한국수학사학회지 제21권 제2호(2007년 5월), 89-108

# 초등수학에서 소수 곱셈의 지도에 관한 소고

한국교육과정평가원 **변희현**
bhhmath@kice.re.kr

많은 학생들에게 소수의 곱셈은 의미있게 학습, 지도되지 못한다. 이와 관련하여, 이 글에서는 Dewey, Vergnaud, Brousseau의 관점에서 소수 곱셈의 본질은 비와 비례관계의 인식에 있음을 드러내었다. 이를 토대로 한국과 일본 교과서에서 소수 곱셈을 다루는 방식을 비교하고 그 특징을 살펴본 후, 우리나라 교과서에서 소수 곱셈을 보다 의미있게 전개하기 위한 제언을 하였다.

주제어 : 소수 곱셈, 비, 비례관계

## Ⅰ. 들어가며

소수의 사칙계산은 소수점 처리에만 유의하면 자연수의 계산 방법과 유사하여 학생들은 이를 크게 어려워하지 않는다. 그러나, 계산의 발생 맥락이나 그 의미에 관해서는 제한적인 이해를 나타내는데, 특히 곱셈과 나눗셈의 경우가 그러하다. 이는 선행하는 자연수 범위의 곱셈, 나눗셈의 의미가 소수 범위의 계산에도 자연스럽게 확장, 적용되지 못하기 때문일 것이다. 예를 들어, 자연수 범위에서는 동수누가로 곱셈의 의미를 주로 다루었다면, 일반적으로 소수의 곱셈은 동수누가로 설명하기 어렵다. 또한, 자연수 범위에서 곱셈은 수를 크게 하고 나눗셈은 수를 작게 하였으나, 소수 범위에서는 1보다 작은 수를 곱하면 수가 작아지고, 1보다 작은 수로 나누면 수가 커진다.

이는 어느 특정한 대상에 국한된 문제는 아닌 것으로, 많은 연구들([6], [10], [11], [12] 등)은 곱셈과 나눗셈의 경우 자연수의 범위에서 분수 또는 소수의 범위로 확장될 때 그 의미에 변화가 생기며 동시에 이는 어려운 것임을 드러내었다. Hiebert는 소수 곱셈과 관련하여 미국에서 많이 사용되는 두 종류 교과서를 분석한 결과[1], 두 교과서 모두 소수 곱셈의 의미에 대한 충분한 정보를 주지 않은 채 바로 적절한 절차적 지식을 얻는 것에 초점이 모아지고 있음을 밝히었다. 그러나, 정작 소수 곱셈의 의미가 무

1) 한 교과서는 자연수와 소수의 곱에 대한 해석으로 동수누가를 사용하고 소수들의 곱셈을 보이기 위해 상하, 좌우로 분할된 단위 정사각형의 넓이 모델을 이용하나 충분히 그 의미를 발달시키기 보다는 곧 절차적 지식을 얻는 것에 초점이 놓이는 것으로 보았다. 또 다른 교과서는 소수 곱셈의 의미에 대한 문제를 전혀 다루지 않은 채 자연수의 곱셈 형식을 처음부터 들여와 절차를 발달시키는 쪽에 주의를 기울이고 있다고 밝힌다([13, p.310]).

엇인지는 명확하게 언급하지 않았다.

또한, Brousseau는 소수를 주로 자를 이용한 길이의 측정이나 눈금저울을 사용한 무게의 측정 맥락에서 측정단위 변환과 관련지어 정의할 때 소수 곱셈에서 발생할 수 있는 문제점을 다음과 같이 분석하였다. 소수를 측정단위 변환에 부속시키는 행위는 아동에게 자연수 n과 단위의 변환인 $10^p$에 의한 나눗셈 및 단위 u로 이루어진 세 순서쌍 (n, p, u)를 고려하게 하여, 3.25m를 미터 단위로 표현된 325㎝로 생각하게 한다[2]. 그렇게 되면 소수는 단위를 수반한 양의 표현으로 여겨지면서 적절한 단위가 수반되지 않는 소수는 의미가 없는 것으로 인식되어, 3.25m×4는 의미가 있지만

$$4\text{m}\times3.25=3.25\text{m}\times4$$

$$7.25\text{m}\times4.38=7.25\times(4+0.3+0.08)=7.25\times4+7.25\times0.3+7.25\times0.084$$

와 같은 것은 의미가 없는 것으로 보게 된다. 또한, 직사각형의 넓이를 구하는 것으로 의미를 부여할 수 있는 '2.5(㎝)×3.25(㎝)' 역시 넓이의 단위를 적절히 선택한 경우에 한해서만 2.5(㎝)×3.25(㎝)=8.125(㎠)라고 쓸 수 있다. 왜냐하면, 2.5(㎝)×3.25(㎝)=812.5(㎟) 이기 때문이다. 따라서, 단위를 수반하지 않을 경우 2.5×3.25=812.5가 아니라 2.5×3.25=8.125임을 선험적으로 정당화할 수 있는 방법은 없다([7, p.123-124]).

Carpenter 등은 소수 개념과 관련된 학생들의 그릇된 이해가 소수 계산 문제에서 일어나는 오류의 원인으로 보았다([9]). 그러나, 소수의 곱셈과 나눗셈의 오류를 방지하기 위해서 소수를 개념적으로 어떻게 접근해야 하는지에 관한 구체적인 논의는 하지 않았다.

이에 본 논문에서는 현재 우리나라의 소수 곱셈 지도 상황을 살펴보고, 보완이 필요한 부분에 대한 시사점을 도출하고자 한다. 본 논문의 연구 과제는 다음과 같다[3].

