한국수학사학회지 제21권 제2호(2007년 5월), 109-126

Lobachevskii와 Hadamard의 기하학 교재에서 삼각형의 합동에 대한 정리들

경상대학교 한인기
inkiski@gsnu.ac.kr

Lobachevskii와 Hadamard는 유럽에서 Euclid의 '원론'에 의한 기하교육으로부터 새로운 형태의 기하교육으로의 전환하는 시기에 기하학 교재를 저술하였다. 본 연구에서는 Lobachevskii의 '기하학'과 Hadamard의 '초등기하학'에서 다루고 있는 삼각형의 합동에 대한 정리들을 조사하고, 이들의 증명 방법들을 분석하며, 직각삼각형의 합동조건의 증명 방법을 우리나라의 수학교과서에 제시된 증명 방법들과 비교하였다.

주제어 : Lobachevskii, Hadamard, 삼각형의 합동, 직각삼각형의 합동

0. 서론

삼각형의 합동에 관련된 정리들은 평면기하학의 구성 및 학습에서 중요한 역할을 한다. 특히, 우리나라의 수학교과서에서 삼각형의 합동은 도형의 성질에 대한 직관적인 접근과 연역적 접근의 갈림길에 있는 중요한 개념이라 할 수 있다. 즉, 삼각형의 합동을 다루기 이전에는 도형의 성질에 대한 직관적인 탐구가 중심이 되지만, 삼각형의 합동을 다룬 후에는 이를 이용한 연역적인 증명 활동이 시작된다.

삼각형의 합동에 관련된 효과적인 지도 방법이나 정리들의 증명 방법에 대한 국내 연구는 드물다. 박한식([2])은 두 삼각형에서 한 변이 같고, 이 변의 대각과 다른 한 각이 각각 같으면, 두 삼각형은 합동이 된다는 것에 대한 몇몇 증명을 소개하였고, 한인기([3])는 우리나라와 러시아의 수학교과서에 제시된 삼각형의 합동에 관련된 학습 내용을 비교하였으며, 삼각형의 합동조건들의 증명 방법을 소개하였다. 이들 연구를 통해, 삼각형의 합동에 대한 몇몇 정리들의 증명이 소개되었다는 것은 의미있다고 할 수 있다. 그러나 다른 기하학 교재에서 삼각형의 합동에 대해 어떤 정리들이 취급되고 있으며, 어떤 증명 방법이 있는지, 이들 내용이 우리나라 수학교과서와 어떤 차이가 있는지에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

본 연구에서는 유명한 기하학자인 Lobachevskii가 1823년에 집필한 '기하학'에서 삼

각형의 합동에 대한 정리들을 분석하고, Hadamard가 1898년에 발행하여 유럽에서 폭넓게 사용된 '초등기하학'에 제시된 삼각형의 합동에 대한 정리들을 조사, 분석할 것이다. Lobachevskii와 Hadamard는 유럽에서 Euclid의 '원론'에 의한 기하교육으로부터 새로운 형태의 기하교육으로의 전환하는 시기에 기하학 교재를 저술하였다는 공통점을 가지므로, 이들의 기하학 교재에 삼각형의 합동에 대해 어떤 정리들이 포함되었는가를 조사하는 것은 가치로울 것이다. 그리고 Lobachevskii가 Hadamard보다 70년 정도 앞서서 기하학 교재를 집필하였는데, Lobachevskii와 Hadamard의 기하학 교재에 제시된 삼각형의 합동에 대한 정리들의 증명 방법을 비교하는 것도 수학사적으로 흥미로울 것이다.

본 연구에서는 Lobachevskii의 '기하학'과 Hadamard의 '초등기하학'에서 다루고 있는 삼각형의 합동에 대한 정리들을 조사하고, 이들에 대한 증명 방법들을 분석하며, 직각삼각형의 합동조건들의 증명 방법을 우리나라의 수학교과서에 제시된 증명 방법과 비교할 것이다. 이를 통해, Lobachevskii의 '기하학'과 Hadamard의 '초등기하학'에서 삼각형의 합동의 취급에 관련된 지식을 알 수 있으며, 우리나라 수학교과서에 제시된 직각삼각형의 합동조건의 증명에 대한 다양한 논의가 가능할 것으로 기대된다.

1. Lobachevskii의 '기하학'에 제시된 삼각형 합동의 정리들

Lobachevskii는 1792년에 러시아의 가난한 관리의 집안에서 태어났으며, 1807~1811년에 카잔대학을 졸업하여, 1814년에 카잔대학의 조교수, 1822년에 정교수가 되었다. 1827~1846년에는 카잔대학의 학장이었고, 1856년에 세상을 떠났다.

기하학 분야에 관련된 Lobachevskii의 저술로는 '기하학의 시작에 대해(1829-1830)', '상상의 기하학(1835)', '몇몇 적분에 상상의 기하학의 활용(1836)', '평행선들의 완전한 이론에 대한 기하학의 새로운 시작(1835-1838)', '평행선 이론에 대한 기하학적 연구(1840)', '범기하학(1855)', '기하학(1909)' 등이 있다.

'기하학'은 카잔 물리-수학회 출판부에서 Lobachevskii가 죽은 후인 1909년에 출판하였다. 그러나, '기하학'은 Lobachevskii가 비유클리드 기하학을 발명하기 이전인 1823년에 완성하여, 출판을 위해 원고를 카잔대학에 제출하였었다. 카잔대학에서는 '기하학'의 출판 여부를 결정하기 위해, 학술원 회원인 Fuss에게 심사를 의뢰하였다. Fuss는 '기하학'에 대해, 부정적인 평가 의견을 냈다. Fuss의 평가 의견의 일부는 다음과 같다([8, p.112-113]).

...이 저술은 기하학이 아니며, 완전하고 체계적으로 학문의 전반이 기술되어 있지 않다. 만약, 저자가 이 저술을 학습용 도서라고 생각한다면, 이것은 저자가 학습용 도서의 요건들, 즉 기하학적 진리의 완전함, 학문의 시작단계의 체계성, 수학적인 방법,

모든 개념에 대한 정확하고 명료한 정의의 필요성, 대상들의 논리적인 순서와 방법론적인 배열, 기하학적 진리들의 적당한 점진성, 증명의 기하학적 엄밀성 등에 대한 정확한 개념이 없다는 것을 증명하는 것이다. ...결국, 학습용 도서로서 이 책은 어디서도 채택되지 못할 것이며, 이 책을 카잔대학의 비용으로 출판하는 것에 대해 나는 절대 추천할 수 없습니다.

