논리연구 10-1(2007) pp.25~64

수학에 대한 구조주의적 해석과 비공허성의 문제* †

권 병 진

본 논문에서 필자는 수학에 대한 구조주의적 해석들은 수학의 객관성을 설명하는 문제인 비공허성의 문제를 해결하지 못하고 있음을 보이고자 한다. 제거적 구조주의가 비공허성의 문제를 해결하지 못한다는 것은 대부분의 수학철학자들 사이에서 공유되는 견해이며, ante rem 구조주의는, 케래넨의 논증을 수정한 필자의 강한 논증에 의하면, 수학적 대상들에 대한 적절한 동일성 설명을 결코 제공할 수 없기 때문에, 결국 비공허성의 문제를 해결하지 못한다. 또한, 양상 구조주의자인 헬만의 경우에는, 비공허성의 문제에 대한 양상 구조주의적 해결을 가능케 해주는 주장(산수와 관련하는 경우, "ω-순서열 체계가 논리적으로 가능하다")에 이르는 그의 증명이, 필자의 판단에 따르면, 논점 선취의 오류를 저지르고 있다.

【주요어】 제거적 구조주의, ante rem 구조주의, 양상 구조주의, 비공허성의 문제, 샤피로, 헬만

* 접수완료: 2007. 1. 15 / 심사 및 수정완료: 2007. 2. 15

† 본 논문의 기초가 되는 연구는 2003년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 수행되었음(KRF-2003-037-A00050). 2004년 당시 9개월의 연수기간 동안, 바쁘신 와중에도 많은 귀중한 시간을 저를 위해 할애하여 훌륭한 가르침을 주셨던 이종권 선생님께 감사드립니다.

1. 서론

수학이 도대체 무엇을 탐구하는 학문이냐는 물음을 진지하게 제기하거나 그렇지 않건 간에, 여러 다양한 수학 분야들은 각각 서로 다른 특정한 구조를 탐구하고 있다는 생각은 심지어 일반인들 사이에서도 널리 퍼져 있는 것 같다.[1] 수학의 탐구 대상이 무엇이냐는 질문을 심각하게 받아들이는 수학철학자들 사이에서도 수학에 대한 구조주의적 해석은 여러 측면에서 매력을 갖고 있는 것으로 간주되고 있다. 특히, 구조주의적 해석은 전통적 플라톤주의자들에게 부과되는 치명적인 문제들 중의 하나로 비쳐지는 비고유성 문제를 해결하거나 해소시키는 방안의 하나로 평가받는다.[2] 이러한 상황과 관련하여, 필자는 구조주의적 해석의 타당성을 좀 더 폭 넓은 관점에서 엄밀하게 검토해보고 싶다. 다행스럽게도, 이러한 엄밀한 검토를 가능케 해 줄 정도로 충분히 자세하게 조직화된 구조주의적 해석들이 알려져 있다. 샤피로(S. Shapiro)의 ante rem 구조주의와 헬만(G. Hellman)의 양상 구조주의는 그 대표적인 예이다. 한편, 구조주의적 해석에 관심을 갖는 철학자들 사이에선, 또 하나의 가능한 구조주의적 해석으로 존재론적 제거적 구조주의가 거론된다.[3]

---

1) 언젠가 모 일간지에 시론을 쓰는 수학교육학자의 글에서도 그녀가 이러한 생각을 전제하고 있다는 것을 발견한 적이 있다.

2) 수의 비고유성 문제에 대한 구조주의적, 특히, ante rem 구조주의의, 해결 방안에 대한 논의는 권병진(2006)을 참조하기 바람. 이 논문에서 필자는 ante rem 구조주의가 수의 비고유성 문제에 성공적으로 대응하고 있다는 잠정적인 결론을 내렸다. 그러나 필자는 최근에 완성된 논문 “Mathematical Platonism and Indeterminacy Arguments”(미발표)에서 베라세라프의 미결정성 논증 자체가 스콜렘의 미결정성(또는 상대주의적) 논증과 마찬가지로 잘못된(건전하지 않은) 논증이라고 논한 바 있다.

방금 거론된 세 가지 유형의 구조주의적 해석들의 세부적인 사항들 모두를 철저하게 검토하는 일은 짧은 논문에서는 실현 불가능할 것이며, 본 논문에서의 필자의 목적에 비추어 볼 때 필요하지도 않다. 필자는 구조주의적 해석의 타당성 검토에 있어서 핵심적인 문제는 '비공허성'의 문제라고 파악하고 있다. 따라서 본 논문에서 필자는 '비공허성'의 문제가 어떤 문제인지, 그리고 동시에, 왜 가장 중요한 문제인지를 가능한 한 간략하게 소개한 후에, 세 유형의 구조주의적 해석들이 이 문제에 어떻게 대응하고 있는지를 고찰해보고자 한다. 결론적으로 필자는 현재 상태의 구조주의적 해석들은 아직 이 문제를 완벽하게 해결하지 못하고 있음을 보일 것이다.

2. 제거적 구조주의와 비공허성의 문제

수학이 구조에 관한 학문이라고 구조주의자들이 주장할 때, 여기서 "구조"란 도대체 무엇을 의미하는가? 구조주의자들 사이에서도 "구조"란 표현은 애매하게 쓰인다. 샤피로의 용어를 사용하여 두 가지 의미를 구분하면, 어떤 이는 in re 구조를, 또 다른 이는 ante rem 구조를, 일컫기 위해 "구조"라는 말을 사용한다. 한편 샤피로 자신은 전자의 in re 구조를 "체계"라고 표현하며, 후자의 ante rem 구조를 그냥 "구조"라고 칭한다. 체계 또는 in re 구조의 한 예로, 샤피로가 즐겨 제시하는 예를 인용하면, 야구 수비 체

3) 데데킨트, 베나세라프 그리고 퍼트남이 이러한 견해를 가졌던 것으로 간주되기도 한다. 그러나 그렇게 간주할 수 있느냐는 문제가 논란거리이기도 하다. 하지만 특정 철학자의 견해의 해석과 관련된 문제는 본 논문에서의 우리의 관심과 무관하다. 하여튼, 우리가 존재론적 제거적 구조주의를 이론적으로 충분히 구성할 수 있으면 그것으로 충분하다.

계를 들 수 있다. 이것은 일단 야구게임에 출전하여 수비를 맡고 있는 실제 특정 선수들의 모임이다. 그러나 이 모임은 선수들의 단순한 모임이 아니라 적절한 수비 위치에 자리 잡고 있는, 즉, 서로들 간의 적절한 거리 또는 역할 관계에 놓여져 있는 특정 선수들의 모임이다. 한편 ante rem 구조는 이러한 체계들이 실현 또는 예화하고 있는 유형(type)으로서의 추상적 구조이다.

앞에서 이미 밝혔듯이, 파슨즈, 샤피로 그리고 헬만 등의 구분에 따르면[4], 구조주의는 세가지 유형으로 구분된다. 우선 체계들의 유형인 ante rem 구조를 인정하는 ante rem 구조주의와, 그것을 부인하는 제거적 구조주의(또는 in re 구조주의)로 구분된다. 그리고 후자의 제거적 구조주의는 존재론적 제거적 구조주의와 양상적 제거적 구조주의로 또다시 구분된다. 그러나 이제부터, 표현의 간편함을 위하여, 존재론적 제거적 구조주의를 "제거적 구조주의"로, 양상적 제거적 구조주의를 "양상 구조주의"로 일컫기로 하자.

흔히 구조주의적 견해를 가장 먼저 그런대로 정치하게 표현한 자로 데데킨트(R. Dedekind)가 거명된다. 논란이 있긴 하지만, 파슨즈에 따르면, 데데킨트는 제거적 구조주의자로 간주될 수 있다.[5] 데데킨트에 따르면, 자연수에 대한 이론인 산수는 '단순히 무한한

4) Parsons(1990), Shapiro(1997), Hellman(2001).

5) Tait는 데데킨트에 대한 파슨즈의 이러한 해석을 다음과 같이 비판하였다. "데데킨트를 구조주의자로 간주함으로써 새로운 철학적 스캔들이 만들어질 것이다." 한편 이러한 비판에 대하여 파슨즈는 자신의 해석을 조금 약화시켜 데데킨트는 제거적 구조주의자는 아닐지 몰라도 넓은 의미의 구조주의자임에는 틀림없으며, Tait도 이 점에 대하여 동의할 것이라고 말한다.(Tait(1986), Parsons(1990)의 미주 11 참조하기 바람.) 그러나 여기서 우리는 제거적 구조주의자로서의 데데킨트의 견해를 소개할 것이다. 우리의 목적은 데데킨트가 어떠한 입장을 가졌었는지를 사실대로 밝히는 것이 아니라, 존재론적 제거적 구조주의를 소개하는 것이므로, 데데킨트를 제거적 구조주의자로서 소개하는 일이 역사적 사실을 왜곡했다하더라도 양해될 수 있으리라 믿는다.

체계들'('simply infinite systems')에 관한 이론이다. 데데킨트는 첫째 항 0과 다음항 함수(successor function) S를 가지며 그리고 귀납원리를[6] 만족하는 대상들의 집합 N을 "단순히 무한한 체계" 라고 일컫는다. 대상들의 집합 N이 '단순히 무한한 체계'가 되기 위한 이러한 조건을 "Ω(N, 0, S)"로 줄여서 표현하기로 하자. (그리고 이러한 조건을 만족시키는 체계를 "<N, 0, S>"로 표현하기로 하자.) 데데킨트는 자연수에 관한 진술을, 겉보기와는 달리, 보편 진술로, 즉, 모든 '단순히 무한한 체계들'에 관한 진술로 해석하였다. 산수의 임의의 진술 A는 다음과 같이 해석 또는 번역된다.

> (1) $\forall N \forall 0 \forall S(\Omega(N, 0, S) \rightarrow A(N, 0, S))$
> (여기서, A(N, 0, S)는 A를 각각의 단순히 무한한 체계 <N, 0, S>에 상대화시킨 것이다.)

예를 들어, A가 "2+3=5"라고 가정해보자. 이 문장은 다음과 같이 번역된다.

> (2) 모든 체계에 대하여, 만약 그것이 '단순히 무한한 체계'라면, 그 체계 내에서 2의 자리(셋째 자리)에 있는 대상과 3의 자리(넷째 자리)에 있는 대상이 더해진다면[7], 그 결과는 5의 자리(여섯째 자리)에 있는 대상과 같다.

여기서 우리는 자연수 표현들(숫자들) "2", "3", "5"가 자리를 지칭

---

6) 귀납원리를 형식화하면, 다음과 같다; $\forall M\{[0 \in M \wedge \forall x(x \in M \rightarrow Sx \in M)] \rightarrow N \subseteq M\}$. 즉, 0이 집합 M에 속하고, 집합 M에 속하는 모든 x에 대하여 그 다음항 역시 M에 속한다면, 단순히 무한한 체계(자연수 구조를 예화하는 체계)인 집합 N은 M의 부분집합이다.(즉, 집합 N의 모든 원소들은 M에 속한다.)

7) "더하기"("+")는 다음항 함수 S를 이용하여 귀납적으로 정의된다; $x+0=x$, $x+1=S(x)$, $x+(k+1)=S(x+k)$. 물론, 여기서의 "더하기"는 이렇게 귀납적으로 정의된 것을 체계 <N, 0, S>에 상대화시킨 것이다.