첫째, 의미있는 소수 곱셈의 이해란 무엇인가를 분석한다.

둘째, 한국과 일본 교과서의 소수 곱셈 부분을 비교 분석하고자 한다. 교과서는 대부분의 교사들이 수업을 위해 주로 사용하는 자료로 이에 대한 분석은 학생들이 받는 교육에 대한 단서를 제공할 것으로 보았고, 일본 교과서와의 비교 분석은 한국 교과서의 특징을 보다 명확히 드러낼 것으로 보았기 때문이다.

셋째, 우리나라의 소수 곱셈 학습-지도와 관련하여 몇 가지 제언을 하고자 한다.

---

2) 다시 말해, 이는 길이나 무게의 측정 상황에서 단위의 변환이라는 맥락에서 소수의 의미를 다루는 하나의 예이다. 즉, 1m=100㎝ 의 관계에 따라 3.25m는 자연수로 표현된 325㎝의 다른 표현 정도로 생각하게 함을 지적하는 것이다.

3) 소수의 나눗셈은 곱셈의 역연산이 될 수 있는 점을 감안하여 본 논문에서는 논의의 범위를 소수의 곱셈으로 한정하기로 한다.

## II. 소수 곱셈의 의미 분석

자연수 범위에서 곱셈은 동수누가에 의한 이해가 지배적이다. 그러나, 소수의 곱셈은 동수누가로 이해할 수 있는 것이 매우 제한되어 있다. 이는 바꾸어 말하면, 초기의 곱셈은 덧셈에 기초할 수 있으나, 곱셈은 일반적으로 덧셈과는 구별되는 개념을 요구하는 연산임을 의미하는 것이다. 따라서, 이 장에서는 수와 연산에 관한 Dewey의 관점, 곱셈의 개념적 구조를 밝힌 Vergnaud의 관점, 그리고 소수의 곱셈에 관한 Brousseau의 관점을 종합하여 소수 곱셈의 발생 맥락과 함께 그 의미를 살펴보고자 한다. 먼저, Dewey는 수를 모호한 양의 아이디어를 분명한 것으로 바꾸는 측정이라는 인간 활동의 소산으로 보고, 수의 연산은 측정에 내재된 본질적인 발전으로 본다. Dewey는 정확도에 따라 측정을 3단계로 구분하고, 각 단계에서 드러나는 수의 연산을 다음과 같이 언급한다.

첫 단계에는 사과의 개수를 세는 것과 같이 이산량을 세거나 보폭이나 손의 한 뼘을 이용하여 길이를 측정하는 것이 해당된다. 정확하게 정의되지 않은 단위를 사용하여 측정하는 단계로, '더 많음 혹은 더 적음'의 관점에서 상대적인 가치에 대한 아이디어를 얻고, 이는 산술적으로 덧셈과 뺄셈을 제공한다. 그러나, 한 양이 다른 양의 *몇 배 혹은 몇 분의 일인지에 대한 비 관념이 의식적으로 사용되지는* 않는다. 한 예로, 사과 한 개의 양이 정확히 규정되지 않았기 때문에 (사과 1개)×4=(사과 4개)와 같이 배 관념의 아이디어를 사용하지는 않는다.

둘째 단계는 균일하며 동일한 양으로 정확하게 정의된 단위를 사용하여 측정하는 단계로, 여기서는 단순히 한 양이 다른 것보다 많다, 적다를 아는 것이 아니라 하나가 다른 것의 몇 배 또는 몇 분의 일인지를 안다. 이는 산술적으로 비의 원리를 바탕으로 산술적으로 곱셈과 나눗셈을 드러낸다. 예를 들어, $100은 $1500의 $\frac{1}{15}$ 임을 아는 것은 곱셈 $100=$1500× $\frac{1}{15}$ 을 드러내는 것이고, 이 안에 내재된 비의 아이디어는 덧셈과 뺄셈에 들어있는 집성(aggregation)의 관념보다 훨씬 더 실제적임을 언급하면서 다음의 예를 든다. 가령 일정한 봉급을 받고 있는 사람이 한 집의 집세가 다른 집보다 일년에 $100 더 비싸다는 것을 알 때, 봉급에 대한 $100의 비를 알 수 없다면 결정을 하는데 도움이 되지 않는다. 하지만 $100이 그의 전체 수입의 $\frac{1}{15}$ 혹은 $\frac{1}{50}$ 이라는 것을 안다면 판단을 도와줄 명확한 정보를 얻는다

마지막으로, 셋째 단계는 다른 종류의 양과 명확한 관계를 갖는 단위를 통한 측정으로, 산술적으로 비례식과 이를 포함하는 연산인 백분율, 분수의 곱셈・나눗셈을 드러낸다([14, p.93-99]).

Dewey의 관점에서, 덧셈과 곱셈은 정확성을 더해가는 측정의 발달 단계에 따라 순

차적으로 등장하는 것으로, 덧셈은 집성의 개념을, 곱셈은 비의 개념을 바탕으로 하는 것으로 구별된다. 또한, Dewey는 곱셈을 동수누가로 정의할 수는 있으나, 곱셈은 비나 배수의 개념을 의식적으로 이해하는 것을 기초로 함을 다음과 같이 언급한다.