Fuss의 평가 의견에 근거하여, 카잔대학에서는 Lobachevskii에게 원고의 일부를 수정할 것을 권유했으나, Lobachevskii는 평가 의견의 내용을 보고 크게 상심하여 원고를 대학으로부터 돌려 받지도 않았다. 결국, Lobachevskii의 원고는 사라졌고, 1898년 초에 Zagoskin이 카잔대학의 고문서 보관소에서 원고를 찾았다. 그리고 카잔 물리-수학회 출판부에서 1909년에 Lobachevskii의 '기하학'을 출판하였다.

'기하학'은 13장으로 구성되어 있는데, 1장에서 5장까지는 선들의 측정, 각들에 대해, 수선들에 대해, 입체각들의 측정, 정다각형들과 입체들에 대해, 삼각형의 합동 등의 주제를 다루었다. 6장에서 9장까지는 직사각형들의 측정에 대해, 삼각형들과 다른 도형들의 측정에 대해, 평행사변형들에 대해, 각기둥들의 측정 등의 주제를 다루었다. 한편, 10장에서 13장까지는 각뿔들의 측정 및 평면들에 의해 경계 지워진 입체들의 측정, 원주와 원의 넓이의 측정, 원뿔과 원기중의 부피 측정, 직원기둥과 직원뿔의 겉넓이 측정, 구의 부피와 겉넓이 등의 주제를 다루었는데, 여기서는 계산과정에 극한의 방법이 사용되었다.

'기하학'에 기술된 내용을 분석해 보면, 기하학은 중등학생을 위한 체계적인 기하학 교재가 아니라, 카잔대학에서 대학생들에게 강의했던 내용을 정리한 것임을 알 수 있다. 예를 들어, '앞 강의에서, 우리는 직사각형의 넓이가 수직인 두 변의 곱과 같음을 알았다...'([10, p.61]) 또는 '나의 수강자들은 이 모든 내용들을 오래 전부터 알고 있을 것이므로, 더 이상 상세히 설명하지 않을 것이다'([10, p.63]) 등과 같은 내용이 기술되어 있다.

'기하학'에서는 직각삼각형의 합동에 대한 정리를 다루어지지 않았으며, 다음과 같은 5가지 경우에 대한 삼각형의 합동이 증명되어 있다(Lobachevskii는 정리라는 명칭과 번호를 붙이지 않았으며, 본 연구에서 편의상 붙인 것임).

정리 1. 두 삼각형에서 한 변, 이 변에 놓인 두 각이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 2. 두 삼각형에서 한 변이 같고, 이 변의 대각과 다른 한 각이 각각 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 3. 두 삼각형에서 두 변, 이들 변의 끼인각이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 4. 두 삼각형에서 두 변이 같고, 이 변들 중의 큰 변의 대각이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 5. 두 삼각형에서 세 변이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 1은 ASA 합동(한 변과 양 끝각이 같은 경우), 정리 3은 SAS 합동(두 변과 끼인각이 같은 경우), 정리 5는 SSS 합동(세 변이 같은 경우)이며, 우리나라의 수학교과서에서는 이 세 가지 합동이 다루어진다. 한편, 정리 2와 정리 4는 우리나라의 수학교과서에서는 다루지 않는다.

박한식([2, p.40])은 정리 2를 AAS 합동이라 규정하고, '삼각형의 세 각의 합이 2∠R이므로, 두 각의 크기만 각각 같으면 나머지 각의 크기는 자연히 같게 되므로, ASA의 경우와 같게 되어서 합동이 된다. 그런데, 이것을 삼각형의 내각의 합이 2∠R이라는 정리를 이용하지 않으면 어떻게 될까'라고 하면서, 이 정리를 이용하지 않는 AAS 합동에 대한 증명을 소개하였다. 한편, 정리 2는 직각삼각형의 RHA 합동(빗변과 한 예각이 같은 경우)과도 관련시켜 생각할 수 있다. 정리 2에서 두 삼각형을 두 직각삼각형으로, 같은 한 변을 같은 빗변으로 바꾸면, 직각삼각형들에 대한 RHA 합동이 얻어진다. 결국, 정리 2는 RHA 합동의 일반화라 할 수 있다.

정리 4는 직각삼각형들에 대한 RHS 합동(빗변과 한 변이 같은 경우)의 일반화가 된다. 정리 4에서 두 삼각형을 두 직각삼각형으로, 같은 두 변들 중에서 큰 변을 직각삼각형의 빗변으로 바꾸면, 직각삼각형들에 대한 RHS 합동이 얻어진다.

2. Hadamard의 '초등기하학'에 제시된 삼각형 합동의 정리들

Hadamard는 1865년에 교사의 아들로 프랑스에서 태어났으며, 1884년에 고등사범학교(Ecole Normale Supérieure)에 입학하여 1892년에 Taylor 급수에 의해 정의된 함수에 대한 연구로 박사학위를 받았다. Hadamard는 정수론, 초월함수론, 미분방정식, 역학 등의 분야에서 뛰어난 연구를 수행했으며, 수학교육에 대해서도 많은 관심을 가져 '초등기하학', '수학분야에서의 발명의 심리학'을 저술하였다. Hadamard는 2차 세계대전 당시에 미국으로 이주하여 1963년에 세상을 떠났다.

Hadamard의 '초등기하학'은 1부와 2부로 나뉘며, 전체 8권으로 구성되었다. 1부는 평면기하학으로 1898년에 발행되었고, 2부는 공간기하학으로 1901년에 발행되었다. Hadamard의 '초등기하학'은 출판되자마자 대중적인 명성을 얻었으며, 프랑스의 기하교육에 커다란 영향을 끼쳤다.

평면기하학은 4권으로 구성되며, 제 1권에서는 직선에 관련하여 각, 삼각형, 수선과 경사선, 직각삼각형의 합동조건, 각의 이등분선의 성질, 평행한 직선들, 평행사변형 등의 주제를 다루며, 제 2권에서는 원에 관련하여 직선과 원의 교차, 지름과 현, 두 원의 교차, 원주각의 성질, 작도, 도형의 이동 등의 주제를 다루며, 제 3권에서는 닮음에 관련하여 비례하는 선분들, 삼각형의 닮음, 삼각형에서 계량적 관계들, 원에서 비례하는 선분들, 근축, 중심닮음변환, 작도, 정다각형 등의 주제를 다루며, 제 4권에서는 넓이에 관련하여 넓이의 측정, 넓이의 비교, 원의 넓이, 작도 등의 주제를 다룬다.