하는 표현으로 사용되고 있음을 읽어낼 수 있다. 자연수들은 그 자체로서 대상이 아니며, 단지 대상이 들어갈 자리에 지나지 않는다.8)

모든 유형의 구조주의에서도 그러하지만, 제거적 구조주의는 위와 같은 번역틀 또는 해석틀을 제시해야 할 뿐만 아니라, 한 가지 중요한 사실을 보여야 한다. 만약 위 번역틀의 전건을 만족시키는 체계가 존재하지 않는다면, 임의의 진술 A에 대한 위의 번역 뿐만 아니라 A의 부정(¬A)에 대한 번역도 참이 될 것이다. 즉, Ω(N, 0, S)을 만족시키는 체계가 존재하지 않는다면, 위의 번역틀은 산수의 언어로 표현되는 모든 진술들을 공허하게(vacuously) 참으로 만들어 버린다. 따라서 제거적 구조주의자는 모든 산수 진술들이 공허하게 참이 되지 않도록, 즉, 수학에서 참으로 간주되는 진술들만을 참으로 번역되게 하는 조치를 취해야 한다. 이러한 조치의 요구를 구조주의자들은 일반적으로 "비공허성(non-vacuity)의 문제"라고 일컫는다. 구조주의자들은 존재론적 실재론자(플라톤주의자)와 존재론적 반실재론자(유명론자)로 구분될 수 있다. 구조주의자들 중 제거적 구조주의자들은 모든 수학적 대상들을 제거하려고 하거나, 이것이 불가능하다면 될 수 있으면 많은 수학 분야의 수학적 대상들을 제거하고자 하는 유명론자이다. 그러나 구조주의자들은 모두, 필드(H. Field)와 같은 허구주의자와 달리, 수학적 진술의 진리치에 대하여 실재론자들이다. 이들은 수학에서 참으로 간주되는 것을 진짜 참으로, 그리고 거짓으로 간주되는 것을 진짜 거짓으로 간주한다. 즉, 수학적 진술의 진리치는 수학자의 언어와 마음으로부터 독립하여 참 또는 거짓으로 결정된다고 그들은 믿는다.9)

---

8) 앞의 각주 5)에서 이미 밝혔지만, 데데킨트가 이러한 제거적 구조주의의 입장을 취했는지, 아니면 이른바 '데데킨트의 추상'을 통해 유형으로서의 고유한 '단순히 무한한 체계'를 자연수 구조로 간주하는 ante rem 구조주의의 한 형태를 취했는지는 논란의 대상이다.

비공허성의 문제는, 예를 들어 산수와 관련할 경우에는, '단순히 무한한 체계'(또는 ω-순서열 체계)가 실재함을 보여야 한다는 요구이다. 이것은, 파슨즈가 말했듯이, 이른바 칸트적 의미에서의 '객관적 실재성'의 문제이다.[10] 왜냐하면 이러한 요구가 충족되지 않는 경우, 산수의 참은 객관적인 참이 되지 못하기 때문이다. 그런데 번역 (2)에서 자연수 표현 "2", "3", "5"는 단칭어가 아니라 단순히 술어의 일부분으로 간주되고 있다는 사실에서 알 수 있듯이, 제거적 구조주의자들은 수학적 대상들을 in re 구조에서의 자리로 간주하여 제거하고자 한다. 이렇게 수학적 대상들을 제거하려는 그들의 유명론적 동기는 자신들에게 ω-순서열 유형을 실현하는 체계를 가능한 한 추상적인 대상들에서가 아니라 구체적, 물리적 대상들에서 찾을 것을 권한다.

이러한 권유에 따르려는 대표적인 시도 두 가지를 우리는 생각해 볼 수 있다. 우선 필드가 Field(1980)에서 제시한 방법을 제거적 구조주의자가 원용할 수도 있을 것이다. 필드는 시공간의 점들이 무한하다고 믿는다. 따라서 필드의 시공간 점들은 ω-순서열 유형을 실현한다. 그러나 필드의 이러한 믿음은 논란거리이다. 시공간이 무한히 구분될 수 있다는 생각이 과연 구체적인 물리적 시공간에 대한 개념인지, 아니면 필드가 기하학적 시공간을 물리적 시공간으로 착각하고 있는지 모를 일이다. 그러나 자연수 구조인 ω-순서열 유형을 실현하는 체계가 필드의 주장대로 물리적 시공간에 존재한다고 하더라도, 수학의 모든 분야들과 관련하여 동일한 주장

9) "도구주의"와 "유명론"이라는 용어가 혼란스럽게 사용되는 학술대회발표논문을 읽은 적이 있어, 사족을 덧붙이고자 한다. 도구주의는 수학적 진술의 진리치에 대한 반실재론을 의미한다. 필드는 도구주의자이며 동시에 유명론자이다. 그러나 제거적 구조주의자는 도구주의자가 아니면서 유명론자이다.

10) Parsons(1990), p. 311.

을 하기란 매우 어렵다. 실수 이론(해석학) 또는 유클리드 기하학을 제거적 구조주의적으로 해석하려고 할 경우엔 더 많은 개수의, 즉, 적어도 연속체의 개수의 대상들이 물리적 시공간에 존재해야 한다. 필드는 심지어 이 정도 개수의 점들이 물리적 시공간에 존재한다고 믿는다. 그러나 집합론을 제거적 구조주의적으로 해석하려고 할 경우엔 적어도 접근불가능한 기수(inaccessible cardinal)의 개수의 대상들이 물리적 시공간에 존재하여야 한다는 점, 그리고 물리적 시공간의 구분은 어디엔가 그 한계가 있겠지만 수학은 어떤 가능한 구조도 다룰 수 있다는 의미에서 열려있다는 점은 필드식의 주장을 수학의 전체 영역으로 확장할 수 있을 것 같진 않다.[11] 더욱이, 이러한 다소 사변적인 논증과 이로부터 야기되는 논쟁을 넘어서는 결정적인 논증을 파슨즈가 제시한 바 있다. 파슨즈에 따르면, 필드의 주장처럼 ω-순서열 유형을 실현하는 체계가 물리적으로 실재한다고 하더라도, 이를 토대로 제거적 구조주의자들이 비공허성의 문제를 해결하려고 하는 것은 수학을 물리학의 볼모로 잡는 일로서, 즉, 수학의 타당성 또는 객관성을 물리학의 성과에 의존하게 하는 일로서 수학과 물리학 간의 관계에 대한 우리의 직관에 반한다. 우리는 미래의 물리학자들이 물리적 시공간의 점들이 무한개 있지 않다는 사실을 발견할 가능성을 배제할 수 없다. 그런데 만약 그러한 일이 일어난다면, 산수는 붕괴되고 말 것이다.[12]

둘째 시도로서, 어떤 제거적 구조주의자는 다양한 수학적 구조들

11) 이러한 주장에 동의하지 않을 철학자의 예로 매디(P. Maddy)를 들 수 있다. 그녀는 -물리적인 대상들의- 집합 자체가 물리적인 것이며, 따라서 집합론적 위계를 실현하는 체계가 물리적 시공간에 존재한다고 주장한다. Maddy(1990) 참조.(*심사위원의 조언에 따라 "-물리적인 대상들의-"라는 표현을 첨가하였다.)

12) Parsons(1990), p. 315와 Shapiro(1997), p. 86 참조.

을 실현하는 체계를 집합들의 영역에서 찾을 수도 있다. 즉, 그는 집합들의 다양한 체계들이 다양한 수학적 구조를 실현한다고 주장함으로써 비공허성의 요구에 부응할 수 있을 것이다. 그러나 그는 이제 완전한 유명론자가 아니다. 그는 집합을 제외한 다른 모든 수학적 대상들을 단지 수학적 구조의 자리로 간주함으로써 제거하였지만, 수학적 구조의 그 자리들을 집합이라는 대상으로써 채움으로써 집합을 진정한 대상으로 인정하였기 때문이다. 제거적 구조주의자들은 구조를 실현하는 체계를 이루는 존재자들에, 이른바 '배경 존재론'에, 존재론적으로 관여되어 있다. 그런데 그는 배경 존재론으로서 집합론적 위계를 선택한 것이다. 앞의 필드의 시도와 관련한 고찰에서 이미 우리가 간파하였듯이, 선택된 배경 존재론의 적절성 여부는 배경 존재론에 속하는 대상들의 속성에 달려 있는 것이 아니라 그 대상들의 충분한 개수에 의해 결정된다. 제거적 구조주의자는 다양한 수학 분야들에서 주장되는 진술들의 참의 객관성을 보장할 정도로 충분히 많은 개수의 대상들을 지닌 배경 존재론을 필요로 하는 것이다. 집합론적 위계는 그러한 배경 존재론으로 간주될만한 충분한 자격이 있다. 그러나 수학의 한 분야인 집합론의 객관성은 어디에서 찾아야 하는가? 집합론적 위계를 배경 존재론으로 선택한 제거적 구조주의자는 집합론적 위계에 대해서는 구조주의적 해석을 할 수 없다. 즉, 그는 집합들을 구조에서의 단순한 자리로 간주하는 방식으로 제거할 수 없으며, 집합론적 위계를 실재적인 것으로 그냥 가정할 수 있을 뿐이다. 그에게는 집합론의 객관성을 자신의 제거적 구조주의적 방식으로-즉, 비공허성의 문제를 해결하는 방식으로- 확보할 방편이 원천적으로 배제되어 있다.

한편, 헬만은 이렇게 집합론적 위계를 배경 존재론으로 취하는 제거적 구조주의를 "집합론적 구조주의"라고 일컫는다. 헬만과 파슨즈에 따르면, 수학적 진술에 대한 집합론적 구조주의적 해석은

두 측면에서 집합에 존재론적으로 관여하고 있다. 첫째, 집합론적 구조주의는, 방금 위 문단에서 언급했듯이, 배경존재론으로서(즉, 체계를 구성하는—또는 체계의 자리를 채우는— 대상들로서) 집합론적 위계를 가정한다. 둘째, 집합론적 구조주의는 체계 자체를 모델 또는 집합으로 간주한다. 사실, 후자의, 둘째 측면에서의, 집합에 대한 존재론적 관여는 제거적 구조주의 일반에서 일어나고 있다. 우리는, 앞에서, 데데킨트가 자연수 구조를 실현하는 '단순히 무한한 체계'를 삼중체 <N, 0, S>로 간주하였다는 점을 이미 살펴 본 바 있다.[13] 더욱이, 데데킨트의 번역틀 (1)에 그대로 드러나 있듯이, 제거적 구조주의자의 해석 또는 번역에 따르면, 수학적 진술은 적어도 대상들의 집합 N에 존재론적으로 관여되어 있다.[14]

결론적으로, 제거적 구조주의자는 비공허성의 문제를 해결하지 못한다. 필드의 방법을 원용하는 경우엔 수학의 객관성을 물리학의 객관성에 의존하게 하며, 배경 존재론으로 집합론적 위계를 가정하는 경우엔 제거적 구조주의의 유명론적 동기와 상충할 뿐만 아니라 집합론의 객관성을 확보할 수단이 없다. 또한 두 방법 모두, 체계로서의 집합에 대하여 존재론적 관여를 하기 때문에, 후자의 방법에 대한 위 비판에 또다시 노출되어 있다.

조금 거칠게 말하면, 샤피로의 ante rem 구조주의와 헬만의 양상 구조주의는, 제거적 구조주의가 자체적으로 해결하지 못하는,

---

13) 다중체는 잘 알려진 정의에 의해 집합으로 환원된다. (Enderton(1977), p. 36 참조.)

14) 사실, 헬만과 파슨즈는 본문에서 언급된 두 측면을 분명하게 구분하면서 논의하지는 않았다. 헬만은 주로 첫째 측면에 (그리고 그냥 스쳐 지나가는 정도로 둘째 측면에), 파슨즈는 주로 둘째 측면에, 관심을 집중하였다. 둘째 측면에 대한 논의와 관련해서는 Parsons(1990), pp. 305-306, p. 311, Hellman(2005), p. 539를 참조하기 바람. 첫째 측면에 대한 논의는 Hellman(2005), pp.538-541, Hellman(2001), pp. 185-188, Shapiro(1997), pp. 85-88을 참조하기 바람.

비공허성의 문제를 해결하려는 새로운 유형의 구조주의로 간주될 수 있다. 헬만의 양상 구조주의는 제거적 구조주의의 유명론적 동기를 최대한 실현하려는 입장인 반면에, 샤피로의 ante rem 구조주의는 그러한 동기를 포기하고 수학적 대상에 대한 플라톤주의를 취한다. 우선 후자부터 살펴보기로 하자.