곱셈은 단순한 세기에 함축되어 있고 덧셈에 그 기원을 가지고 있으나, 곱셈은 단순한 세기가 아닐 뿐 아니라 덧셈과 같지도 않다. $2+$2+$2+$2=$8에서 나타나는 연산은 8이 2의 4배라는 사실을 인식하지 않고도 단순한 세기의 반복을 통해 수행할 수 있다. 8이 2의 4배라는 사실은 세기의 반복에 함축되어 있고 때가 되면 이로부터 발달할 수 있으나, 그것은 좀더 나중의 일이고 복잡한 개념으로 보다 의식적인 주의가 요구된다. 합을 구하는 과정이 대상을 이용하여 좀 더 쉽게 행해질 수 있는 관련된 사물에 대한 인식이라면, 곱셈은 비, 배수, 혹은 모든 수의 추상적 요소를 실제로 사용하고 이를 다소 의식적으로 이해하기를 요구하는, 사물들의 관계에 대한 이해이다([14, p.99]).

이상의 Dewey의 관점을 종합해 볼 때, 곱셈이 덧셈에 함축되어 있긴 하나 두 연산은 결코 동일한 개념이 아닌 것이다. 즉, 곱셈은 덧셈과 달리 비와 비례의 아이디어를 의식적으로 이해하기를 요구하는 것임을 알 수 있다. 그리고, Dewey가 분류한 세 번째 단계의 측정에서 비례식을 바탕으로 분수의 곱셈과 나눗셈이 드러난다는 것은 소수의 곱셈 역시 같은 맥락에서 생각할 수 있음을 시사한다.

또한, Vergnaud는 곱셈 구조를 규명하면서 곱셈, 나눗셈, 또는 그러한 연산의 결합을 포함하는 상황은 비례관계에 의해 생성됨을 밝히고, 그 유형을 다음과 같이 분류하였다4)([16]).

- 단순 비례관계 – 측도의 동형사상
- 단순 비례관계의 결합
  - 연결
  - 승법적 결합
    - 측도의 곱
    - 다중 비례

이를 소수의 곱셈에 적용하여 해석한 변희현에 따르면, 소수의 곱셈 역시 단순 비례관계와 이들의 결합에 의해 생성되는 것으로 소수를 비례문제의 도구로 사용하지 않으면서, 소수의 곱셈에 대한 포괄적인 관점을 제공하는 것은 불가능하다. 일반적으로, 곱셈 구조는 부분적으로는 덧셈 구조이나 덧셈 측면에서 유도될 수 없는 고유한 조직을 가지며, 특별히 동수누가로 설명되지 않는 소수의 곱셈 구조는 다양한 비례관

4) 비례관계의 유형에 대한 자세한 논의는 [4](p.67-70)와 [16]에 있으므로, 본 논문에서는 이를 생략하기로 한다.

계의 인식을 토대로 점차 형식화되는 것임을 분명히 한다([4, p.67-70]).

한편, Brousseau는 소수의 곱셈과 나눗셈에 관한 일반적인 맥락은 작용소로서의 소수 개념을 기초로 함수 합성의 관점에서 제공받을 수 있다고 보고, 축도기의 연속적인 작용을 예로 소수의 곱셈과 나눗셈이 구체적인 맥락에서 점차 알고리즘화되어 가는 과정을 여덟 단계로 나누어 설명하였다([7, p.172-174]).

그 과정은 대략 다음과 같다. 축도기를 사용하여 한 도형을 3배 확대하고 이어서 그 도형을 다시 1.5배 하도록 할 때, 처음 1~2 단계에서는 연속적으로 작용한 두 변환의 곱으로 합성 변환을 구할 수 있다는 사실에는 주목하지 못하고, 주어진 선분과 변환된 선분의 길이로부터 계산해서 얻으려한다. 3 단계에서는 3배(×3)와 1.5배(×1.5)하는 축도기의 연속적인 작용이 ×(3×1.5)와 같음을 추측한다. 즉, 연속적인 축도기의 작용으로 얻어지는 닮음 변환과 각각의 닮음 변환의 관계를 생각하는 단계이나, 추측의 정당화는 계산에 의한 것이다.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\times 3"] \arrow[rr, bend right, "\times 4.5(=3\times 1.5)"'] & 3 \arrow[r, "\times 1.5"] & 4.5 \end{tikzcd}$$

4 단계에서는 두 개 이상의 연속적인 축도기의 작용은 모두 곱하여 한 개의 축도기 작용으로 바꿀 수 있다는 닮음변환의 합성에 관한 일반적인 법칙을 확인한다. 5 단계에서는 다른 맥락에서도 일련의 선형사상의 합성은 각 선형사상을 곱하여 하나의 선형사상으로 나타낼 수 있다. 6 단계는 하나의 사상을 나타내는 다양한 방법을 동일시하고 계산 방법을 통합하면서 연산의 성질을 생각하는 수준이다. 예를 들어, 아래와 같이 2개 이상의 일련의 선형사상을 합성하는 다양한 방법을 알아내고 가장 빠른 방법을 찾는 과정에서 소수 곱셈의 교환법칙 및 결합법칙을 파악할 수 있다.