공간기하학은 5~8권으로 구성되며, 5권에서는 평면과 직선에 관련하여 직선들의 교차, 평면들의 교차, 평행한 직선들, 평행한 평면들, 서로 직교하는 직선과 평면, 이면각, 직교하는 평면들, 직선의 사영, 두 직선사이의 최단 거리, 구면기하학의 기초, 다면각 등의 주제를 다루며, 제 6권에서는 다면체에 관련하여 각기둥의 부피, 각뿔의 부피 등의 주제를 다루며, 제 7권에서는 이동, 대칭, 닮음에 관련된 주제들을 다루며, 제 8권에서는 원기둥, 원뿔, 원뿔대, 구, 구의 표면과 부피에 관련된 주제들을 다룬다.

Hadamard의 '초등기하학'에서 삼각형의 합동에 관련된 내용은 평면기하학의 제 1권 2장에 삼각형의 합동조건, 4장에 직각삼각형의 합동조건에 기술되어 있다. Hadamard의 '초등기하학'에는 다음과 같은 삼각형의 합동조건들이 기술되어 있다(Hadamard는 정리라는 명칭과 번호를 붙이지 않았고, 본 연구에서 편의상 붙인 것임).

정리 6. 첫 번째 합동조건. 두 삼각형에서 한 변, 이 변에 놓인 두 각이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 7. 두 번째 합동조건. 두 삼각형에서 두 변, 이들 변의 끼인각이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

정리 8. 세 번째 합동조건. 두 삼각형에서 세 변이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

Hadamard는 ASA 합동을 첫 번째 합동조건으로 삼았고, SAS 합동을 두 번째 합동조건으로 했으며, SSS 합동을 세 번째 합동조건으로 했다. 반면에, 우리나라의 수학교과서를 보면, SSS 합동, SAS 합동, ASA 합동의 순서로 기술되어 있다.

Hadamard의 '초등기하학'에 기술된 직각삼각형의 합동조건은 다음과 같다(정리라는 명칭과 번호는 본 연구에서 편의상 붙인 것임).

정리 9. 첫 번째 합동조건. 두 직각삼각형에서 빗변, 한 예각이 같으면, 두 직각삼각형은 합동이다.

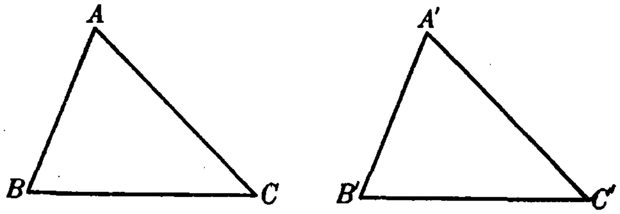
정리 10. 두 번째 합동조건. 두 삼각형에서 빗변, 다른 한 변이 같으면, 두 삼각형은 합동이다.

살펴본 직각삼각형의 합동조건 제시 순서는 우리나라의 수학교과서와 동일하다. 특히, Lobachevskii의 '기하학'과 Hadamard의 '초등기하학'에 기술된 삼각형 합동에 대한 정리들을 우리나라의 수학교과서와 비교하면, Hadamard의 '초등기하학'에 기술된 내용이 우리나라의 수학교과서와 일치한다는 것을 알 수 있다. 그리고 우리나라의 수학교과서와 Hadamard의 '초등기하학'은 삼각형의 합동조건을 다룬 후에, 직각삼각형의 합동조건을 다룬다는 점도 일치한다.

3. Lobachevskii와 Hadamard가 제시한 삼각형의 합동 증명

1) ASA 합동의 증명

Lobachevskii의 방법([10, p.52]). △ABC와 △A′B′C′에서(그림 1) BC=B′C′, ∠B=∠B′, ∠C=∠C′이면, 변 BC를 변 B′C′에 놓으면, 각들의 상등에 의해 AB는 A′B′를 따라가야 하고, AC는 A′C′를 따라가야 하며, 결국 한 점에서 모이게 된다.



<그림 1>

Hadamard의 방법([6, p.38]). 두 삼각형 ABC와 A′B′C′이 주어졌고(그림 1), BC=B′C′, ∠B=∠B′, ∠C=∠C′이라 하자. 각 B′을 같은 각 B위에, 변 B′A′이 BA의 방향이 되도록, 변 B′C′이 BC의 방향이 되도록 포개놓자. B′C′=BC이므로, 점 C′은 C와 일치한다. 그리고 각 C′은 각 C와 같으므로, 변 C′A′은 CA의 방향을 가진다. 이로부터, 직선 B′A′과 C′A′의 교점인 점 A′은 직선 BA와 CA의 교점인 점 A와 일치해야 한다. 이와 같이, 삼각형들의 일치가 증명된다.

Lobachevskii와 Hadamard는 변들 또는 각들의 상등을 바탕으로, 삼각형 ABC와 A′B′C′을 포개놓고, 나머지 꼭지점이 일치함을 주장하는 방법으로 두 삼각형의 합동을 증명하였다. 이때, Lobachevskii는 변 BC를 같은 변인 B′C′에 놓아 두 삼각형 ABC와 A′B′C′을 포개었고, Hadamard는 같은 각 B와 B′을 겹쳐놓아 두 삼각형을 포개었다. ASA 합동이 증명된 다른 수학교과서들을 분석하면, 어떤 교과서([13])는 Lobachevskii와 같은 접근을 취했고, 다른 교과서([12])는 Hadamard와 같은 접근을 취했다.

한편, Lobachevskii와 Hadamard가 삼각형의 합동 증명에 사용한 포갬의 방법에 관련하여서는 많은 논의가 있다. 예를 들어, Greenberg([5, p.60])는 두 삼각형의 합동을 '두 삼각형의 꼭지점들 사이에 일대일 대응이 존재해서 그 대응변들과 대응각이 모두 합동이 되면 두 삼각형을 합동'이라고 정의하면서, 포갬에 의한 삼각형 합동의 정의를 피하였다. 포갬의 방법에 관련하여 Greenberg([5, p.63])는 '...이것이 기하학을 배우는 초보자들로 하여금 SAS를 쉽게 받아들이도록 하는 좋은 방법이긴 하지만 그것은 증

명이 아니다. ...Euclid가 어떤 그림을 그들의 모양과 크기를 바꾸지 않고 그대로 옮겨 놓을 수 있다는 공리를 결코 서술한 적이 없으므로 그것은 증명이 될 수 없다'고 주장하면서, 비판적인 입장을 취하였다. 후에 Pogorelov([11, p.15])의 중등학교 기하교과서에서는 '임의의 삼각형에 대해, 주어진 반직선과 반평면에 주어진 삼각형과 합동인 삼각형이 존재한다'는 공리를 사용하여, 두 삼각형의 포갬에 따른 옮김의 문제를 해결하였다.