3. ante rem 구조주의와 비공허성의 문제

ante rem 구조주의자인 샤피로와 양상 구조주의자인 헬만 두 사람 모두 수학적 진술의 해석에 일차 논리가 아닌 이차 논리를 사용한다. 또한 동시에 그들은 이차 논리로 표현된 수학적 진술들을 자신들의 번역 또는 해석의 직접적 대상으로 간주한다. 이차 논리를 사용한 많은 수학 이론들은 범주적(categorical)이지만[15], 수학 이론들을 표현하는데 일차 논리를 사용하는 경우에는 심지어

15) 어떤 이론이 '범주적'이라는 것은 그 이론의 모델들이 모두 동형적(isomorphic)임을 의미한다. 그리고 어떤 두 모델이 서로 '동형적'이라는 것은 한 모델로부터 -시그너쳐signature가 같은, 즉, 모델이 값을 부여하는 상항들(개체상항들, 관계 표현들, 함수 표현들)이 같은- 다른 모델로의, 구조를 유지하는(즉, **모델의 논의역 속의 대상들 간의 관계와 함수를 유지하는**), 일대일(one-one)이면서 치역과 공변역이 일치하는(onto), 함수[이 함수를 '동형성 함수'('isomorphism')라고 일컫는다]가 존재함을 의미한다. 이론을 표현하는데 2차 논리를 사용할 경우, 자연수에 대한 이론인 산수, 실수에 대한 이론인 해석학 등은 범주적이다. 이와 같이 이차논리로 표현되었을 때 범주적인 이론들을 샤피로는 "non-algebraic"이라고 일컫는다. (어떤 이론이 일차논리로 표현되었을 때는 그것의 '의도된'(이른바 표준적) 모델들이 모두 동형적이면, 그 이론은 non-algebraic하다. 한편, 수학자들은 이러한 의미로 "concrete"라는 용어를 사용한다.) 반면에 group theory, topology 등은 2차 논리로 표현되었을 때도 범주적이지 않다. Shapiro(1997), pp. 40-41, p. 50, p. 73, p. 133, Hellman(2001), p. 185 참조.

산수조차도 범주적이지 않다는 점은, 구조를 —이것을 제거하려고 하든 그렇지 않든 간에 상관없이— 동형성 유형(isomorphism type)으로 간주하려는, 그리고 적어도 산수는 고유한 구조에 관한 이론이라고 믿는, 대부분의 구조주의자들로(M. Resnik를 제외한) 하여금 이차 논리로 표현된 수학 이론을 선호하게 한다. 한편, 유명론자인 헬만은 일차 논리보다 이차 논리를 선호하는 다른 이유를 하나 더 가진다. 이차 논리는 여러 가지 의미론을 가능하게 한다. 따라서 헬만은 구속된 이차 변항에 논의역의 부분집합들을 할당하는 표준적 의미론 대신에, 개별자들의 단순한 합(sum)을 부여하는 유명론적 의미론을 제시함으로써 자신의 유명론적 의도를 철저히 실현코자 한다.[16] 이차 논리에 대한 헬만의 유명론적 해석은 앞 절에서 논의된 제거적 구조주의에 대한 한 비판에, 즉, 수학적 진술에 대한 제거적 구조주의적 해석은 체계로서의 집합에 대하여 존재론적으로 관여하고 있다는 비판에, 대응하는 조치이다.

그러나 ante rem 구조주의는 제거적 구조주의의 유명론적 동기를 포기함으로써 비공허성의 문제를 —정확히 말하면, 비공허성의 문제를 비허구의 문제로 바꾸어— 극복하고자 한다. 샤피로는 산수의 체계들인 ω-순서열 체계들의 유형(type)에 대응하는 ante rem 구조가, 마치 플라톤의 보편자처럼, 고유하게 존재한다고 주장한다. 그리고 그 구조 속의 자리도 이른바 '자리—대상 관점'에 의하여 대상으로 간주된다. 산수의 진술에 대한 ante rem 구조주의적 해석은 액면가 그대로의 직접적인 것이다. 예를 들어 "2+3=5"에 대한 ante rem 구조주의의 해석은 다음과 같다.

(3) 자연수 구조의 2의 자리(셋째 자리)와 3의 자리(넷째 자리)를 합한

---

16) 이차 논리에 대한 이러한 유명론적 의미론은 굿맨(N. Goodman)의 '개별자 연산'('the calculus of individuals')의 방법을 이용한 것이다. Hellman(1989), pp. 47-48과 p. 20의 각주 11 참조.

결과는 5의 자리(여섯째 자리)와 같다.
(여기서, 자리는 그 자체로서 대상으로 간주된다.)

제거적 구조주의에서는 수학적 구조를 실현하는 체계가 존재하지 않으면, 수학적 진술들이 '공허'해졌다. ante rem 구조주의에서는 수학적 구조 자체와 그 속의 자리들이 대상으로서 존재하지 않으면, 수학에서의 모든 단칭 진술들과 존재 긍정 진술들은 -무의미하거나- 거짓이 되어 버린다.[17]

그렇다면 구조란 도대체 어떤 것인가? 아마도 신프레게주의자들이 ω-순서열 체계들로부터 추상을 시도하였다면, 이러한 체계들의 유형은 ―서로 동형적인― 모든 ω-순서열 체계들의 클래스(class)일 것이다. 이것은 모델 이론에서 말하는 동형성 유형(isomorphism type)이다. 그런데 사실 이것은 집합(set)이 아닌 진짜 클래스(proper class)이다. 따라서 그것은 집합론적 위계에도 있지 않다. 그리고 사실, 구조가 집합으로 이해될 수 있다고 해도 문제는 발생한다. 앞에서 제거적 구조주의 중 배경 존재론으로 집합론적 위계를 선택한 방법에서와 동일한 문제점이 여기에서도 발생한다. 이러한 문제점을 피하기 위해 샤피로는 그러한 동형성 유형에 대응하는 구조를 공리들에 의해 정의하는 방법을 시도한다.[18] 즉, 샤피로는, 구조들을 그 자체로 존재자들로, 그리고 그 속의 자리들(places)도 또 다른 종류의 존재자들로, 간주하는 구조 이론(theory of structures)을 제안한다. 이 구조 이론의 공리들은 집합론의―특히, 이차의 ZFC의― 공리들을 거의 그대로 모방한 것들이다.[19] 이 구조

17) 제거적 구조주의가 해결하지 못하는 비공허성의 문제와 ante rem 구조주의가 해결해야 하는 비허구의 문제 둘 모두를 넓은 의미의 '비공허성의 문제'라고 포괄하여 일컬을 수 있을 것이다. 왜냐하면 비공허성의 문제는 결국 수학적 진술의 객관성 문제로 이해될 수 있기 때문이다.

18) Shapiro(1997), p. 92.

19) 위의 책, pp. 93-96.

이론에 의하면, 구조들은 서로 동형적이면 동일한 것이다. 또한 구조 이론의 공리들 중에는 구조의 존재에 관한 공리도 포함되어 있다. '정합성 공리'에 의하면,

> (4) 만약 Φ가 이차 논리의 정합적인 식이라면, Φ를 만족시키는 구조가 존재한다.

수학적 진술의 객관성 문제와 관련하여, 샤피로의 구조 이론에서의 정합성 공리는 결정적으로 중요하다. 왜냐하면, 앞에서 이미 언급했듯이, ante rem 구조주의에서는 수학의 객관성이 ante rem 구조 자체의 존재에 의해 확보되기 때문이다.

그런데 정합성 공리에서 사용된 용어 "정합적"이라는 말이 다시 어려운 문제를 불러일으킨다.[20] 그것은 연역적(구문론적) 일관성으로 이해될 수 없다. 첫째, ante rem 구조주의적 해석에서 사용되는 이차 논리는 불완전(incomplete)하므로 일관적이지만 모델이 존재하지 않는 식이 존재하기 때문이다.[21] 둘째, 일관성이 '증명에서 모순을 도출할 수 없음'을 의미한다면, 특히 산수의 일관성은 자연수 구조의 존재를 정당화할 수 없기 때문이다. 왜냐하면 증명은 문장(문자열)들의 나열로 이해될 수 있고, 다시 문자열들은 괴델 수에 의해 자연수들로 이해될 수 있으므로(즉, 문자열들의 구조와 자연수들의 구조가 동일한 것으로 이해될 수 있으므로), 일관성은 자연수들의 구조에 관한 하나의 사실, 즉, 자연수 구조의 존재를 전제로 한 하나의 사실이기 때문이다.[22] 한편 '정합성'을 '만족

20) 이 문제는 이미 권병진(2006) pp. 150-152에서 논의된 바 있다. 그러나 본 논문의 완결성을 위해 중복을 무릅쓰고, 그러나 최대한 간략하게, 논의코자 한다.

21) 왜냐하면 모델이 존재해야 정합적인 식이라고 믿는 우리의 직관에 위배되기 때문이다.

22) 위의 책, p. 134.

가능성', 즉, '모델의 존재'로 정의하려는 시도는 집합론적 위계를 가정하기 때문에, 집합론적 위계의 존재를, 즉, 집합론의 객관성을 정당화할 수 없다. 따라서 샤피로는 '정합성'을 정의하지 않고 원초적 개념으로 간주한다. 그러나 그는 '만족 가능성' 개념을 '정합성' 개념의 적절한 수학적 모형으로 추측하여, 즉, '만족 가능성' 개념의 외연과 '정합성' 개념의 외연이 거의 일치하는 것으로 간주하여, "식 Φ가 정합적인지 어떻게 알 수 있느냐?"는 인식론적 문제에 대응한다. 여기서 '기초주의가 아닌 기초'라는 그의 수학철학의 뼈대가 되는 견해가 전면에 나선다. 식 Φ가 정합적이라는 것은 그것의 만족 가능성을, 즉, 모델의 존재를, 통해 알 수 있다. 비록, 앞에서 이미 말했듯이, 이러한 인식적 접근이 집합론적 위계의 존재를, 즉, 집합론의 객관성을 정당화할 수 없다고 하더라도, 집합론적 위계를 수학적 존재 문제의 최후의 법정으로 간주하는 수학적 관행에 비추어 볼 때, 그리고 수학을 수학 외적인 것으로 기초 지우려는 기초주의를 포기한다면, 이러한 해결을 받아들일 수 있다고 샤피로는 강변한다. 이러한 인식적 접근의 문제가 헬만의 양상 구조주의에서도 발생하며, 필자는, 양상 구조주의에 대한 논의에서는, 그것을 심각한 문제점으로 간주할 것이다. 그러나 여기서 우리가 인식적 접근에 대한 샤피로의 해결책을 비판하려면, 결국은 그의 '기초주의가 아닌 기초'라는 대단히 포괄적인 견해를 비판하여야 할 것이다. 적어도 여기서 그러한 비판을 행하는 것은 적절하지 않을 것이다.

그러나 샤피로의 ante rem 구조주의에 대한, 수학철학자들 사이에서 거의 일치된, 간결하면서도 중요한 비판이 하나 있다. 앞에서 이미 보았듯이, ante rem 구조주의적 해석에 따르면, 숫자 "2"는 진정한 단칭어이다. 그것은 자연수의 ante rem 구조에서의 셋째 자리를 지칭하며, 이 자리는 이른바 '자리-대상 관점'에서 보았을 때 그 자체로서 대상으로 간주되기 때문이다. 그런데 이 대상 2는,

내적 속성을 가지지 않는, 단지 자연수 구조 내에서 다른 대상들과의 관계적 속성만을 가지는, 이른바 '불완전한' 대상이다. 필자는, 이러한 '불완전한 대상'이라는 개념에 대한 밸러거의 비판에 대해, 밸러거의 비판에서의 문제점을 지적함으로써 샤피로를 옹호한 바 있다.[23] 그러나 좀 더 정교한 비판인, 케래넨(J. Keränen), 헬만 그리고 맥브라이드(F. Macbride)의 비판은 '불완전한 대상'이라는 개념을 거의 포기하게 만드는 것 같다.[24] 자리 자체를 대상으로 간주하는 '자리-대상 관점'의 포기는 동시에 ante rem 구조 자체의 존재에 대한 포기이다. 그렇다면 결국, 넓은 의미의 비공허성의 문제(객관성의 문제)에 대한 ante rem 구조주의의 해결책은 실패로 평가받을 수밖에 없다.