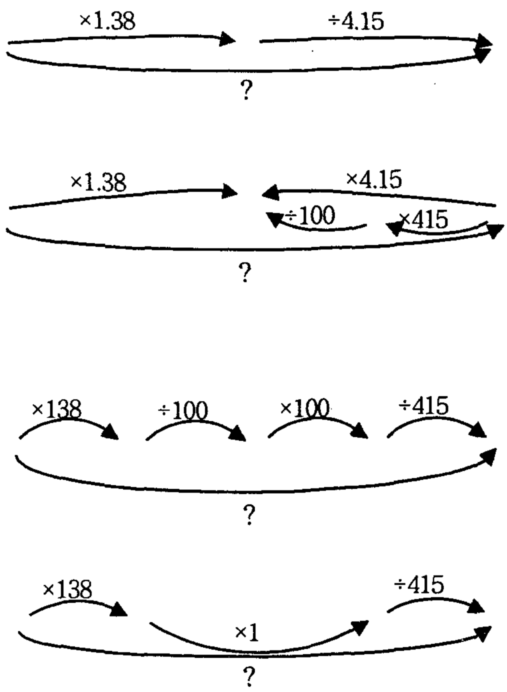
$$\begin{aligned}(\times1.5)\cdot(\times2)\cdot(\times2.5)\cdot(\times3)\cdot(\times4) &= (\times1.5)\cdot(\times2)\cdot(\times3)\cdot(\times4)\cdot(\times2.5)\\ &= (\times4)\cdot(\times3)\cdot(\times2)\cdot(\times1.5)\cdot(\times2.5)\end{aligned}$$

7 단계에서는 사상의 연산이 분석 수단으로 기능하고, 소수의 곱셈과 나눗셈을 선형사상의 합성으로 파악한다. 아래와 같이 모든 유리수 사상은 정수들의 사상과 역사상의 합성으로 나타낼 수 있다고 생각한다.

$$(\times3.67) = \left(\times\frac{367}{100}\right) = (\times367)\cdot(\div100)$$

또, 구체적인 상을 계산하지 않고 임의의 유리수 선형사상에 대한 역사상을 원 사

상을 분해하여 구할 수 있다. 이는 합성과 분해에 기초하여 선형사상의 연산을 다루는 것으로, 소수의 나눗셈 1.38÷4.15를 다음과 같이 계산할 수 있다([8], p.364-376).




결국, 1.38÷4.15=138÷415=0.3222… 으로, 여기서 임의의 소수의 나눗셈 법칙을 일반화할 수 있다. 또, 연산의 대상과 결과가 모두 선형사상이라는 측면에서 동질성이 보장되므로, 일반적인 의미의 연산을 가능하게 하고 보다 형식화된 계산 알고리즘에 집중할 수 있게 한다. 끝으로, 8 단계는 공리적인 수학 이론과 대수적 언어를 사용하여 7 단계를 이해하고 이를 연구의 대상으로 인식하며 형식화하여 설명하는 단계이다.

Brousseau는 축도기를 사용한 닮음 변환의 상황에서, 소수로 표현된 사상을 가지고 소수의 곱셈과 나눗셈이 의미있게 형식화되는 과정을 보여준다. 이 때, 소수는 비례관계에 기초한 비의 값이나, 하나의 양에 다른 양을 대응시키는 함수의 측면이 강조된다고 보아 선형성을 갖는 작용소로서의 소수 개념으로 구별할 수 있을 것이다. 이는 소수 곱셈은 선형성을 갖는 작용소로서의 소수 개념이 기초가 되어야 함 시사하는 것으로, 그의 또 다른 저서 'Rationnels et Decimaux dans la scolarite obligatoire(1987)'에서도 재확인할 수 있다.

이상에서 논의한 Dewey, Vergnaud, Brousseau의 관점을 종합해 볼 때, 소수의 곱셈은 다양한 비례관계의 인식과 여기서 드러나는 비와 작용소로서의 소수 개념을 기초로 할 때에야 개념적 이해가 가능한 것임을 알 수 있다.

# Ⅲ. 소수 곱셈 지도와 관련한 한국과 일본 교과서의 비교

이 장에서는 Ⅱ장의 분석 결과를 토대로 우리나라와 일본의 현행 교과서에서 소수 곱셈을 지도하는 방법을 비교, 분석하고자 한다. 이와 같은 시도는 우리나라의 소수 곱셈 지도 방식에 관한 정확한 이해를 바탕으로 지도의 개선 방향에 대한 시사점을 도출하기 위한 것이다.

## 1. 우리나라 교과서

소수의 곱셈은 5-나 단계의 첫 단원에서 (소수)×(자연수), (자연수)×(소수), (소수)×(소수)의 순서로 구별하여 지도한다. 이를 위해 사용하는 예와 설명의 방식은 다음과 같다.

(1) (소수)×(자연수)

민정이는 하루에 우유를 0.5L씩 마십니다. 3일 동안에는 우유를 몇 L 마시는지 알아보시오([1, p.2]).

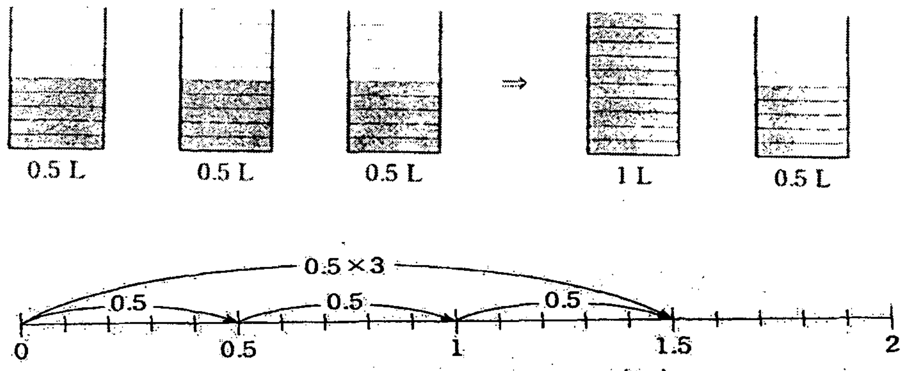
앞서 밝힌 Vergnaud의 관점에 따르면, 이 예는 날짜 수와 우유양이라는 두 측도 사이에 단순 비례 관계의 구조를 갖는 것으로 다음과 같이 도식화할 수 있다.