2) SAS 합동의 증명

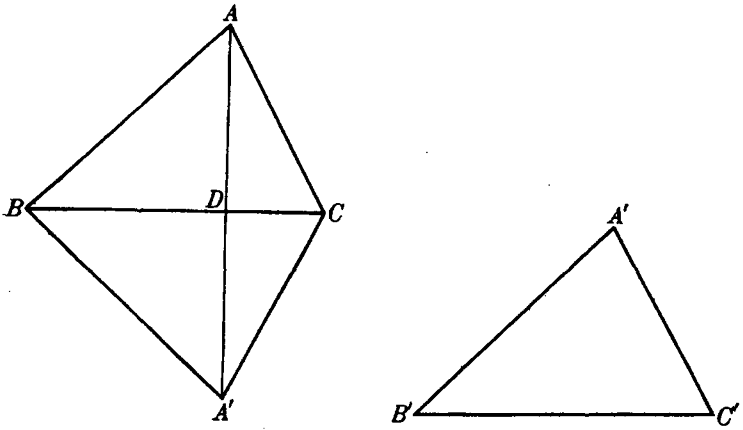
Lobachevskii의 방법([10, p.53-54]). △ABC와 △A′B′C′에서(그림 1) AB=A′B′, AC=A′C′, ∠A=∠A′이면, 같은 변들 중의 하나를 다른 변에 놓으면, 예를 들어 AB를 A′B′에 놓으면, 다른 변 AC는 각 A와 A′의 상등에 의해 A′C′에 놓이게 된다. 이와 같이, 한 삼각형이 다른 삼각형을 덮는다.

Hadamard의 방법([6, p.38-39]). 두 삼각형 ABC와 A′B′C′이 주어졌고(그림 1), ∠A=∠A′ AB=A′B′, AC=A′C′이라 하자. 각 A′을 같은 각 A에, 변 A′B′이 AB의 방향이 되도록, 변 A′C′이 AC의 방향이 되도록 포개놓자. A′B′=AB이므로, 점 B′은 B와 일치하고, 점 C′은 점 C와 일치한다. 그러므로, 변 B′C′은 변 BC와 일치하고, 삼각형의 일치가 완전히 증명된다.

Lobachevskii의 증명에서는 증명이 완전한 형태로 기술되지 않았으며, 증명의 방향만 개괄적인 형태로 제시되어 있다. 특히, Lobachevskii는 삼각형 ABC가 삼각형 A′B′C′을 덮는다고 기술하면서 증명을 끝냈다. 논리적으로 종결된 완전한 기술이 되려면, 삼각형 A′B′C′이 삼각형 ABC를 덮는다는 것도 함께 기술되어야 할 것이다. 물론, 이 결론은 Lobachevskii의 증명으로부터 쉽게 유도될 수 있다. 반면에, Hadamard는 증명에서 두 삼각형이 일치함을 명료하게 기술하였다.

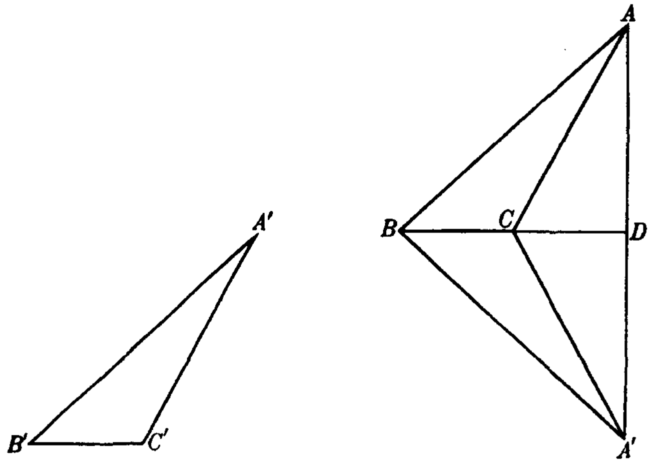
3) SSS 합동의 증명

Lobachevskii의 방법([10, p.55]). △ABC와 △A′B′C′에서(그림 2) AB=A′B′, AC=A′C′, BC=B′C′이라 하자. △A′B′C′을 ABC에, 변 BC가 공통이고 같은 변들이 점 B, C에서 모이도록, 옆에 붙이자. A와 A′을 직선으로 연결하자. 두 이등변삼각형 ABA′과 ACA′이 생기며, 이때 ∠BAA′=∠BA′A, ∠CAA′=∠CA′A이다. 만약 직선 AA′과 BC의 교점 D가 B와 C사이에 있게 되면, ∠BAA′+∠CAA′=∠A, ∠BA′A+∠CA′A=∠A이고, 결국 ∠A=∠A′이다.



<그림 2>

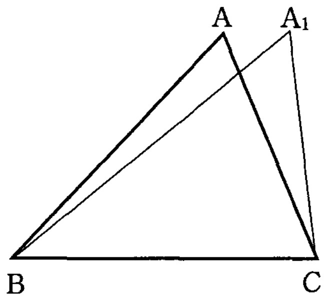
만약 점 D가 △ABC와 △A′B′C′의 밖에 있게 되면(그림 3), 각 BAA′과 CAA′의 차는 ∠A가 되며, 각 BA′A와 CA′A의 차는 각 A′이 된다. 이로부터 ∠A=∠A′이 유도된다. △ABC와 △A′B′C′에서 각 A와 A′이 같으면, 이들 삼각형은 두 변과 끼인각이 같게 되므로 합동이 된다.



<그림 3>

Hadamard의 방법([6, p.39]). 두 삼각형 ABC와 A′B′C′이 주어졌고, 대응하는 변들이 서로 같다고 하자. 변 B′C′이 같은 변 BC에 일치하고 두 삼각형이 변 BC의 같은 쪽에 놓이도록 두 번째 삼각형을 놓자. 삼각형 B′C′A′의 새로운 위치를 BCA1이라

하자. 이제, 점 A1이 점 A와 일치한다는 것을 보이자. 만약 직선 B'A'이 BA의 방향을 가지거나 또는 직선 C'A'이 CA의 방향을 가지면, 증명하려는 것이 자명해진다. 만약 그렇지 않다면, 우리는 두 이등변삼각형 BAA1과 CAA1을 가지게 되며(그림 4), 선분 AA1의 수직이등분선이 점 B와 C를 지나야 한다. 다시 말하면, 직선 BC와 일치해야 한다. 점 A와 A1이 BC의 같은쪽에 놓여있으므로 BC는 선분 AA1의 중점을 지날 수 없으므로, 이것은 불가능하다. 이와 같이 점 A와 A1은 서로 다를 수 없으며, 두 삼각형은 서로 일치한다.