헬만은 한편으로는 '관계적 속성만을 가지는 대상'과 다른 한편으로는 '이러한 대상들 간의 관계' 간의 존재론적 우선성 관계에 주목한다. 즉, 이 둘 중 어느 것이 존재론적으로 우선하는가? 샤피로는 후자에 존재론적 우선성을 두고 있음에 틀림없다. 예를 들어, 대상 3은 자연수 구조에서의 자리에 지나지 않으며 그것은 자연수 구조에서의 다른 자리들과의 관계적 속성만을 가질 뿐이기 때문이다. 일단, 샤피로의 주장대로, 구조 내에서의 관계에 의해 대상의 동일성(identity)이 확보된다고 가정해보자. 그러나 이때 말해지고 있는 "구조 내에서의 관계"는 도대체 어떤 의미를 가질 수 있는가? "만약 우리가 그 어떤 in re 경우도 고려하지 않으며, 또 의도된 관계를 지칭하지 않고서는 관계항들(relata)에 대해 심지어 말도 할 수 없다면, '다음항 관계'('succession')는 도대체 무엇을 의미하는가?"[25] 간단히 말해, 관계적 속성만을 가지는 -그리고 체계들과의 관련성이 배제되어 있는- 대상들(구조 속 자리들) 간에 어

23) 권병진(2006), pp. 168-169.

24) Keränen(2001), Macbride(2006), Hellman(2001), pp. 193-196.

25) Hellman(2001), p. 194.

떤 관계가 성립할 수 있겠는가? 아무리 형식적인 관계라고 하더라도, 그 어떤 형식적인 관계가, 도대체 내적 속성을 전혀 갖지 않는 대상들 사이에 성립할 수 있겠는가? 따라서 '관계적 속성만을 가지는 대상'이라는 개념은 이해할 수 없는 개념이다.[26)]

한편, 케래넨의 비판은, 바로 위에 소개된 헬만의 비판에서 일단 가정된 샤피로의 주장, 즉, "구조 내에서의 관계에 의해 대상의 동일성이 확보된다"는 주장을 겨냥한다. 필자의 판단에 따르면, 캐래넨의 비판은 ante rem 구조주의에 대한 비판들 중 가장 치밀하면서도 치명적인 것이다. 대상들의 동일성에 대한 설명이 취해야 하는 형식과 관련하여 철학자들은 대체로 두 편으로 나누어져 왔다. 여러 대상들이 공유하는 일반 속성들(general-properties)을 이용하여 동일성을 설명하거나, 또는 오로지 하나의 대상만이 가지는

26) Hellman(2001), pp.193-196. 헬만의 논증에 대한 필자의 본문에서의 소개는 조금 거친 것이다. 헬만은 '존재론적 우선성'과 같은 개념을 사용하지 않았다. 그리고 그는 동시에 샤피로의 ante rem 구조주의에서는 베나세라프가 제기한 미결정성(비고유성) 문제가 새로운 무대에서-즉, ante rem 구조들에서- 다시 발생할 것이라고 비판하기도 한다. 자연수의 ante rem 구조가 0, 1, 2, 3, …(<N, 0, S>, 여기서는, 앞에서와 달리, "N", "O", "S"가 변항이 아니라 상항이다) 이렇게 있다고 해보자. 그런데 우리가 이 구조의 자리이며 그 자체로서 대상인 0과 1을 서로 바꿔 0*과 1*으로 삼고, 이에 맞춰 다음항 함수 S도 S*으로 바꾼 구조 0*(=1), 1*(=0), 2*(=2), 3*(=3),…(<N, 0*, S*>)도, 마찬가지로, 자연수의 ante rem 구조라고 말할 수 있지 않겠는가? 물론, 우리가 앞에서 이미 살펴봤듯이, 샤피로는 서로 동형적인 구조는 같은 구조가 되도록 구조 이론을 만들었다. 그러나 수학적으로 다른 구조가 어떻게 같은 구조일 수 있겠는가? (비고유성 문제는 지금 우리의 직접적인 관심이 아니므로 덮어두는 것이 좋을 듯 하다. 다만, 현재 필자는 비고유성 문제가 가짜 문제라고 생각하기 때문에, 비고유성 문제에 대한 헬만의 논의를 그대로 따를 수 없다는 점을 밝힌다. 미결정성 논증에 대한 필자의 의구심의 핵심은 "과연 우리가 위의 예에서 서로 다른 것으로 간주되고 있는 구조를 진짜 다르다고 말할 수 있는 일관적인 (의미론을 포함한) 언어를 갖고 있느냐?"는 것이다. 적어도 산수에서는 위의 0과 0*을 구분할 수 있는 술어가 사용되지 않을 것이다.)

고유 속성(haecceity)을 이용하여 동일성을 설명할 수도 있다. 그런데 ante rem 구조주의에서 대상으로 간주되는 자리는 관계적 속성만을 가지므로, 즉, 어떤 고유 속성을 가지는 '순수 개별자'('bare particular')로 결코 간주될 수 없으므로, 그것에 후자의 동일성 설명 방식을 적용하는 것은 불가능하다.[27] 그렇다면 수학적 구조에서의 자리들에 대해서는 다음과 같은 형식을 갖는 동일성 설명이 주어져야 할 것이다.

(5) $\forall x \forall y(x=y \leftrightarrow \forall \phi(\phi \in \Gamma \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y))))$.
(여기서 '$\forall \phi$'는 문제의 수학적 구조에 대한 이론 T에서 사용되는 언어 L에서 수용되는 모든 속성들-특히, ante rem 구조주의에 따르면, 구조내의 관계적 속성들-에 대한 보편 양화이며, Γ는 언어 L에서 지칭되는 대상들의 동일성을 지배하는 것으로 -이론 T에 의해- 간주되는 일반 속성들-다시 한번 더, ante rem 구조주의에 따르면, 구조내의 관계적 속성들-의 집합이다.)

대상들의 동일성에 대한 설명과 관련하여 ante rem 구조주의자에게 궁극적으로 요구되는 것은 위 도식 (5)에서의 Γ를 규정하는 일이다. 케래넨의 비판은, ante rem 구조주의자가 이러한 요구에 대응하지 못하는 경우가 존재할 뿐만 아니라, —그의 비판이 필자의 수정을 거친다면— 그러한 경우에는 원리적으로도 그러한 대응이 불가능하다는 것이다.

우선, ante rem 구조주의에 따르면, Γ에 어떤 속성들이 포함될 수 있을까? 앞에서 이미 보았듯이, 샤피로는 동형적인 두 구조는 동일한 구조라고 생각한다. 즉, 구조의 동일성은 동형성 함수(isomorphism)[28]에 의해 유지된다고 생각한다. 따라서 어떤 구조 S 내

27) Keränen(2001), p. 314, p. 327.

28) 두 모델이 동형적임을 보장하는 함수를 "동형성 함수"("isomorphism")라고 일컫는다. 앞의 각주 15를 참조하기 바람.(*각주에서는 일반적인 모델 이론에서의 용어를 설명하고 있으므로, '모델'이라는 용어가 사용되고 있지

의 자리들도 역시 S와 동형적인 체계들과 구조들에서 동일성을 잃지 않을 것이기 때문에, 이러한 동형적인 체계들과 구조들에서 변함이 없는 속성들을 가져야 한다. 물론, 여기서 S와 동형적인 구조들 중에는 S와 자체동형적인[29] 구조 S′도 포함될 것이다. 그렇다면, Φ에 속하는 속성들은 S의 자체동형성 함수(automorphism) 아래에서 불변하는 속성들[30]이어야 한다.

그런데 만약 S가 사소하지 않은(non-trivial) 자체동형성 함수[31]를 가진다면, 이 함수 아래에서 불변하는 속성들은 이 함수의 독립변항값과 함수값이 되는 두 대상(자리)을 구별할 수 없다. 예를 들어, {+, -, 0}을 언어로 가지는 이론에 의해 표현되는 구조로서의 정수들의 그룹 (Z, +)은 x를 -x로 보내는 사소하지 않은 자체동형성 함수를 가진다. 따라서 (Z, +)에서는, 예를 들어, 1과 -1 또는 2와 -2는, 이 자체동형성 함수 아래에서 불변하는 속성들을 통해서는 결코 구분될 수 없다. 왜냐하면 "자체동형성 함수 아래에서 불

만, 본문에서는 '구조'라는 용어가 사용되고 있다. 각주에서의 '모델'은 본문에서의 '구조'에 대응하는 것이다.)

29) '자체동형적' 관계는 '동형적' 관계의 특수한 경우로서 한 모델과 이것과 논의역이 같은 다른 모델 간의 동형적 관계이다.

30) 자체동형성 함수 f는, 문제의 모델(구조)의 논의역으로부터 동일한 논의역으로의, 구조를 유지하는(논의역 속의 대상들 간의 관계와 함수를 유지하는) 일대일 (그리고 이 경우엔 당연히 onto이기도 한) 함수이다. 따라서 자체동형성 함수 f 아래에서 변하지 않는 속성들이란 바로 문제의 모델의 구조를 이루는 속성들, 즉, 논의역 속의 대상들 간의 관계와 함수에 의해 결정되는 속성들을 의미한다. 임의의 이러한 속성이 "$\phi(x)$"에 의해 표현된다고 한다면, 그리고 문제의 모델의 논의역 속의 임의의 한 대상을 "a"로써 표현한다면, $\phi(a)$인 경우에 그리고 그러한 경우에만 $\phi(f(a))$이다.

31) 모든 모델은 **사소한** 자체동형성 함수, 즉, 문제의 모델의 논의역의 한 대상을 자기 자신으로 보내는 자체동형성 함수를 가진다. 그러나 모든 모델이 **사소하지 않은** 자체동형성 함수를 가지는 것은 아니다. 사소하지 않은 자체동형성 함수는 문제의 모델의 논의역의 한 대상을 다른 대상으로 보내는 자체동형성 함수를 의미한다. 예를 들어, 자연수 구조는 사소하지 않은 자체동형성 함수를 가지지 않는다.

변하는 속성들"이란 바로 이 함수의 독립변항값과 함수값이 공유하는 속성들을 일컫기 때문이다.[32] 누군가가, 예를 들어, "x+x=2"에 의해 규정되는 속성은 1과 -1을 구분할 수 있지 않느냐고 반문한다고 가정해보자. 사실 그렇다. 그러나 바로 그렇기 때문에, 이 속성은 x를 -x로 보내는 자체동형성 함수 아래에서 불변하는 속성이 아니며, 따라서 그것은 ante rem 구조주의자가 대상들의 구분에 동원할 수 없는 속성이다. 좀 더 직관적으로 설명하면, "x+x=2"에 의해 규정되는, (Z, +)에서 1이 갖는, 속성은 구조 내의 자리인 2와 연관을 맺음으로써, 구조를 실현하는 -2 자체를 요소로서 갖지 않는- 체계들 및 자신과 자체동형적인 '다른' 구조(ante rem 구조주의자의 관점에 의하면, 자리 자체들이 자리를 바꿔버린 구조)에서는 1의 자리를 점유하는 대상들이 소유할 수 없는 속성이 되어버린다. 이러한 속성은, ante rem 구조주의에 따르면, 자리로서의 대상이 가질 수 있는 속성이 아니다. 왜냐하면, ante rem 구조주의자에 따르면, 자리로서의 대상은 체계들에서 이 자리를 점유하는 모든 대상들도 역시 공유하는 그러한 속성들만을 가져야 할 것이기 때문이다. 만약 그렇지 않다면 체계들은 구조를 실현시킬 수 없을 것이다. 따라서 결국, ante rem 구조주의자는 다음과 같은 딜레마에 빠져 있다. ante rem 구조주의자는 대상의 동일성 설명에 -만약 문제의 구조가 자체동형성 함수를 가진다면- 자체동형성 함수 아래에서 불변하는 속성만을 사용할 수 있거나 그렇지 않다. 전자의 경우엔, 그는 문제의 자체동형성 함수에서 독립변항값과 함수값이 되는 두 대상을 구분할 수 없으며, 후자의 경우엔, 그는 스스로 자신의 기본 입장을 포기하는 것이다. 케래넨의 논증은 필자의 이상과 같은 이해를 가능하게 해 줄 만큼 충분히 자세하지만, 이러한 딜레마를 명료하게 포착하지는 못한 듯 하다.[33]

---

32) Keränen(2001), pp. 315-326.