| 날짜(일) | 우유(L) |
|---|---|
| 1 | 0.5 |
| 3 | $x$ |

이때, 3일 간 마시는 우유의 양은 두 가지 방식으로 생각할 수 있다. 하나는 3일간 마시는 우유의 양은 하루에 마시는 우유 양을 세 번 더하는 것, 즉 $x=0.5\times3=0.5+0.5+0.5$에 의한 것이다. 다른 하나는 날짜와 마시는 우유양 사이에 일정한 비례상수 0.5(L/일)가 존재하는 것에 기초하여 $x=3\times0.5$로 생각하는 것이다. 여기서, 전자는 하루에 마시는 우유 양의 3배로 동수누가로 이해할 수 있다. 반면, 후자는 날짜 수에 비례상수 0.5(L/일)를 곱하는 것으로, 비례상수 0.5는 작용소의 개념이다.

교과서에서는 위의 문제를 다음의 방식으로 접근한다.

먼저, 활동1 에서는 0.5×3을 다음 그림에 색칠을 해 보는 것과 수직선에 나타내어 보는 것으로 설명한다.




$0.5\times3=0.5+0.5+0.5=1.5$ (L)

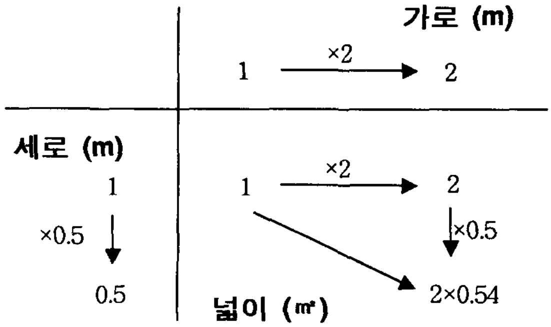
([2], p.70-71)

이러한 활동 기저에서 파악하는 소수의 곱셈은 동수누가의 방법을 동원하는 '0.5×3=0.5+0.5+0.5=1.5(L)' 임을 교사용 지도서에서도 밝히고 있다. 이어서, 활동2 에서는 '$0.5\times3=\frac{5}{10}\times3=\frac{5\times3}{10}=\frac{15}{10}=1.5$' 과 같이 소수를 분수로 나타내어 분수의 곱셈에 기대어 소수의 곱셈 방법을 합리화한 후, 그 결과를 자연수의 곱 '5×3' 과 비교하도록 한다. 이러한 활동으로부터 (소수)×(자연수)의 계산은 자연수의 곱셈과 같이 계산하고 난 후, 소수점의 자리를 맞추어 찍으면 됨을 알게 하려는 것임을 교사용 지도서에서는 밝히고 있다([2, p.70-71]).

(2) (자연수)×(소수)

민지네 반에서는 가로가 2m, 세로가 0.5m인 직사각형 모양의 꽃밭에 봉숭아를 심었습니다. 봉숭아를 심은 꽃밭의 넓이는 몇 ㎡인지 알아보시오([1], p.6).

Vergnaud의 관점에서 이 문제가 갖는 비례관계의 구조는 단순 비례관계의 승법적 결합 중 측도의 곱으로 분류할 수 있고, 다음과 같이 도식화할 수 있다.

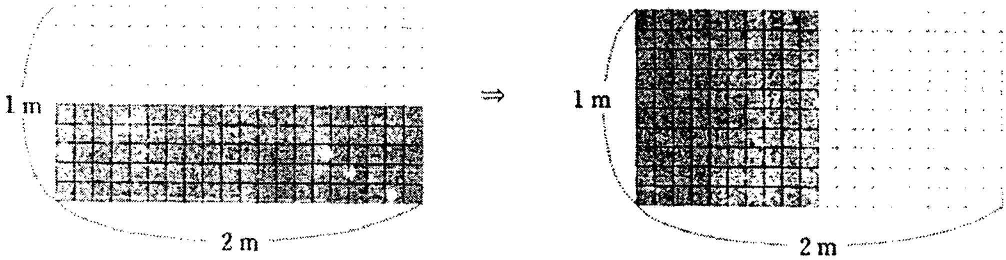


이 때 넓이는 가로, 세로의 길이가 독립적으로 면적에 비례하는 이중비례의 관계로 다음과 같이 설명할 수 있다. 먼저, 넓이의 단위는

(넓이의 1단위, 1㎡)=(가로의 1단위, 1m)×(세로의 1단위, 1m)

로 정의된다. 즉, 가로, 세로가 각각 단위 길이인 1m인 정사각형을 넓이의 단위로 사용한다. 그리고, 세로의 길이가 일정할 때 가로의 길이가 2배가 되면 넓이는 2배가 되며, 같은 방식으로 가로의 길이가 일정할 때 세로의 길이가 0.5배가 될 때에도 넓이는 0.5배가 된다는 사실의 이해를 바탕으로 한다. 이러한 비례관계의 구조를 명확히 하려면, 0.5배와 같은 작용소로서의 소수 개념이 보다 적극적으로 다루어질 것이다.

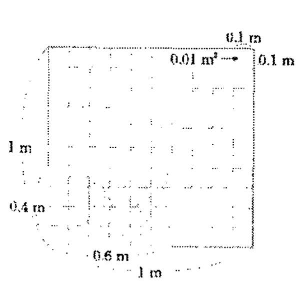
교과서에서는 위의 문제를 우선 아래의 왼쪽 그림에 색칠하는 방식으로 해결하게 하고, 이는 오른쪽 그림에 색칠된 부분의 정사각형들의 개수와 동일함을 기초로 '2×0.5=1'임을 정당화함을 알 수 있다.