<그림 4>

SSS 합동의 증명에서 Lobachevskii와 Hadamard는 다른 접근 방법을 취하고 있다. Lobachevskii는 삼각형 ABC의 아래쪽에, 즉 변 BC에 대해 꼭지점 A와 다른쪽에 삼각형 A'B'C'을 작도하였고, Hadamard는 변 BC에 대해 꼭지점 A와 같은쪽에 삼각형 A1BC를 작도하였다.

Lobachevskii와 같은 방법으로 SSS 합동을 증명하면서, Kiselev[1]([9, p.23])는 '앞의 두 합동조건에 대해 했던 것과 같이 포갬에 의해 이 합동조건을 증명하는 것은 용이하지 않다. 각들의 크기에 대해서 아무 것도 모르기 때문에, 우리는 같은 변이 일치할 때에 나머지 변들이 일치하는가에 대해 논의할 수 없다. 포갬 대신에 옆에 놓은 방법을 사용하자'고 하였다. 즉, ASA 합동이나 SAS 합동에서는 같은 각들이 주어지므로 이를 바탕으로 선분의 포갬을 유도할 수 있지만, SSS 합동에서는 각들이 같지 않으므로 나머지 선분들의 포갬에 대해 어떤 결론도 얻지 못한다. 결국, Lobachevskii와 Kiselev는 <그림 4>와 같은 방법으로 두 삼각형을 포개지 않고, <그림 2>, <그림 3>과 같이 변 BC에 대해 꼭지점 A의 다른쪽에 꼭지점 A'이 놓이도록 A'B'C'을 옆에(또는 아래에) 놓고, 증명을 전개하였다.

Lobachevskii와 Kiselev의 이러한 문제해결은 수학사에서 흔히 찾아볼 수 있는 자

1) Kiselev(1852-1940)는 러시아의 수학교육학자로, 1892년에 중등학생용의 기하학 교과서를 출판했는데, 이 교과서는 내용과 진술방법에 있어 대중적인 호응을 크게 얻어 1956년까지 기하학 교과서로 사용되었다. 인용한 문장은 1931년 인쇄된 제 12판을 1996년에 그대로 재발행한 책에서 가져왔다.

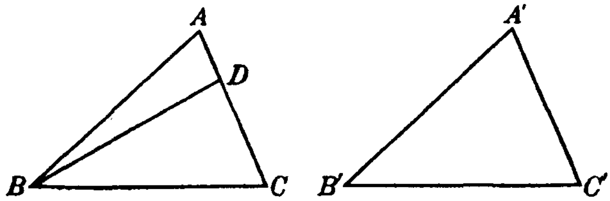
연스러운 탐구방향의 전환이라 할 수 있다. 이제, Lobachevskii와 Kiselev의 증명에 대한 질적인 측면을 분석하자. Fursenko([4])에 의하면, Lobachevskii와 Kiselev의 SSS 합동 증명 방법에 대해 많은 교사들이 지도의 어려움을 호소하였는데, 그 주된 원인은 첫째, 두 삼각형의 합동을 세 번째 삼각형을 이용하여 증명한다. 즉, 삼각형의 합동과 각들의 합동이 추이율에 근거하며, 둘째 이 방법은 삼각형이 속하지 않는 반평면으로 삼각형의 회전시키는 것에 관련된다. 그러면서 Fursenko([4])는 회전에 관련되지 않으며, 세 번째 삼각형의 작도가 필요없는 증명으로 Hadamard가 제시한 것과 유사한 방법을 소개하였다. 현재 많은 기하학 교과서([11], [12], [13])에서는 SSS 합동의 증명에서 Hadamard의 증명과 유사한 방법들이 기술되어 있다.

SSS 합동에 대해 Lobachevskii와 Hadamard가 제시한 두 가지 방법과 현행 기하학 교과서들에 제시된 증명 방법에 관련하여, 수학사 발전의 방향에 관련된 작은 결론을 얻을 수 있다. 즉, 문제가 제기되면 문제해결을 위한 방법을 찾고(Lobachevskii의 증명 방법), 얻어진 해결 방법에 대한 비판적 고찰이 따르며, 발명된 해법에 대해 다시 제기된 문제를 해결하며 좀더 경제적인 해법의 탐색이 진행된다(Hadamard의 방법).

4) AAS 합동

AAS 합동은 두 삼각형에서 한 변이 같고, 이 변의 대각과 다른 한 각이 각각 같으면, 두 삼각형은 합동이라는 것이다. 이 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서만 다루며, Hadamard의 '초등기하학'에서는 제시되어 있지 않다. 구체적인 증명 방법은 다음과 같다([10, p.53]).

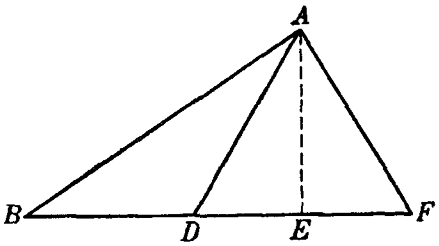
$\triangle ABC$와 $\triangle A'B'C'$에서(그림 5) $BC=B'C'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle A=\angle A'$이라 하자. 이때, 이들 삼각형이 합동이 되지 않으려면, 한 삼각형을 다른 삼각형의 같은 변에 포개었을 때에 $\triangle ABD$가 밖으로 나가야 하며, 이때 각 BAD와 BDA의 합은 200°[2]를 이룬다.



<그림 5>

2) Lobachevskii는 각의 측정에서 평각을 200°로, 직각을 100°로 정의하였다.

그런데, △ABD에서(그림 6) 각 B와 D의 합이 200°이면, 각 B도 각 D도 직각이 될 수 없다. 그렇지 않으면, 이들 각은 모두 직각이 되며, 변 AB와 AD는 BD에 직교한다. 만약, 예를 들어 각 B가 예각이면, D는 둔각이 되며, BD에 대한 수선 AE는 △ABD의 밖에 변 BD에 그어져야 한다. DE=EF인 AF를 그으면, 합동인 두 삼각형 AED, AEF를 얻게 되며, ∠ADE=∠AFD가 된다. 그리고 ∠ADF=∠B이므로, AB=AF이고, 점 E는 BF의 중점이 되는데, 이것은 그렇지 못하다.



<그림 6>

Lobachevskii의 증명에서는 귀류법을 사용하고 있으며, 다음 두 단계로 나눌 수 있다.

1단계. 귀류법의 가정에 의해, 두 삼각형이 합동이 아니면 포갬에 의해 삼각형 ABD가 생기며, 각 BAD와 BDA의 합은 200°가 된다(그림 5).

2단계. 두 각의 합이 200°가 될 수 없음을 두 각이 모두 직각인 경우, 한 각은 예각이고 다른 각은 둔각인 경우에 대해 증명한다(그림 6).