케래넨이 제기한 '동일성 문제'에 대한 ante rem 구조주의적 대응이 전혀 없었던 것은 아니다. 레이디맨(J. Ladyman)은, Ladyman(2005)에서, 1과 -1은 'x는 y의 반수(additive inverse)이다'라는 비재귀적인(irreflexive) 관계를 만족시키기 때문에 서로 구별된다고 주장한다.[34] 레이디맨에 따르면, 케래넨은 앞의 도식 (5)를 제시하는 과정에서 이른바 '절대적 구별가능성'('absolute discernibility')만 염두에 두었다. 레이디맨은 이 '절대적 구별가능성' 이외에도 다른 두 가지 '구별가능성' 개념이, 이른바 '상대적 구별가능성' 개념과 '약한 구별가능성' 개념이, 더 존재한다고 주장한다. '상대적 구별가능성' 개념은, 콰인으로부터 비롯된 것으로서[35], 두 대상이 구별되지 않으려면 두 대상은 다른 대상들과 관계에서 항상 같은 위치에 있어야 한다는 것이다. 이러한 '상대적 구별가능성' 개념을 도식 (5)에 덧붙이면, 다음과 같이 될 것이다.

(6) $\forall x \forall y(x=y \leftrightarrow (\forall \phi(\phi \in \Gamma \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y)) \wedge \forall \psi(\psi \in \Sigma \rightarrow \forall z((\psi(x,z) \leftrightarrow \psi(y,z)) \wedge (\psi(z,x) \leftrightarrow \psi(z,y))))))$.

(여기서는 이항 관계 ψ만 고려되었다. 그러나 이것을 n항(n>2) 관계

---

33) 케래넨은 본문의 식 (4)에서의 Γ에 들어갈 수 있는 속성들(대상의 동일성 설명에 ante rem 구조주의자가 사용할 수 있는 속성들)로서 일단 '자유 변항이 하나인, 그리고 문제의 구조의 자리를 지칭하는 개체 상항이나 문제의 구조를 실현하는 체계의 요소를 지칭하는 개체 상항을 포함하지 않은, 식으로써 규정되는 속성들'을 들며, 이러한 속성들과 자체동형성 함수 아래에서 불변하는 속성들을 다시 연결시키려고 한다. 따라서 그의 논증은 강한 논증이 되지 못하고 "in many case"라는 용어를 자주 사용하면서 약한 논증이 되어 버렸다. 필자는 오히려 중간 단계를 없앰으로써 그의 논증을 더욱 강력하게 만들 수 있다고 판단하여, 필자의 수정이 들어간 소개를 본문에서 시도하였다.(위 책, 같은 곳 참조 바람.)

34) 비재귀적인 관계는 자기 자신과는 성립하지 않는 관계이므로, 어떤 두 대상이 이 관계에 놓여져 있다면 이 두 대상은 진짜로 서로 다른 대상임이 틀림없다.

35) Quine(1960), p. 230.

로까지 확장하는 것은 쉽게 기대될 수 있다. Σ는 문제의 수학 이론에서 사용되는 이항관계들의 집합이다.)

한편, 레이디맨의 '약한 구별가능성' 개념에 따르면, 만약 두 대상이 비재귀적인 관계에 서로 놓여져 있으면, 두 대상은 구별가능하다. 이러한 생각을 다시 도식 (6)에 덧붙이면 다음과 같다.

(7) $\forall x \forall y(x=y \leftrightarrow (\forall \phi(\phi \in \Gamma \rightarrow (\phi(x) \leftrightarrow \phi(y)) \wedge \forall \psi(\psi \in \Sigma \rightarrow \underline{\forall z}((\psi(x,z) \leftrightarrow \psi(y,z)) \wedge (\psi(z,x) \leftrightarrow \psi(z,y)))) \wedge \neg \exists R(R \in \Sigma \wedge \underline{R \text{ is irreflexive}} \wedge (R(x,y) \vee R(y,x))))).$

만약 ante rem 구조주의자가 두 대상을 구별하기 위해 '약한 구별가능성' 개념까지 동원한다면, 즉 도식 (7)을 대상의 동일성에 대한, ante rem 구조주의 내에서 허용되는, 설명으로 간주한다면, (Z, +)에서의 1과 -1을 ante rem 구조주의자는 구별할 수 있을 것이다. 레이디맨의 주장은, 결국, ante rem 구조주의자가 '약한 구별가능성' 개념을 사용할 수 있으므로, ante rem 구조주의자는 캐레넨이 제기한 '동일성 문제'를 해결할 수 있다는 것이다.[36]

그러나 과연 그럴 수 있을까? 맥브라이드는 '약한 구별가능성' 개념을 동원하는 것은, 즉, 대상들을 구별하기 위해 어떤 비재귀적인 관계를 사용하는 것은 구별하고자 하는 두 대상의 구별을 미리 전제하는 것이라고 비판한다. 맥브라이드에 따르면, 레이디맨은, 한편으로는, 'x는 y의 반수이다'는 비재귀적인 관계와, 다른 한편으로는, 이 관계에 놓이는 두 대상들은 서로 존재론적 선후 관계에 있는 것이 아니라 상호 의존적 관계에 있다고 생각하고 있음에 틀림없다고 추론한다. 이와 같이 대상을 비술어적으로(impredicatively, 순환적으로) 구성할 수 있다는 생각은 적어도 논란의 대상이다.[37]

36) Ladyman(2005), p. 220.
37) Macbride(2006), pp. 67-68.

필자의 도식 (7)에 따르면, 밑줄 그어진 부분이 이러한 '순환적 구별' 또는 '비술어적 구성'을 보여주고 있다. 사실, '약한 구별가능성' 뿐만 아니라 '상대적 구별가능성'도 순환적인 구별을 시도하고 있다.

결론적으로, 샤피로의 ante rem 구조주의는 대상의 동일성에 대한 —수학적 관행에 부합하는— 적절한 설명을 가질 수 없는 입장이다. 즉, ante rem 구조주의적 '대상' 개념은, 샤피로가 주장하듯이 "불완전한 대상"에 대한 개념이 아니라, 오히려 대상에 대한 "불완전한" 개념이다. 따라서 이렇게 허실한 대상들로 이루어진 ante rem 구조의 허실한 존재는 수학의 객관성을 떠받치기엔 힘이 부친다.

4. 양상 구조주의와 비공허성의 문제

제거적 구조주의자가 비공허성의 문제를 해결하기 위해 수학적 구조를 실현하는 체계가 물리적인 시공간에 존재한다고 주장하는 경우와, 그러한 체계가 집합론적 위계에 존재한다고 주장하는 경우에 어떤 난관에 봉착하는지를 우리는 앞에서 살펴보았다. 또한 ante rem 구조 자체가 존재한다고 주장함으로써 비공허성의 문제를 해결하려는 플라톤주의적 구조주의자의 시도도, ante rem 구조를 구성하고 있는 자리로서의 대상들에 대하여 적절한 동일성 설명을 제공하는 것이 원리적으로 불가능하기 때문에, 심각한 결함을 갖고 있는 것으로 여겨진다는 점도 바로 앞 절에서 살펴보았다. 이렇게 구조주의자들을 괴롭히는 비공허성의 문제를 헬만은 양상 개념을 동원하여 해결하고자 한다. 수학적 구조를 실현하는 체계가 물리적인 시공간에 존재하진 않겠지만, 그것이 물리적인 시공간에

존재할 논리적 가능성만 있으면 이러한 논리적 가능성은 비공허성의 문제를 해결하는 데 충분한 토대가 된다고 그는 주장한다.

헬만의 양상 구조주의적 해석의 기본적인 생각은, 산수 문장 A는 "만약 어떤 ω-순서열 체계가 가능하다면, 그 체계에서 A는 성립할 것이다"로 해석될 수 있다는 것이다. 앞 절에서 이미 밝혔듯이[38], 헬만은 자신의 해석을 표현하는 데 이차 논리를 선택할 뿐만 아니라, 또한 이러한 해석의 대상이 되는 수학 이론과 관련해서도 기본적으로 이차 논리로 표현된 수학 이론을 선호한다. 앞의 번역틀 (1)의 기호를 그대로 사용하여, 임의의 이차 산수 문장 A에 대한 헬만의 번역틀을 표현해보면 다음과 같은 모습을 갖게 될 것이다.

(8) $\Box\forall N\forall 0\forall S(\Omega'(N, 0, S)\rightarrow A(N,0,S))$[39]

한편, Hellman(1989)에서 헬만이 제시한 번역틀을 그대로 인용하면 다음과 같다. 다음은, 정확히 말하면, 이차 페아노 산수의 언어에서의 임의의 문장 A에 대한 번역틀이다.

(9) $\Box\forall X\forall f(\wedge PA^2\rightarrow A)^X({}^s{}_f)$[40]

여기서 "$\wedge PA^2$"은 이차 페아노 산수의 공리들의 연언을 의미한다. 그리고 "$({}^s{}_f)$"는 바로 앞에 위치하고 있는 식 "$(\wedge PA^2\rightarrow A)$"에서의 유일한 상항인[41] 다음항 함수 표현 "S"를 변항 "f"로 대체하는 것

38) 앞 3절의 첫째 문단 참조 바람.

39) 여기서 변항 "N", "0", "S"는 이차 변항들이다. 반면에 번역틀 (1)에서의 그것들은 일차 변항들이었다. 그리고 "Ω′(N, 0, S)"은 번역틀 (1)에서의 "Ω(N, 0, S)"를, 즉, ω-순서열 체계이기 위한 조건에 대한 데데킨트의 일차 논리에서의 표현을, 이차 논리의 표현으로 바꾼 것이다.

40) Hellman(1989), p. 23.

을 표현한다. "X"는 도식 (8)에서의 "N"에 대응하는 것으로서 클래스 변항(class variable)이다. 도식 (9)는 결국, "만약 어떤 클래스와 함수가 이차 페아노 산수의 공리들을 만족시키는 것이 가능하다면(즉, 만약 어떤 ω-순서열 체계가 가능하다면), 클래스 변항 X와 함수 변항 f에 상대화된 A는 이러한 클래스와 함수에서[42](즉, 이러한 ω-순서열 체계에서) 성립할 것이다"라는 내용을 담고 있다. 예를 들어, A가 "2+3=5"라고 가정해보자. 이 문장에 대한 번역 또는 해석은 다음과 같다.

> (10) 필연적으로, 모든 체계에 대하여, 만약 그것이 ω-순서열 체계라면, 그것의 2의 자리(셋째 자리)에 있는 대상과 3의 자리(넷째 자리)에 있는 대상을 합한 결과는 5의 자리(여섯째 자리)에 있는 대상과 같다.

또는 이러한 해석을 조금 다른, 더 일상적인, 표현 방식을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

> (11) 만약 어떤 ω-순서열 체계가 가능하다면, 그 체계에서 '2의 자리에 있는 대상과 3의 자리에 있는 대상을 합한 결과는 5의 자리에 있는 대상과 같다'는 진술은 성립할 것이다."

헬만은 위 문장 (11)의 전건이 쉽게 만족되기 때문에 산수에서의 비공허성 문제는 쉽게 해결된다고 믿는다. "어떤 ω-순서열 체계가 가능하다"는 이 주장은 헬만의 기호를 사용하면, 다음과 같이 표현된다.