([2, p.74])

이어서, 색칠활동으로 얻은 곱셈 결과를 분수의 곱셈방법을 통해 재확인하고 자연수의 곱 2×5와 비교하게 한다. 그리고, 소수의 곱셈은 자연수의 곱셈과 같이 계산하고 난 후 소수점의 자리를 맞추어 찍으면 된다는 계산 형식을 익히도록 한다.

(3) (소수)×(소수)




· 가로와 세로가 각각 0.6m, 0.4m인 직사각형에는 0.01㎡인 정사각형이 몇 개 들어있습니까?

· 0.6×0.4는 얼마라고 생각합니까?

([1, p12])

교과서에서는 가로, 세로의 길이가 0.1m인 정사각형은 1㎡인 정사각형 안에 100개 있다는 사실로부터 그 넓이가 0.01㎡이며, 직사각형안에 작은 정사각형 24개가 포함됨을 확인하여 직사각형의 넓이가 0.24㎡ 임을 알게 한다. 다음 활동에서는 소수를 아래와 같이 분수로 변환하여 분수 곱셈을 한 뒤 이를 소수로 변환하고, 또 이를 자연수의 곱 6×4와 비교하도록 한다.

$$0.6\times0.4=\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{24}{100}=0.24$$

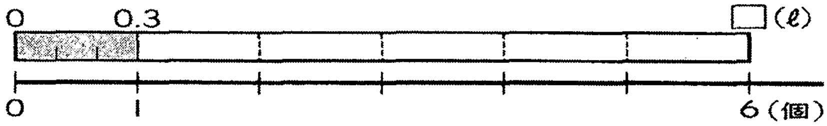
이는 정사각형 그림에서 얻은 결과와 분수 곱셈을 통해 얻은 결과가 같음을 확인하면서, 일반적으로 소수의 곱셈은 자연수의 곱셈과 같이 계산하고 난 후, 두 소수의 소수점 아래 자릿수를 합한 것만큼 곱의 소수점을 찍으면 된다는 소수 곱셈의 알고리즘을 알게 하려는 것으로 파악된다.

## 2. 일본 교과서

소수의 곱셈은 5-상 교과서에서 처음 도입되고, (소수)×(자연수), 소수배, (소수)×(소수)로 단원을 나누어 지도한다. 사용되는 예와 설명의 방식은 다음과 같다.

(1) (소수)×(자연수)

· 0.3ℓ 들어있는 쥬스를 6개 샀다. 모두 몇 ℓ인가?




· 3.6ℓ 들이 물병이 7개 있다. 전체 물병에는 몇 ℓ가 들어가겠는가?
([5, p.19-20])

위의 두가지 예로부터 '(소수)×(자연수)'를 도입, 설명하고, 이러한 곱셈이 적용되는 구체적인 상황을 나타내는 4개의 문제를 덧붙이고 있다. 우선 첫 번째 예와 함께 제시된 도표는 쥬스의 양과 개수 사이의 단순 비례 관계를 시각적으로 잘 보여준다. 교과서에서는 이 문제를 해결하는 두 사람의 방식을 소개한다. 한 학생은 단위 ℓ를 dℓ로 변환하여 자연수의 곱셈을 한 후 그 결과를 ℓ로 나타내었다[5]. 다른 한 명은 0.3ℓ는 0.1ℓ를 3번 합한 것으로 보고, 구하는 부피는 0.1ℓ를 18(=3×6)번 합한 것이므로 1.8ℓ이라고 생각한다. 그리고 나서, '(소수)×(자연수)'의 계산 방식을 다음과 같이 '(자

5) 0.3ℓ = 3dℓ, 3×6=18, 18dℓ=1.8ℓ

연수)×(자연수)'의 계산 방식과 관련지어 설명한다.

$$\begin{array}{ccc} 0.3 \times 6 & = & \square \\ \downarrow 10\text{배} & & \downarrow 10\text{배} \quad \uparrow \tfrac{1}{10} \\ 3 \times 6 & = & \square \end{array}$$

([5], p.20)

이는 3이 0.3의 10배이므로 3×6은 0.3×6의 10배임을 나타내는 것으로, 두 수를 곱할 때 하나의 수가 10배가 되면 곱셈 결과 역시 10배가 된다는 사실을 기초로 자연수의 곱셈으로부터 '(소수)×(자연수)'의 계산 방식을 유도하는 것이다. 두 번째 예에서는 곱셈 3.6×7의 값을 다음의 방법으로만 설명한다.

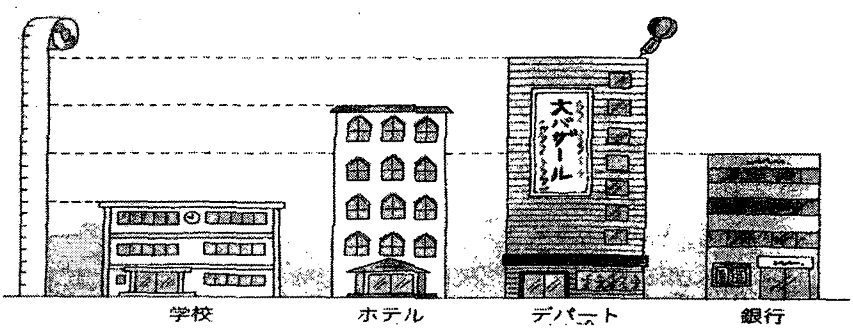
$$\begin{array}{ccc} 3.6 \times 7 & = & \square \\ \downarrow 10\text{배} & & \downarrow 10\text{배} \quad \uparrow \tfrac{1}{10} \\ 36 \times 7 & = & 252 \end{array}$$

([5], p.21)

즉, '(소수)×(자연수)'를 도입하기 위해 사용된 두 예의 설명 방식을 살펴보면, 처음으로 도입하는 단계에서는 다양한 방식으로 생각하게 하나, 점차 비례관계에 대한 인식을 토대로 자연수의 곱셈과 직접 연결하도록 유도하는 것으로 보여진다.