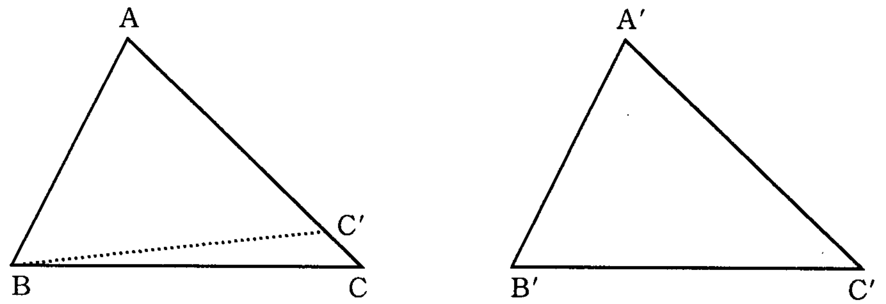
Lobachevskii의 증명에서 한 가지 지적할 것은 <그림 5>와 <그림 6>의 표기방법이 일치하지 않는다는 점이다. <그림 5>에서는 각 A와 D의 합이 200°였지만, <그림 6>에서는 각 B와 D의 합이 200°가 된다. 즉, <그림 5>와 <그림 6>에서 점 A, B의 표기가 서로 바뀌었다.

한편, Hilbert([7])는 AAS 합동을 '삼각형의 외각은 인접하지 않는 내각들 각각보다 크다'는 사실을 이용하여 쉽게 유도할 수 있음을 지적하였다. 실제로, 삼각형의 외각의 성질을 이용하여 AAS 합동의 증명과정을 구성하면, 다음과 같다.

삼각형 ABC와 A′B′C′에서 AB=A′B′, ∠A=∠A′, ∠C=∠C′이라 하자. 변 AB와 A′B′이 일치하도록 삼각형 A′B′C′을 삼각형 ABC에 포개어 놓자(그림 7). 각 A와 A′이 같으므로, 반직선 AC와 A′C′은 일치한다.

이제, 귀류법으로 C와 C′이 일치하지 않는다고 가정하자. 그러면, C′은 AC의 사이에 또는 AC의 연장선에 속하게 된다. C′이 AC의 사이에 속하는 경우를 살펴보자. 이때, 삼각형 C′BC가 생기며, 각 AC′B는 삼각형 C′BC의 외각이 된다. 외각의 성질에 의해, ∠AC′B>∠ACB가 유도된다. 그런데, 이것은 ∠C=∠C′에 모순된다. 한편, C′이

AC의 연장선에 속하는 경우도, 같은 방법으로 증명된다.



<그림 7>

AAS 합동에 대한 Lobachevskii의 증명은 Hilbert가 제시한 증명의 방향보다는 간결하지 않다. 그 원인을 찾는다면, Lobachevskii의 '기하학'에서는 기하학의 학문 체계에 대한 논리적인 구성을 시도한 것이 아니라, 기하학의 다양한 주제들에 대한 강의를 정리하였다는 것에 관련하여 생각할 수 있을 것이다. 실제로, Hilbert의 기하학 기초론에서는 삼각형의 외각의 성질에 대해 다루고 있지만, Lobachevskii의 '기하학'에서는 다루고 않았다. 결국, Lobachevskii는 삼각형의 외각의 성질을 이용하지 않고, 직교, 삼각형의 합동, 이등변삼각형 등을 이용하여 AAS 합동을 증명하였다.

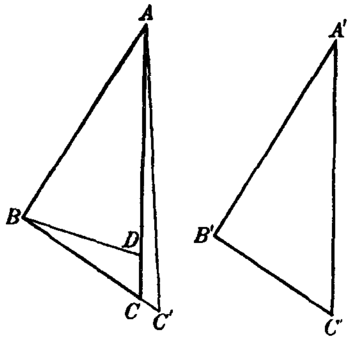
5) 두 변과 큰 변의 대각이 같은 경우

두 삼각형에서 두 변이 같고, 이 변들 중에서 큰 변의 대각이 같으면, 두 삼각형은 합동이라는 것을 살펴보자. 이 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서만 다루고 있으며, Hadamard의 '초등기하학'에서는 제시되어 있지 않다. 구체적인 증명 방법은 다음과 같다([10, p.54]).

△ABC와 △A′B′C′에서(그림 8) AB=A′B′, AC=A′C′, ∠B=∠B′이고, AC>AB라 하자. 변 A′B′이 AB에 오도록 △A′B′C′을 △ABC에 놓으면, B′C′은 BC를 따라 가며, C가 아니라 C′에서 끝난다고 하자. 그러면, 이등변삼각형 ACC′이 밖으로 나가며, 여기서 밑변 CC′에 대한 수선은 중점을 지나게 되며, 결국 밑변에서의 각들은 예각이 되고, 각 ACB, 즉 삼각형 ABC의 각 C는 둔각이 된다. 이제, AC>AB이므로, AD=BA가 되도록 하면, 점 D는 A와 C사이에 놓이며, △ABC는 이등변삼각형 ABD와 다른 삼각형 BDC로 분할된다. △ABD에서 각 ADB는 예각이고, △BDC에서 각 BDC와 BCD는 둔각이다.

이제, 만약 점 D와 C에서의 수선들을 생각하면, 이들은 △BDC의 내부를 지나며, 결국 교차하게 된다.

만약, 삼각형 A′B′C′의 점 C′이 △ABC의 내부에 있으면, 역으로 AB가 A′B′에 오도록 삼각형 ABC를 △A′B′C′에 이동시키면, 점 C는 △A′B′C′의 밖에 오게 되며, 이것은 불가능하다. 결국, 점 C는 오직 C′에만 놓이게 된다.



<그림 8>

살펴본 증명에서 Lobachevskii는 귀류법을 이용했다. 특히, 삼각형 BDC에서 각 BDC와 BCD가 둔각이라는 사실로부터 모순을 유도했다. 이를 위해, Lobachevskii는 (1) 삼각형 BDC의 꼭지점 D와 C에서의 수선들을 생각하고, (2) 각 BDC와 BCD가 둔각인데 점 B에서 교차한다는 사실로부터 이들 수선이 교차한다는 결론을 유도하여, 결국 모순을 얻었다.

AAS 합동의 증명에서와 마찬가지로, 위의 증명에서도 Lobachevskii는 삼각형의 외각의 성질을 이용하지 않았다. 만약, 삼각형의 외각의 성질을 이용하면, 다음과 같이 Lobachevskii 증명의 일부를 평이하게 변형시킬 수 있다.

각 ACB는 이등변삼각형 ACC′의 외각이므로(그림 8), 각 ACB는 $\angle ACC'$, $\angle AC'C$보다 크므로, 각 ACB는 둔각이고, 이등변삼각형의 두 밑각 ACC′, AC′C는 예각이다.