> (12) $\Diamond \exists X \exists f (\wedge PA^2)^X ({}^s{}_f)$[43]

---

41) 번역틀 (9)에서는, 번역틀 (8)에서와 달리, "0"가 다음항 함수 표현 "S"에 의해 정의되어 제거되어 있다고 전제하고 있다.

42) 여기서 "에서"의 용법은, Fa의 의미로 "F가 a에서 성립한다"고 말할 때의 "에서"와 같다.

헬만은 여기서 말하고 있는 '논리적 가능성'은 원초적인 개념으로 간주되어야 한다고 설명한다. 이와 관련된 상황은 앞 3절에서 샤피로의 '정합성' 개념과 관련하여 논의되었던 상황과 거의 같다. 다만, 여기서는 양상 논리에 대한 표준적 의미론인 -실재적인- 가능 세계를 동원한 해석도, 헬만의 유명론적 의도에 비추어 볼 때, 배제되어야 한다는 상황이 더 부가될 뿐이다.

그렇다면, 하여튼, 과연 식 (12)의 주장은 쉽게 정당화될 수 있는 것일까? 물론, 이때의 "ω-순서열 체계"는 구체적 대상들로 이루어진 체계를 의미한다는 것은, 제거적 구조주의자가 해결하지 못하는 비공허성의 문제를 헬만이, 유명론자로서, 양상 개념을 동원하여 해결하려 한다는 앞의 설명으로부터, 분명할 것이다. 그런데 그것은 가능 무한 ω-순서열 체계인가? 아니면 실(또는 완결된) 무한 ω-순서열 체계인가? 헤일(B. Hale)이 지적한 것처럼, 헬만의 의도에 비추어 볼 때, 그것은 실 무한 체계임에 틀림없다. 왜냐하면 가능 무한 ω-순서열 체계는 이미 물리적 시공간에 실현되어 있다고 충분히 말할 수 있으므로, 헬만이 비공허성의 문제를 해결하기 위해 굳이 이러한 가능 무한 ω-순서열 체계의 '가능성'을 끌어들일 필요가 없기 때문이다.[44] 그런데 헬만은, 매우 대담하게도(?), 식 (12)를, 즉, "구체적 대상들로 이루어진 완결된 ω-순서열 체계의 존재가 논리적으로 가능함"을 수학적으로 증명하려고 한다.

헬만은, 자신이 보기에 "구성적 근원"을 갖고 있는 것으로 간주되는, 두 개의 원리(또는 가정)를 통해 (12)를 증명한다. 그 하나는 헬만 자신이 "가능 무한"이라고 명칭한 원리로서, 어떤 규칙 R에 의해 구체적 대상들이 계속 생성되어 이것들이 앞서 생성된 구체

43) Hellman(1989), p. 27.

44) 또한 산수를 넘어서서 해석학을 양상 구조주의적으로 해석하려고 할 경우, 가능 무한 ω-순서열의 가능성만으로써는 비공허성의 문제가 해결되지 않는다. Hale(1996), p. 132 참조.

적 대상들과 -산수에서의 다음항 관계와 똑 같은- 관계 A를 맺는 것이 논리적으로 가능하다는 원리이다. 튜링 기계에서처럼, 테이프의 한쪽 방향으로 쭉 옮겨 가는 동안 짧은 선들의 나열이 끝나고 공백의 칸을 마주칠 때, 그 곳에 짧은 선을 하나 더 긋는 것을 규칙 R이라고 하자. 그리고 "A(x, y)"는 'y는 규칙 R에 의해 x 다음에 생성된다'는 관계를 의미한다고 해보자. 그리고 이 관계 술어 "A"를 사용하여 관계 A가 성립하는 영역이 무한하다는 것을, 일차 논리의 문장으로, 다음과 같이 표현할 수 있을 것이다.

(13) $\exists x \exists y(A(x, y))$ & "A는 비대칭적이고 전이적이다" & $\forall x \exists y(A(x, y))$ & $\forall x \exists ! y(A(x, y)$ & $\neg \exists z(A(x, z) \& A(z, y))$. (*)

헬만은 (13)을 받아들일 이유는 없을지 모르나, 그것이 논리적으로 참일 수 있음을 받아들일 만한 "모든 이유"("every reason")가 존재한다고 주장한다. 따라서 그는 다음을, "가능 무한"이라는 이름의 원리로서, 가정한다.

(14) $\Diamond$(*) (가능 무한 Potential Infinity)

바로 다음에, 그는 '포괄 원리'(comprehension scheme)[45]에 의존

45) 헬만은 자신의 양상 구조주의적 해석을 표현하는 데 이차 논리를 받아들이면서, 다음과 같은 포괄 원리(또는 포괄성 틀)를 포함한 이차 논리를 받아들인다. (Hellman(1989), p. 25 참조.)

$\exists R \forall x_1 \cdots \forall x_k [R(x_1 \cdots x_k) \equiv A]$
(여기서 x는 개체 변항이며, R은 A에서 자유롭게(양화되지 않은 채) 나타나서는 안되며, A는 어떤 양상 조작자도 포함하지 않아야 한다.)

헬만은, 물론, 이렇게 도입된 관계 술어에 대하여 유명론적 해석을 시도한다.(위의 책, pp. 47-52 참조.)

하여 다음의 식을 증명할 수 있다고 말한다.

> (15) $\Box[(*) \supset \exists X \forall z\{(X(z) \equiv \exists x A(x, z))$ & "X는 ω-순서열 체계를 포함한다"}].

그리고 (14)와 (15)로부터 문제의 (12)는 쉽게 도출된다.[46] 그리고 그는 자신의 이러한 증명의 성과를 다음과 같이 표현하였다.

> 양상 이차 논리에 의해 형식화된 양상 구조주의적 해석에 따르면, 무한한 총체들(totalities)의, 적합한 종류의, 존재는 부가적인 전제가 아니라, (앞에서) 보였듯이, 우리가 "가능 무한"이라고 불렀던 것과 이차 포괄 원리라는 두 개의 더 기초적인 가정들로부터 따라 나왔다. 그리고 이 두 개의 가정들은 각각 자기 방식으로 "구성적 근원"을 갖고 있다. '가능 무한'은, 물론, 모든 구성적 수학의 시초가 되는, "하나를 더 보태기"라는 가장 기초적인 절차에 그것의 근원을 두고 있다. …그리고 물론 포괄 원리는 언어적 구성, 즉, 적절한 종류의 술어들의 구성과 결합되어 있다. …이러한 구성적 원리들 둘 다 수학의 기초에 있어서 매우 이른 단계에 도입되어야 한다. …두 개의 구성적 원리들을 결합하자 곧 바로 고전적 해석에 의해 요구되는 가장 기본적인 무한 총체가 산출되었다.[47]

한편, 그는 양상적으로 적용되는 포괄 원리가 실 무한의 가능성을 이끌어 낸다고 생각하는 것 같다.

> 도출을 완결하기 위해, 우리는 "가능 무한"의 양상적 문맥에서의 프레게적 추상에 호소하였다: 이러한 조건들을 만족시키는 짧은 선들이 존재할 수 있을 것이며, 그렇다면 이러한 짧은 선들의 클래스가 존재할 것이다. …. 양상적으로 적용되는 포괄 원리는, 우리로 하여금, 수학을 위한 "우연적이지 않은 무한"이라는 러셀의 요구에 적절히 대응하게끔 해준다.(물론 "실 무한"이라는 용어는 이 문맥에서 혼란을 일으키는 것이다. 포괄 원리는 무한한 총체가 있을 수 있음을 우리에게 말해준다.

46) Hellan(1989), pp. 29-30.
47) Hellman(1989), p. 33.

그리고 이 무한한 총체는 "가능(잠재적)"에 대립되는 것으로서의 "완결된"이라는 의미에서의 "실 (무한)"이다.…)[48]

위 인용문들에 대한 필자의 해석에 따르면, 헬만은 '구성적 근원'을 갖는 '가능 무한'의 원리를 통해 순수한 가능 무한 체계를 가정하였고, 여기에다 역시 '구성적 근원'을 갖는 '포괄 원리'를 보태어 실 무한 체계의 가능성을 도출하였다고 생각하는 것 같다. 헬만의 생각에 대한 이러한 필자의 해석이 옳다면, 헬만은 그의 '가능 무한 원리'와 '포괄 원리'가 수행하고 있는 역할에 대하여 착각을 일으키고 있는 것 같다. 필자의 판단에 따르면, 그의 '가능 무한 원리'는 순수한 가능 무한 체계를 가정한 것이 아니라 실 무한 체계의 논리적 가능성을 (이미) 가정한 것이며, 한편, 그의 '포괄 원리'는 실 무한 체계의 가능성의 도출을 결정적으로 가능케 한 것이 아니라, -구속된 이차 변항에 대한 유명론적 해석과 함께- 단지 가능한 실 무한 체계에 대한 표현("X")의 도입을 가능하게 했을 뿐이다.[49] 왜냐하면, 매우 명백하게도, 일차 식 (13)에 대한 모델의 논의역은 분명히 실 무한개의 대상들로 이루어져야 할 것이기 때문이다. 결국, 헬만은 위 증명에서 별로 이룬 것이 없다. 위 증명을 통해, 헬만은 다만 가능한 것으로 가정되는 문제의 완결된 구체적 ω-순서열 체계에 대한 표현만을 얻었을 뿐이다. 이로써, 비공허성의 문제를 양상 개념과 함께 '엄격한' 증명으로써 해결하려는 헬만의 시도

---

48) 위의 책, pp. 31-32.

49) 헤일이, 필자에 앞서, 헬만의 "가능 무한(의 원리)"이라는 명칭이 혼돈을 유발하는 것이라고 말한 바 있다.(Hale(1996), p. 132 참조.) 그러나 헤일은, 헬만이 증명하고자 한 것이 '구체적 대상들로 이루어진 완결된 ω-순서열 체계의 논리적 가능성'이 틀림없다는 점을 이야기하는 과정에서 지나치면서 이런 말을 하였다. 즉, 헤일은 헬만의 위의 증명 과정에 대하여 아무런 비판을 가하지 않았다. 대신에 그는, "완결된 구체적 ω-순서열 체계가 논리적으로 가능하다"는 헬만의 주장은 받아들이기 힘들다는 것을, 자신의 방식으로, 논증하였다.(이에 대한 소개는 본문에서 곧 나올 것이다.)

는, 심하게 말하면, 착각에 지나지 않는다. 왜냐하면 우리는, 물론, 식 (14), 즉, '가능 무한의 원리'의 정당성을 지금 문제 삼고 있기 때문이다.

이상의 필자의 판단을 보강하는 역할을 하는 독립적인 논증이 헤일에 의해 제시되었다.[50] 헤일은 "완결된 구체적 ω-순서열 체계가 정말 논리적으로 가능한가?"의 문제에 스스로 답해 보려 한다. 헤일에 따르면, 이 물음의 답에 접근하는 길은 구상가능성(conceivability)을 통한 길 밖에 없다. 따라서 우리는 이 물음을 다음과 같이 둘로 구분할 수 있다: "완결된 구체적 ω-순서열 체계가 구성된다(be constructed)는 것이 구상될 수 있는가?"와 "그러한 순서열 체계가 구성의 활동으로부터 독립적으로 존재한다는 것이 구상될 수 있는가?"라는 물음. 그런데 헤일에 따르면, 전자의 물음에 대한 답은 후자의 물음에 대한 답에 의존한다. 우선, 전자가 묻고 있는 슈퍼 과제(supertask)의 수행의 가능성은 결국 슈퍼 과제를 수행하는 자가(이를테면, 헤라클레스) 자신이 그러한 과제를 수행했는지를 판단할 수 있는 가능성에 의존한다고 생각할 수 있다. 왜냐하면 슈퍼 과제를 수행하는 자는 '의도적으로' 그러한 슈퍼 과제를 수행한다고 보아야 하기 때문이다. 그런데 그가(헤라클레스) 자신이 슈퍼 과제를 수행했는지를 판단할 수 있으려면, 어떤 상태가 슈퍼 과제가 완결된 상태인지를 판단할 수 있는 기준을 가져야 하고 또한 이러한 기준은 —자신의 과제 수행을 평가하는 기준이 되기 위해서는— 자신의 과제 수행의 방식과 결과에 의존하지 않는 것이어야 한다. 그리고 이러한 기준의 존재는 위의 후자의 물음의 답에 의존한다.[51]

그렇다면, 완결된 구체적 ω-순서열 체계가 구성의 활동으로부터

50) 다른 각도에서 보면, 헬만의 증명에서의 결합에 대한 필자의 지적이 헤일의 논증을 보강하는 것으로 간주될 수도 있다.