(2) 소수배

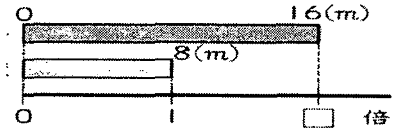
이 단원에서는 기준량에 대한 비교량의 관계인 비로서의 소수 개념을 다루는데, (소수)×(소수) 단원에서 이를 사용하므로 분석의 대상으로 삼았다. 단원의 도입 문제는 아래와 같다.



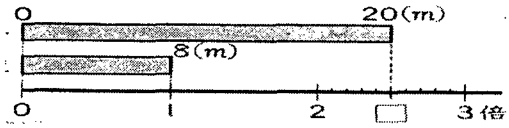
오른쪽 표는 위의 4개 건물의 높이를 나타내는 표이다. 학교 높이를 기준으로 할 때, 다른 건물의 높이는 몇배가 되겠는가?

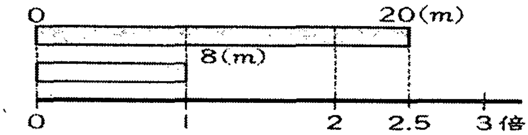
| | 높이(m) |
|---|---|
| 학교 | 8 |
| 호텔 | 16 |
| 백화점 | 20 |
| 은행 | 12 |

① 호텔의 높이는 학교 높이의 몇 배입니까?

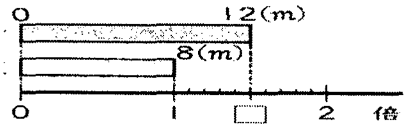



② 백화점의 높이는 학교 높이의 몇 배입니까?




③ 은행의 높이는 학교 높이의 몇 배입니까?




([5, p.30-31])

하나의 수직선 위에 두 건물의 높이를 막대모양으로 나타낸 그림은 기준량의 크기를 1로 볼 때 비교량의 상대적인 크기를 파악하는 상황을 시각적으로 드러내는 것으로 판단된다. 이 때, ①과 같이 비교량이 정수로 표현되는 경우와 ②, ③과 같이 정수로 표현되지 않는 경우가 있다. ②, ③과 같이 기준량보다 작아 정수로 표현되지 못하고 남은 부분은 기준량을 세분하여 그 크기를 나타낼 수 있다. 예를 들어, ②의 경우 정수로 표현되지 못한 나머지 부분에 기준량을 10등분한 것이 5개 포함된다. 이는 기준량의 크기를 1로 볼 때 0.5로 나타낼 수 있으므로 백화점의 전체의 높이는 2.5로 나타낼 수 있음을 의미한다. 이 때, 소수 2.5는 학교 높이를 1로 볼 때 백화점 높이를 나타내는 것으로, 바꾸어 말하면 백화점의 높이는 학교 높이의 2.5배인 것으로 이해할

수 있다. ③의 은행의 높이 역시 같은 방식으로 설명한 후, 이러한 방식으로 임의의 소수배를 정의할 수 있음을 언급한다. 그리고 나서, 어미 기린의 키가 새끼 기린의 몇 배인지 또, 사전의 가격이 이야기 책 가격의 몇 배인지를 해결하는 문제에서 소수배를 다루도록 하고 있다([5, p.30]).

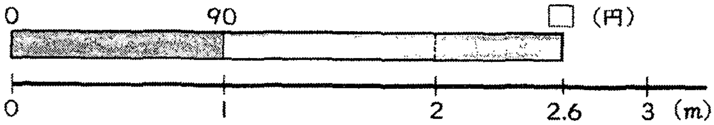
(3) (소수)×(소수)

동수누가로 설명할 수 없는 승수가 소수인 곱셈을 다루는 단원으로, 도입시 사용된 예와 설명하는 방식은 아래와 같다.

- 리본 1m의 가격이 90엔이다. 2.6m를 살 때 지불해야 하는 금액은 얼마입니까?
- 1m의 무게가 2.3kg인 파이프가 있다. 2.8m의 무게는 몇 kg 이겠는가?
- 가로의 길이가 3.6㎝, 세로가 2.3㎝인 직사각형의 넓이는 얼마인가?

([5, p.73-79])

곱셈 90×2.6에 대응하는 첫 번째 예는, 아래의 도표로부터 구하는 가격은 1m 가격인 90엔의 2.6배임을 구체적으로 보여준다.



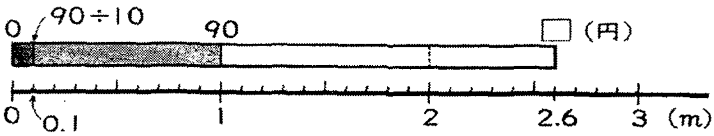

(文部科學省, 2004, p.73)

그리고, 이를 계산하는 두 사람의 방법을 소개한다.

한 사람은 2.6m는 0.1m의 26배이고, 0.1m의 가격은 1m 가격인 90엔 의 $\frac{1}{10}$임을 이용하여

$$90 \times 2.6 = 90 \div 10 \times 26$$

과 같이 계산하는데, 이러한 상황을 다음의 도표로 나타내고 있다.

