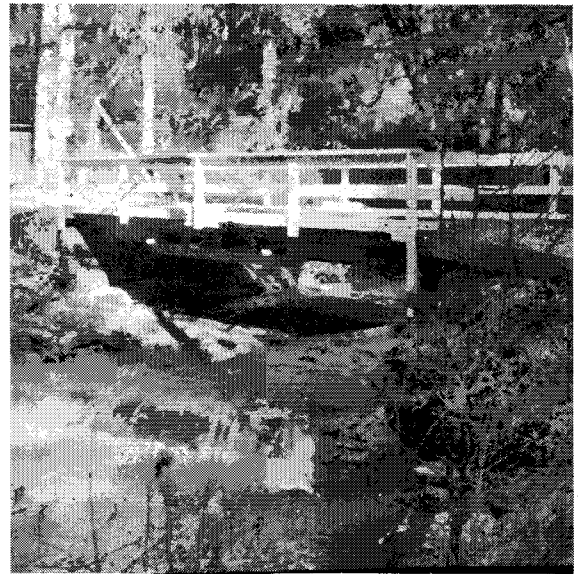


(e)

그림 3. SAMAX 필터의 출력 영상; (a) $K=1$, (b) $K=3$, (c) $K=5$, (d) $K=7$, (e) $K=9$



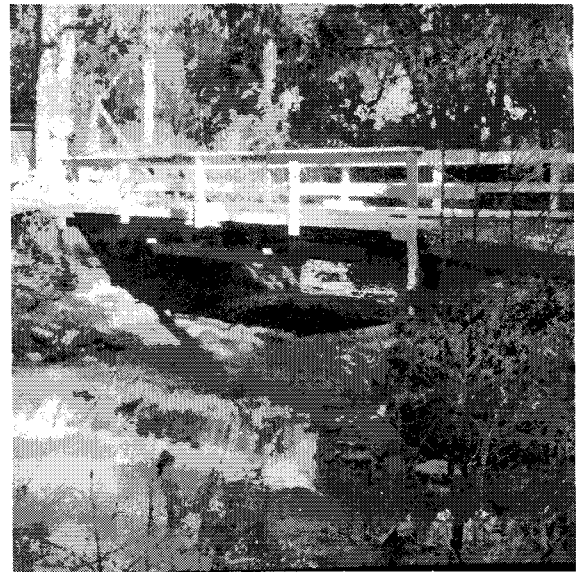
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 4. SAMED 필터의 출력 영상; (a) $K=3$, (b) $K=5$, (c) $K=7$, (d) $K=9$.

참고문헌

[1] 송종관, "ETBF의 새로운 다진영역 표현: SA 필터", 해양정보통신학회논문지, 제7권, 제7호, pp. 1556-1562, 2004

[2] J. Song, Y. H. Lee, "Linear combination of weighted order statistic filters: Canonical structure and optimal design," *IEEE Trans. Circuits Syst.: Part II*, vol. 43, pp. 349-362, May, 1996.

[3] J. P. Fitch, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Median filtering by threshold decomposition," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-32, pp. 1183-1188, Dec. 1984.

[4] N. C. Gallagher, Jr. and G. L. Wise, "A theoretical analysis of the properties of median filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-29, pp. 1136-1141, Dec. 1981

[5] O. Yli-Harja, J. Astola, and Y. Neuvo, "Analysis of the properties of median and weighted median filters using threshold logic and stack filter representation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-39, pp. 395-410, Feb. 1991.

[6] M. K. Prasad and Y. H. Lee, "Analysis of weighted median filters based on inequalities relating the weights," *Circuits, Systems and Signal Processing*, vol. 11, pp. 115-136, Jan. 1992.

[7] A. C. Bovik, T. S. Huang, and D. C. Munson Jr., "A generalization of median filtering using linear combinations of order statistics," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-31, pp. 1342-1350, Dec. 1983.

[8] P. D. Wendt, E. J. Coyle, and N. C. Gallagher Jr., "Stack filters," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, pp. 898-911, Aug. 1986.

[9] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Threshold Boolean filters," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. SP-42, pp. 2022-2036, Aug. 1994.

[10] 송종관, 윤병우, "SA 여파기의 차수에 따른 성능 평가", 한국해양정보통신학회논문지, 제9권, 제7호, pp. 1502-1507, 2005

[11] K. D. Lee and Y. H. Lee, "Minimum mean square error filtering over the class of extended threshold Boolean

filters," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing*, vol. 3, pp. 97-100, Adelaide, South Australia, 1994.

저자소개

송종관(Jongkwan Song)



1989년 2월 부산대학교 전자공학과 졸업(공학사).
 1991년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 석사).
 1995년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학 박사).
 1995년~1997년 한국이동통신(현 SK Telecom) 중앙연구소 선임연구원으로 근무.
 1997년~현재 경성대학교 전기전자·메카트로닉스 공학부 부교수로 재직.
 ※ 관심 분야: 영상처리 및 통신 등임