51) Hale(1996), pp. 141-144.

독립적으로 존재한다는 것이 구상될 수 있는가? 여기서 —어떤 진술 A가— "구상가능하다(구상될 수 있다)"는 말은 헤일(과 야블로(S. Yablo))에 따르면[52], '문제의 진술 A를 —¬A 보다— 월등히 지지하는(¬A보다 A가 거기에서 성립한다고 월등히 간주할 수 있는) 어떤 가능한 상황 S를 상상할 수 있음'을 의미한다. 그리고 다시, 여기에서 "상상할 수 있음"은 '어떤 이미지 또는 그림을 상상할 수 있음'을 의미하는 것이 아니라 '어떤 언어적 표현을 줄 수 있음'을 의미한다. 만약 이러한 정의들이 합당하다면, 헤일에 따르면, 우리는 완결된 구체적 ω-순서열 체계를 구상할 수 없다. 왜냐하면 어떤 가능한 상황 S에 대한 상상은, 즉, 그러한 상황에 대한 언어적 표현(기술)은, 오로지 유한하게 많은, 원리적으로 경험적으로 확인 가능한[53], 사실들만을 언급할 것인데, 관찰 자료에 의해서는 이론이 결정되지 않는다는 콰인의 주장을 받아들인다면, 그러한 상황이 "완결된 구체적 ω-순서열 체계가 존재한다"는 진술을 귀결시키는 이론을, 그것의 부정을 귀결시키는 이론보다, 월등히 지지한다고 보기 어렵기 때문이다.[54]

3절에서 필자는, 케래넨의 논증을 수정하여, 'ante rem 구조주의자가 ante rem 구조에서의 자리로서의 수학적 대상들에 대한 적절한 동일성 설명을 제공하는 일은 원리적으로 불가능하다'는 강한

---

52) Yablo(1993).

53) 이러한 조건의 추가는 결코 '구상가능성'을 '검증가능성'으로 바꾸는 일이 아니다. 여기서 주장하는 조건은 결코 '어떤 진술 A가 -¬A보다- 거기에서 "월등히" 성립하는 지를 **우리가 거기에서 검증할 수 있는** 그러한 상황을 상상할 수 있어야 한다'는 것이 아니라, '어떤 상황 S를 상상했으면, 그 상황 S에서 어떤 진술 A가 -¬A보다- 거기에서 "월등히" 성립하는지를 우리가 -상황 S가 아닌- 지금 여기에서 판단할 수 있는 원리적 가능성이 있어야 한다'는 것이다. Hale(1996), pp. 137-138 참조.

54) Hale(1996), p. 145.

주장을 낳는 논증을 제시하였다. 한편 4절에서, 필자는 "완결된 구체적 ω-순서열 체계는 논리적으로 가능하다"는 주장에 대한 헬만의 증명이 결국 '논점 선취의 오류'를 저지르는 심각한 결함을 갖고 있다는 점을 지적하였다. 결론적으로, 수학의 객관성을 확보하려는 넓은 의미의 비공허성의 문제는 어떤 구조주의자에 의해서도 해결되지 않았다고 말할 수 있다.

후기

두 분의 심사위원께서 매우 자세하고 유익한 심사평을 써주셨다. 특히 한 분은 9쪽에 달하는 분량의 심사평을 써 주셨다. (*아마도 매우 바쁜 일정 속에 계실 터인데, 귀중한 시간을 내 주시어 필자의 허술한 논문을 꼼꼼히 읽어봐 주시고 또 유익한 심사평을 써 주신데 대해 두 분의 심사위원께 감사드립니다.) 매우 자세한 심사평에 대해 그냥 본 논문을 수정하거나 각주를 다는 것 보다는, 만약 생산적인 논의가 될 수 있다면, 후기를 쓰는 것도 괜찮을 거라 생각하여, 심사평에 대한 필자의 답변을 후기로 쓰는, 조금 어색한, 형식을 취하게 되었다. (*독자들의 너그러운 양해를 구한다.)

우선 한 분의 심사위원께서는 5가지 정도의 문제점을 지적하였으나, 4가지는 본 논문의 근본적인 문제점들이라서(본 논문에서 거론되고 있는 여러 가지 견해들에 대한 필자의 소개와 이에 대한 필자 자신의 생각이 미흡하다는 문제) 본 논문을 약간 수정하거나 여기 후기에서의 답변을 통해 해소될 성격의 것이 아니라 판단된다. 따라서 나머지 한 가지 다음과 같은 지적 사항에 대해서만 답하고자 한다: “필드를 도구주의자로 간주하는데, 이것은 틀리다. 특히 필자가 주 (9)에 도구주의자를 수학적 진술의 진리치에 대한 반실재론을 의미한다고 했는데, 필자의 다른 논문 “수학적 플라톤주의와 수의 비고유성 문제” 주 (10)에서 정의한 진리치에 대한 실재론의 정의에 따르면 필드의 입장은 실재론에 해당한다.” 필자의 논문을 매우 정확하게 읽었음을 보여주는 지적이다. 그러나 본 논문의 주 (9)가 좀 더 엄밀하게 기술될 필요가 있을지 모르나, 필드를 도구주의자로 간주하는 필자의 이해가 틀린 것은 아니다. 이러한 상황은 필드 스스로가 ‘도구주의’(진리치에 있어서의 반실재론)라는 용어의 외연을 일반적인 정의보다 조금 더 넓게 생각하는 것과 관계가 있다. 필자는 -도구주의(진리치에 있어서의 반실재론)에 대한 일반적 정의와 관련이 있는- 2006년 논문 주 (10)에서 “전자(진리치에 있어서의 실재론)는 문제가 되는 분야의 문장들이 분명히 참 또는 거짓의 진리치를 갖는다고 믿는 입장”이라고 썼다. 그렇다면, 수학적 대상의 존재를 주장하는 진술들을, 예를 들어 “1과 3 사이에 솟수(prime number)가 하나 존재한다”와 같은 진술들을, 분명히 거짓으로 간주하는 필드의 허구주의는 진리치에 있어서의 실재론으로 간주되어야 하는가? 충분히 예상할 수 있듯이, 필드 자신은 그렇지 않다고 판단한다. 필드는, 엄밀하게 구분한다면, 자신의 허구주의가 진리치에 있어서의 반실재론—문장들이 진리치를 결여한다는 입장—과 구분될 수 있을지 모르나 그 차이는 사소하며 결

국 중요한 것은 '우리가 수학적 진술을 수용하는 이유가 그 진술이 갖고 있는 진리치 때문인가 아닌가의 문제'이며, 이러한 관점에서 보았을 때 자신의 허구주의는 도구주의로 간주될 수 있다고, 다음과 같이, 밝히고 있다. "수학적 도구주의는 가끔 수학적 허구주의와 구별된다: 도구주의는 수학적 주장들이 진리치를 결여한다고 주장하는 입장으로, 허구주의는 그것들이 거짓이라고 주장하는 입장으로 간주된다. 나의 생각에 따르면, 이것은 어떤 흥미도 갖지 못하는 구별이다. 두 입장과 관련하여 중요한 점은 수학적 주장의 수용 가능성이 그 주장이 가질 수 있는 진리치에 전혀 의존하지 않는다는 점이다. 적용 가능성이 명백한, 수학의 경우에 (그리고 또한 물리학의 경우에), 나는 '허구주의'와 '도구주의'라는 두 단어를 상호 교환 가능한 방식으로 사용할 것이다."(Field(1989), p. 4의 각주 4)

A4 용지 9쪽 분량의 심사평에서 필자에게 매우 유익한 조언과 비판을 해 주신 다른 한 분의 심사위원께서는 우선 용어 및 번역어 선택과 관련하여 몇 가지 조언을 해 주셨다. 'Dedekind'에 대한 번역어로, 필자가 선택한 '데디킨트' 대신에, '데데킨트'가 적절하다는 점, 'irreflexive relation'에 대한 번역어로, 필자가 선택한 —매우 부적절한 번역어인— '비반성적 관계' 대신에, '비재귀적 관계'가 더 낫다는 점을 지적해주셨다. 필자는 심사위원의 이러한 조언에 기꺼이 동의하여, 그것에 따라 문제의 번역어들을 수정하였다. 그러나 '비공허성의 문제'를 '공허성의 문제'로, '다음 항(successor)'을 '후자'로, '비술어적으로(impredicatively, 순환적으로)'를 '비서술적으로'로, '전이적 관계(transitive relation)'를 '이행 관계'로 수정하는 게 더 낫지 않겠느냐는 심사위원의 호의적인 제안에 대해서는 더 생각해 볼 필요가 있다고 필자는 판단하여 그러한 수정을 본 논문에서는 실행하지 않았다. '비공허성의 문제'와 관련하여서는, 예를 들어 '존재의 문제', '환경 문제'와 같은 용어들에서처럼, '문제'라는 표현이 반드시 부정적인 의미로만 —제거해야 할 무엇에 적용되는 표현으로만— 쓰이는 것은 아니고 '중요성' 또는 '과제' 등의 의미를 어느 정도 함축하고 있는 듯 하다. 필자는 원래 '참인 수학적 진술들이 공허하지 않게 참임을 설명해야 하는 과제가 구조주의자들에게 부과되어 있다'는 맥락에서 '비공허성의 문제'라는 표현을 사용하였다. '다음 항'과 '전이적 관계'와 관련하여서는, 이것들을 수정해야 할 뚜렷한 이유를 아직 발견하지 못해서 본 논문에서는 그냥 두기로 필자는 결정하였다. 한편, 위와 같은 용어 및 번역어의 선택 문제는 사실 표현과 관련된(verbal) 문제를 넘어서는 것 같지 않지만, 'impredicative'의 적절한 번역어를 찾는 문제는 생산적인 철학적 토론을 가능하게 하는 것 같다. 심사위원께서는 'impredicative'에 대한 번역어로 '비서술적'이라는 표현을 제안하시면서, 다음과 같은 이유를 덧붙이셨다; "'impredicaivity'는 술어의 서술적 특징에 대비되는 말이지 술어 자체에 대비되는 말이 아니다. 비서술성은 순환성과

같은 말이 아니며, 비서술성이 언제나 순환성을 함축하는 것은 아니다."