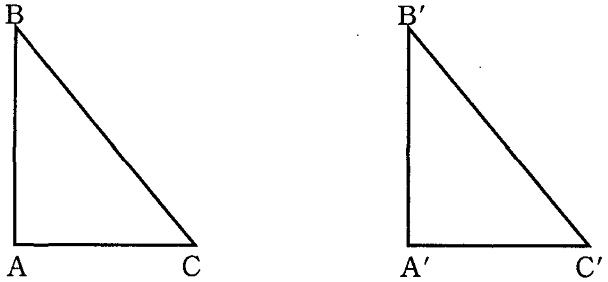
AD=BA인 점 D에 대해, 삼각형 ABD는 이등변삼각형이며, 각 ADB는 예각이 된다. 한편, 각 ADB는 삼각형 BCD의 외각이므로, $\angle DCB < \angle ADB$가 성립한다. 즉, 예각인 ADB가 둔각인 DCB보다 크므로, 모순이 유도된다.

6) RHA 합동

RHA 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서는 다루지 않으며, Hadamard의 '초등기하학'에서만 다루고 있다. 구체적인 증명 방법은 다음과 같다([6, p.47]).

두 직각삼각형 ABC, A′B′C′이 주어졌고(그림 9), BC=B′C′, $\angle B = \angle B'$이라 하자. 두 번째 삼각형을 첫 번째 삼각형에 같은 각 B와 B′이 일치하도록 포개놓자. 그러면, B′C′은 BC의 방향을 따라 가며, 이들 두 선분이 같으므로, 점 C′은 점 C로 간다. 이

때, B′A′은 BA의 방향을 따라 가며, 결국 C′A′은 점 C에서 BA에 그은 수선의 방향, 즉 CA의 방향을 따라 가야 한다.



<그림 9>

Hadamard는 RHA 합동을 포갬을 이용하여 증명하였다. 이를 위해, 삼각형 A′B′C′을 삼각형 ABC에 각 B와 B′이 일치하도록 포개어, (1) B′C′와 BC의 방향이 같고 두 선분이 같으므로 점 C′와 C이 일치하고, (2) B′A′과 BA의 방향이 같으며, (3) C′A′와 CA의 방향이 같다는 것을 보였다.

RHA 합동은 우리나라 수학교과서에서도 그 증명을 제시되어 있다. 우리나라의 수학교과서에서는 삼각형의 세 내각의 크기의 합이 180°임을 이용하여, 두 직각삼각형의 세 번째 각이 같음을 보인 후에, ASA 합동을 이용하여 증명하고 있다.

Hadamard의 증명 방법과 우리나라 수학교과서의 증명 방법의 차이는 삼각형의 세 내각의 합에 대한 정리를 언제 다루느냐에 관련된다. 우리나라의 수학교과서에서는 삼각형의 세 내각의 합에 대한 정리를 다루고 나서, 삼각형의 합동을 다루지만, Hadamard의 '초등기하학'에서는 삼각형의 합동을 배우고 나서, 평행선의 성질에 관련하여 삼각형의 세 내각의 합에 대한 정리를 다룬다.

7) RHS 합동

RHS 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서는 다루지 않으며, Hadamard의 '초등기하학'에서만 다루고 있다. 구체적인 증명 방법은 다음과 같다([6, p.48]).

두 직각삼각형 ABC, A′B′C′이 주어졌고, BC=B′C′, AB=A′B′이라 하자. 두 번째 삼각형을 첫 번째 삼각형에 같은 변 AB와 A′B′이 일치하도록 포개놓자.

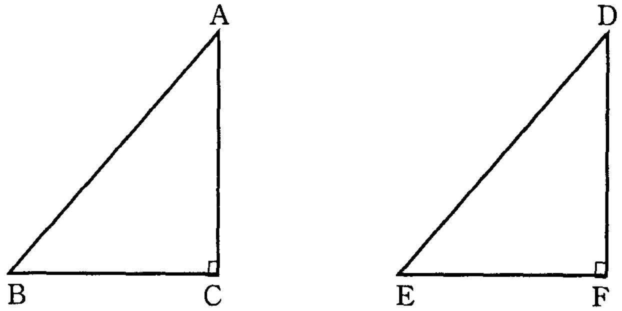
변 A′C′은 AC의 방향을 따라 간다. 이제, 우리는 점 B로부터 직선 AC에 그은 두 개의 경사선으로 BC, 변 B′C′의 새로운 위치를 가지게 되며, 이들은 조건에 의해 같다. 그러므로, 이들은 수선의 발로부터 같은 거리만큼 떨어져 있다[3]. 이와 같이,

3) Hadamard는 직각삼각형의 합동조건을 증명하기 전에, 직선 밖의 한 점으로부터 직선에

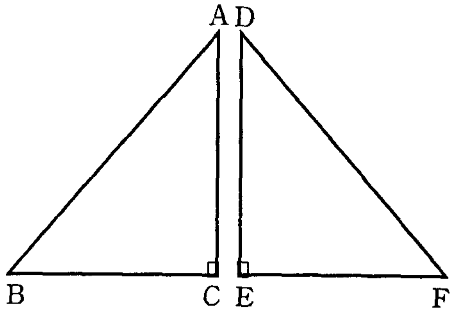
A′C′=AC이고, 이로부터 두 삼각형의 합동이 유도된다.

Hadamard는 RHA 합동을 포갬과 경사선의 성질을 이용하여 증명하였다. 반면에, 우리나라의 수학교과서에서는 한 직각삼각형을 대칭시켜 다른 직각삼각형의 옆에 붙여놓는 방법으로 증명하였다. 구체적인 방법은 다음과 같다([1]).

△ABC와 △DEF에서 ∠C=∠F=90°이고, AB=DE, AC=DF라 하자(그림 10).



<그림 11>과 같이, △DEF를 뒤집어서, 길이가 같은 변 AC와 변 DF를 겹쳐지도록 하면, ∠C=∠F=90°이므로, ∠BCE=180°가 되어 두 직선 BC와 FE는 한 직선이 된다. 이때, △ABE에서 AB=AE이므로, △ABE는 이등변삼각형이다. 따라서, ∠B=∠E가 된다. AB=AE, ∠B=∠E에서 두 직각삼각형은 빗변의 길이와 한 예각의 크기가 각각 같으므로 합동이다. 즉, △ABC≡△DEF가 성립한다.



<그림 11>

수선과 두 경사선을 긋자. 이때, 직선에 놓인 두 경사선의 발들이 수선의 발로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으면, 두 경사선은 같다는 것과 그 역을 증명하였다. 이로부터, 이 증명에서는 두 경사선의 발 C, C′, 수선의 발 A에 대해, BC=BC′이므로, AC=A′C′이 된다.

우리나라의 수학교과서에 제시된 증명 방법을 Hadamard의 방법과 비교하면, 우리나라 수학교과서의 방법이 어려운 수학적 접근들(대칭, 한 삼각형을 다른 삼각형의 옆에 붙임, 두 선분이 한 직선에 속함을 생각하기)과 정리들(이등변삼각형의 조건, 직각삼각형의 RHA 합동)을 사용하고 있음을 알 수 있다. 이러한 접근의 원인을, 우리나라 수학교과서에서는 포갬이나 경사선의 성질에 대해 체계적으로 다루고 있지 않다는 것에 관련하여 생각할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 Lobachevskii가 1823년에 집필한 '기하학'과 Hadamard가 1898년에 발행한 '초등기하학'에서 다루고 있는 삼각형의 합동에 대한 정리들을 조사하고, 이들의 증명 방법들을 분석하며, 직각삼각형의 합동조건의 증명 방법을 우리나라의 수학교과서에 제시된 증명 방법들과 비교하였다.

Lobachevskii의 '기하학'은 13장으로 구성되어 있으며, 삼각형의 합동은 5장에 제시되어 있는데, ASA 합동, AAS 합동, SAS 합동, SSS 합동, 두 변과 긴 변의 대각에 의한 합동에 대한 정리를 다루었고, 직각삼각형의 합동조건들은 다루지 않았다. Hadamard의 '초등기하학'에서 삼각형의 합동에 관련된 내용은 평면기하학의 제 1권 2장에 삼각형의 합동조건, 4장에 직각삼각형의 합동조건에 기술되어 있다. Lobachevskii의 '기하학'과 Hadamard의 '초등기하학'에 기술된 삼각형 합동에 대한 정리들을 우리나라의 수학교과서와 비교하면, Hadamard의 '초등기하학'이 우리나라의 수학교과서와 일치한다는 것을 알 수 있다.

ASA 합동과 SAS 합동의 증명에서 Lobachevskii와 Hadamard는 변들 또는 각들의 상등을 바탕으로, 두 삼각형을 포개어 합동을 증명하였다. 그러나 우리나라의 수학교과서에서는 이들 합동조건을 증명하지 않고 있다.

SSS 합동의 증명에서 Lobachevskii와 Hadamard는 다른 접근 방법을 취하고 있다. Lobachevskii는 한 삼각형의 아래쪽에 다른 삼각형을 작도하여 합동을 증명하였고, Hadamard는 두 삼각형을 포개어 합동을 증명하였다. 그런데, Lobachevskii의 증명 방법은 삼각형들의 추이성, 회전의 개념을 바탕으로 하므로, 학생들에게 어려움을 유발시켰다. 결국, 현재의 수학교과서들에서는 Hadamard의 방법으로 SSS 합동을 기술하고 있다. 이러한 증명 방법의 개선은 수학사 발전의 일반적인 방향과 일치한다고 할 수 있다.

AAS 합동, 두 변과 긴 변의 대각이 같은 경우의 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서만 다루며, Hadamard의 '초등기하학'과 우리나라 수학교과서에서는 다루지 않는다. Lobachevskii는 이들 합동을 귀류법, 수선, 이등변삼각형의 성질을 이용하여 증명하였는데, 본 연구에서는 삼각형의 외각의 성질을 이용하여 이들 합동을 간결하게 증명하

였다.

RHA 합동과 RHS 합동은 Lobachevskii의 '기하학'에서는 다루지 않으며, Hadamard의 '초등기하학'과 우리나라 수학교과서에서 다루고 있다. Hadamard는 이들 합동을 포갬을 이용하여 증명하였지만, 우리나라의 수학교과서에서는 RHA 합동은 삼각형의 내각의 합에 대한 정리를 이용하여 증명하였고, RHS 합동은 대칭, 한 삼각형을 다른 삼각형의 옆에 붙임, 두 선분이 한 직선에 속함을 생각하기, 이등변삼각형, 직각삼각형의 RHA 합동 등과 같은 많은 수학적 개념들을 이용하여 증명하였다. 특히, 우리나라의 수학교과서에서 RHS의 합동은 Hadamard의 방법보다 훨씬 복잡하고 어렵게 증명되었음을 확인하였다.

참고 문헌

1. 금종해, 이만근, 이미라, 김영주, 수학 8-나, (주)고려출판, 2002.
2. 박한식, AAS에 의한 삼각형의 합동, 수학교육 4(1966) №2, 40-42.
3. 한인기, 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 삼각형의 합동에 관련된 학습내용의 비교 연구, 한국학교수학회논문집 8(2005) №2, 90-100.
4. Fursenko V., *O Tretem Priznake Ravenstva Theurolikov*, Matematika v Shkole, 6(1936), 82-84.
5. Greenberg M.J./이우영 역, Euclid기하학과 비Euclid기하학, 경문사, 1996.
6. Hadamard J.S., *Elementarnaya Geometriya*, GUPI, 1948.
7. Hilbert D., *Foundations of Geometry*, Open Court Publishing Company, 1971.
8. Kagan V.F., *Lobachevskii*, IAN, 1948.
9. Kiselev A.P., *Elementarnaya Geometriya*, Prosveshenie, 1996.
10. Lobachevskii N.I., *Tri Sochineniya po Geometrii*, GITTL, 1956.
11. Pogorelov A.V., *Geometriya 7-11*, Hardford, 1996.
12. Rudenko V.N., *Bahurin G.A.*, Geometriya 7-9, Prosveshenie, 1994.
13. Sharygin I.F., *Geometriya 7-9*, Drofa, 1997.

A Study on the Theorems Related with Congruence of Triangles in Lobachevskii's and Hadamard's Geometry Textbooks

Gyeongsang National University **In Ki Han**

This paper is to study theorems related with congruence of triangles in Lobachevskii's and Hadamard's geometry textbooks, and to compare their proof methods. We find out that Lobachevskii's geometry textbook contains 5 theorems of triangles' congruence, but doesn't explain congruence of right triangles. In Hadamard's geometry textbook description system of the theorems of triangles' congruence is similar with our mathematics textbook. Hadamard's geometry textbook treat 3 theorems of triangles' congruence, and 2 theorems of right triangles' congruence. But in Hadamard's geometry textbook all theorems are proved.

Key words: Lobachevskii, Hadamard, congruence of triangles, congruence of right triangles

2000 Mathematics Subject Classification: 97U20

ZDM Classification: A34

논문 접수 : 2007년 4월 심사 완료 : 2007년 5월