'impredicative'라는 용어의 사용은 러셀로부터 비롯되었다고 한다. 프레게의 논리주의 기획을 파국으로 몰고 간 근본법칙 V의 모순의 원인을 러셀은 근본법칙 V의 impredicativity에서 찾고자 했다. 현재, 불로스 및 라이트에 의해, 근본 법칙 V의 모순 또는 러셀 역설의 원인은, 술어 또는 명제 함수로부터 이것에 대응하는 클래스의 존재를 정의 또는 규약하려는 이러한 원리들의 impredicativity가 아니라 그 원리들이 칸토르의 정리를 위배한다는 사실에서 찾아야 한다는 주장이 제기되었고 철학자들 사이에 상당한 설득력을 얻고 있는 것으로 필자는 알고 있다. 그런데 러셀이 'predicative'와 'non-predicative'('impredicative')라는 용어를 처음 사용한 문헌으로 알려져 있는 1906년 논문 "On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types"에서, 그는 어떤 명제함수가 클래스를 정의(define)(또는 결정(determine))하는 경우 그 명제함수를 'predicative'라고 일컫고, 그렇지 않은 경우의 명제함수를 'non-predicative'라고 일컬을 것을 제안하였다.[1] 그리고 그는 계속해서 1906년의 다른 논문 "On 'Insolubilia' and their Solution by Symbolic Logic"에서 impredicativity를 적극적으로 규정하려고 노력하였는데, 이때 그는 클래스에 대한 impredicative 정의를 악순환 원리를 위배한 정의로 이해하였다. 러셀 역설의 원인을 impredicativity에서 찾고, 또한 'impredicative'라는 용어 속에 '악순환'의 의미를 부여하려 했던 러셀의 생각은 분명히 논란의 대상이다. 따라서 이러한 부정적인 의미들의 함축을 배제한, 다음과 같은, 사실 그대로의 중립적인 의미를 'impredicative'에 부여하는 것이 적절할 것이다; "대상 또는 클래스에 대한 impredicative 정의는 문제의 대상 또는 클래스를 요소(element)로서 갖는 모임(collection)을 지칭하는 정의이다."[2] 그렇다면 이러한 의미를 갖는 'impredicative'를 어떻게 번역하는 것이 좀 더 나을까? 필자는 거의 직역에 가까운 번역어를 선택하였고, 어느 정도의 감을 주기 위해 원어를 표기한 괄호 속에 '순환적인'이라는 말을 끼워 넣었다. 방금 인용한 중립적인 사실 그대로의 정의에서 알 수 있듯이, impredicative 정의에는 어떤 종류의 순환성이 -이것이 반드시 악순환성인 것은 아니지만- 분명히 있는 것 같기 때문이었다. 이와 같은 필자의 의도에 대하여, 심사위원께서는 위에 인용한 비판 또는 제안을 하셨다. "'impredicativity'는 술어의 서술적 특징에 대비되는 말이지, 술어 자체에' 대비되는 말이 아니다"는 심사위원의 말씀과 관련하여, 현재 통용되고 있는 의미에 비추어 볼 때, 'impredicativity'는 심사위원의 말씀대로 술

1) Russell(1973), pp. 139-141.

2) Detlefsen(1999), p. 53.

어 자체에 대비되는 말이 아닌 것이 분명하다. 더 나아가, 현재 통용되고 있는 의미에 따른다면, 러셀이 처음 의도하였던 의미도, '-술어 또는 명제함수가- 대상 또는 클래스를 정의하지 못한다'는 의미도, 배제되어야 할 것이다. impredicative 정의가 대상 또는 클래스를 정의할 수 있는지 없는지는 아직 논란거리인 것 같기 때문이다. 심사위원께서 또 "'impredicativity'는 술어의 서술적 특징에 대비되는 말"이라고 하였을 때, 만약 그 '서술적 특징'이 '대응되는 대상 또는 클래스를 정의(또는 규정)할 수 있음'을 의미한다면, 그리고 이러한 번역은 현재 통용되고 있는 의미가 아니라 러셀의 본래 의미를 반영한다는 제한사항이 덧붙여진다면, 필자는 그러한 번역을 받아들일 수 있을 것이다. 그러나 '술어의 서술적 특징에 대비되는 말'을 우리가 들을 때, 우리는 흔히 언어 문법 시간에 배운 형용사의 '서술적 용법'과 '한정적 용법' 간의 대비를 떠올리기 쉽다. 만약 이러한 연상을 가능하게 한다면, '비서술적'이라는 번역어는 그렇게 적절한 번역어라고 보이지 않는다.(논리적 언어에서는 '서술적 용법'과 '한정적 용법' 간의 대비는 없으며, 프레게의 논리적 언어의 한 장점은 그러한 언어적 구별이 논리적으론 아무런 중요성을 갖지 않는다는 점일 것이기 때문이다.) 그리고 심사위원께서 러셀이 본래 의도하였던 부정적 의미를 담고자하였다면, 심사위원께서는 '순환적'이라는 -번역어가 아니라 이해를 도와주는 용어로 사용된- 필자의 용어를 반대하는 이유를 스스로 내 버리는 결과를 낳을 것이다. (아마도, 심사위원께서는 '순환적'이라는 말보다 더 강한 부정적 의미의 '악순환적'이라는 말까지 받아들여야할 지도 모르겠다.) 물론, 직역에 가까운 필자의 번역어 '비술어적'이라는 용어는 러셀의 의도가 함축되어 있을 것이라는 것을 우리가 추측할 수 있다. 분명히 러셀의 생각은 논란거리이지만, 러셀은 impredicative 명제 함수는 클래스를 정의하지 못한다고 생각하였고 그러한 맥락에서 러셀의 'impredicative'는 '대응하는 클래스를 정의하지 못하는'이라는 의미를 담고 있다. 그렇다면, 계속 연장된 러셀의 생각을 추측한다면, impredicative 술어 또는 명제 함수는 프레게적 의미에서의 **진정한** 술어로 간주될 수 없을 것이다. 왜냐하면 이러한 술어 'Fx'는 그 외연이 결정되지 않아 —impredicative 정의를 포함하는 문제의 이론에서 지시체를 갖는 것으로 간주되는— 임의의 단칭어 'a'에 대하여 'Fa'가 항상 분명한 진리치를 가질 수는 없기 때문이다. 'impredicative'에 대한 적절한 번역어의 선택의 어려움은, 이상에서 살펴 본 바와 같이, 러셀이 본래 의도하였던 의미의 많은 부분이 지금 —심지어 당시에도— 논란거리가 되었다는 사실에서 연유하는 것 같다. 따라서 필자는, 지금은 유효하지 않은 의미가 함축될 가능성이 있는 번역어이지만, 거의 직역에 가까운 '비술어적'이라는 번역어를 'impredicative'에 대한 번역어로 받아들이고 동시에 이 용어를 지극히 기술적인(technical) 용어로서 받아들여 위에 소개한 중립적이며 사실적인 정의에

의해 규정된 의미만을 이 용어의 의미로 취할 것을 제안하고자 한다. 자꾸 길어져서 난감하지만, impredicativity가 언제나 순환성을 함축하는 것은 아니라는 심사위원의 말씀에 대하여, 필자는 "impredicativity가 언제나 순환성을 함축하는 것은 아니다"라는 주장 자체 역시 아직 논란의 대상이 아닌가라고 생각하고 있다. 예를 들어, 라이트의 논문 "On the Harmless Impredicativity of $N^{=}$(Hume's Principle)"은[3] impredicativity가 항상 순환성을 함축하는 것은 아니라는 주장과 이에 대한 논증을 담고 있는 것으로 여겨질 만하다. 이 논문에서 라이트는, 흄의 원리의 impredicativity가 프레게의 논리주의를 구제하려는 라이트의 시도를 실패하게 만들 것이라는 더밑의 비판에 대하여, 대략 다음 세 가지의 전략을 통해 대응하고 있다. 첫째, 그는 흄의 원리의 impredicativity가 모순을 유발하지 않으며, 러셀 역설 및 근본법칙 V의 모순은 추상의 근거가 되는 동치 관계가 '러셀적'이며 문제의 추상이 impredicative 정의라는 두 조건을 모두 만족시켜야 발생한다는 점을 보였다.(러셀 역설의 원인에 대한 라이트의 이러한 진단은 앞에서 소개하였던 -문제의 정의 또는 규약이 칸토르의 정리에 위배된다는- 불로스의 진단에 대응한다.) 둘째, 그는, impredicativity의 악순환성 때문에 흄의 원리가 자연수 개념에 대한 적절한 설명을 제공하지 못할 것이라는 더밑의 우려에 대하여, 진리조건(truth-condition)과 의미(meaning)를 구별함으로써 그러한 악순환성이 없음을 보이려고 하였다. 셋째, 그는 impredicativity를 갖고 있는 흄의 원리를 통해 수 동일성 문장에 그것의 진리조건을 비악순환적으로(또는 비순환적으로) 부여할 수 있는 하나의 방법을 제안하였다. 즉, 그는 수 술어들(수 단칭어 조작자 '...의 수'가 붙게 되는 술어들), 그리고 여기에 수 단칭어 조작자가 붙어 형성되는 수 단칭어들, 그리고 이러한 수 단칭어가 동일성 기호 양 옆에 놓이는 수 동일성 문장들을, 러셀의 유형 이론과 유사하게, 단계(rank) 별로 구분함으로써 수 동일성 문장에 진리조건을 비순환적으로 부여하려고 한다. 필자는 라이트의 둘째와 셋째 전략은 아직 논란의 대상이라고 판단하고 있다. 특히, 라이트의 목적에 비추어 볼 때 결정적인 중요성을 갖는 셋째 전략은 과연, 라이트의 주장대로, 흄의 원리의 impredicativity가 순환성(또는 악순환성?)을 유발하지 않음을 보이는 것인지, 아니면 흄의 원리로부터 impredicativity 자체를 제거하려는 것인지, 아니면 흄의 원리의 impredicativity가 순환성을 유발하지만 그것이 악순환성은 아니라는 것을 보이는 것인지 좀 더 세밀한 검토와 논의가 필요하다고 판단된다. 하여튼, 어느 정도 분명한 것은 impredicativity가 악순환성 뿐만 아니라 심지어 어떤 종류의 순환성도 갖고 있지 않다는 주장은, 아직까지, 그 반대 주장보다 더 많은 정당화

3) Hale & Wright(2001), pp. 229-255.

의 부담을 갖고 있다는 점이라고 필자는 판단하고 있다.

한편 후자의 심사위원께서는 본 논문의 내용과 관련하여 5가지 정도의 비판을, 그 근거를 친절히 제시하시면서, 아주 세밀하게 써 주셨다. 이에 대하여, 지면 관계상, 정말 간략하게 답하고자 노력해보았으나 분량이 엄청나게 늘어나 포기하고 말았다. 심사위원의 너그러운 양해를 구한다. 다시 한번 더, 두 분의 심사위원께 감사드리며, 터무니없이 미흡한 답변을 마치고자 한다.

참고문헌

권병진(2006), “수학적 플라톤주의와 수의 비고유성 문제”, 『논리연구』 9집 1호, 한국논리학회

Detlefsen, M., McCarty, D. C., Bacon, J. B.(1999), *Logic from A to Z*, Routledge

Enderton, H. B.(1977), *Elements of set theory*, Academic Press Limited

Field, H.(1980), *Science without numbers*, Princeton

_______(1989), *Realism, Mathematics and Modality*, Basil Blackwell

Hale, B.(1996), Structuralism's Unpaid Epistemological Debts, *Philosophia Mathemaica*, Volume 4, 3rd issue, pp. 124-147.

Hale, B. & Wright, C.(2001), *The Reason's Proper Study*, Oxford

Hellman, G.(1989), *Mathematics without Numbers*, Oxford

_______(2001), Three Varieties of Mathematical Structuralism, *Pilosophia mathematica*, Volume 9, second issue, 2001.

_______(2005), Structuralism, in *The Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*(edited by S. Shapiro), pp.536-562, Oxford.

Keränen, J.(2001), The identity problem for realist structuralism, *Philosophia Mathematia*, 3rd issue, pp.308-330.

Ladyman, J.(2005), Mathematical Structuralism and the Idenity of Indiscernibles, *Analysis* 65.3, July, pp. 218-221

Macbride, F.(2006), What constitute the numerical diversity of mathematical objects?, *Analysis* 66.1, January, pp. 63-69.

Maddy, P.(1990), *Realism in Mathematics*, Oxford.

Parsons, C.(1990), The structuralist view of mathematical objects, *Synthese* 84: 303-346. (*Resnik(1995)의 pp.543-586에 재수록 되어 있음.)

Quine, W.V.(1960), *Word and Object*. The M.I.T. Press.

Russell, B.(1973), *Essays in Analysis*, George Allen & Unwin Ltd.

Shapiro, S.(1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford.

Yablo, S.(1993), Is conceivability a guide to possibility?, *Philosophy and Phenomenological Research* 53, pp. 1-42.

강릉대학교 철학과

Email: bjinkwon@kangnung.ac.kr