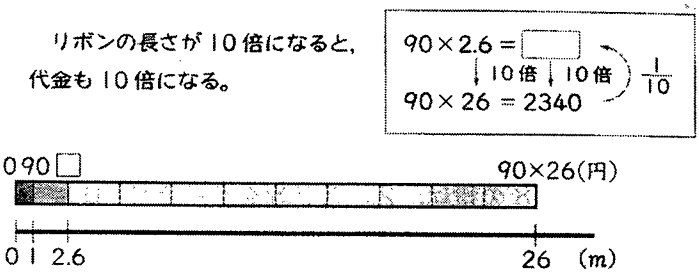



([5, p.74])

다른 한사람은 10배의 길이를 산다면 가격 또한 10배가 되는 것에 착안한다. 즉, 26m를 산다면 지불해야 하는 가격은 90×26엔이므로, 2.6m를 살 때 지불하는 가격은

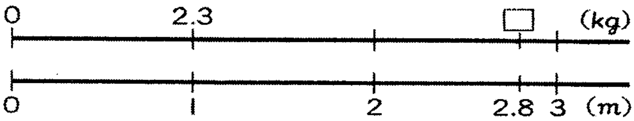
$$90 \times 2.6 = 90 \times 26 \div 10$$

으로 계산한다. 이 때, 아래의 도표가 함께 제시된다.




([5, p.75])

두 번째 예는 '(소수)×(소수)'를 다루는 것으로, 아래와 같이 두 수직선에 길이와 무게 사이의 관계를 나타냄으로써 구하는 무게는 2.3kg의 2.8배임을 알게 하고, 이로부터 $2.3 \times 2.8$를 유도한다.

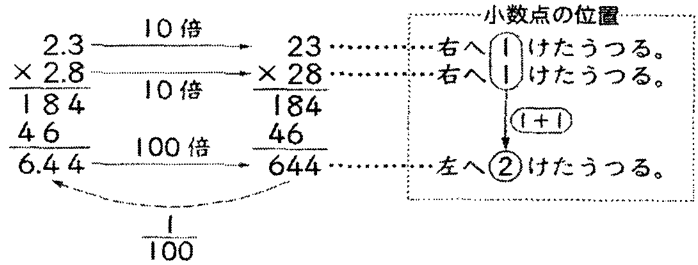



([5, p.75])

이 때, $2.3 \times 2.8$는 피승수와 승수를 각각 10배하여 자연수의 곱셈 23×28을 한 후, 이는 원래 소수 곱셈의 100배임에 주목하여 다음과 같이 계산한다.


([5, p.76])

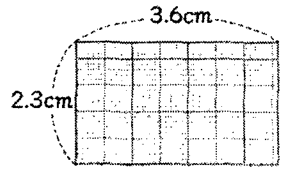
그리고 나서, 이에 기초한 소수 곱셈의 세로셈 알고리즘을 소개한다.




([5, p.76])

이상의 두 예는 두 양 사이의 단순 비례관계에서 소수배의 개념을 사용하여 소수의 곱셈을 다루고 있으며, 두 양 사이의 비례관계는 수직선과 막대 또는 두 수직선 위에 표현하여 시각적으로 적절히 지도되는 것으로 판단된다. 또한, 소수 곱셈은 피승수와 승수 각각에 비례한다는 사실에 기초하여 알고리즘을 지도하는 것으로 보여진다. 예를 들어, 피승수가 일정할 때 승수가 10배가 되면 곱셈결과 역시 10배가 되며, 바꾸어 승수가 일정할 때 피승수가 10배가 될 경우도 마찬가지임을 아는 것이다. 이에 따라, 소수 곱셈 알고리즘은 자연수 곱셈과 직접 연결하여 지도한다.

세 번째 예는 직사각형의 넓이 구하기에 관한 것으로, 교과서에서는 오른쪽의 모눈종이를 제시하여 가로 3.6㎝, 세로 2.3㎝인 보여주고 이 안에 한 변의 길이가 1㎜인 정사각형의 몇 개인지를 질문한다 이어서, 이 직사각형의 넓이가 몇 ㎠인지를 질문하는데, 이는 한 변의 길이가 1㎜인 정사각형이 100개일 때 1㎠임을 기초로 답하도록 한다. 이 때, 넓이에 내재한 승법적 비례관계는 적극적으로 다루어지지 않는다.




그리고, 앞서 배운 소수 곱셈의 알고리즘에 따라 2.3×3.6을 계산하고, 그 결과가 위의 결과와 일치하는지 확인하여, 변의 길이가 소수로 표현될 때에도 직사각형의 넓이 공식을 사용할 수 있도록 지도하고 있다.

## 3. 소수 곱셈을 다루는 한국과 일본 교과서의 특징 비교

이 절에서는 1절과 2절의 분석을 바탕으로 두 나라 교과서에서 소수 곱셈을 전개하고 설명하는 방식의 비교되는 특징을 드러내고자 한다. 이는 우리나라 소수 곱셈 지도 방식의 특징을 분명히 하기 위함이다.

첫째, 소수 곱셈을 전개하는 순서에 차이를 나타낸다. 한국교과서(이하A)에서는 5-나 단계의 동일한 단원에서 다음의 순서에 따라 나누어 지도한다.

소수×자연수 ⇒ 자연수×소수 ⇒ 소수×소수

비교하여, 일본교과서(이하B)는 5-상 에서 다음의 순서로 서로 다른 단원에서 지도한다.

소수×자연수 ⇒ 소수배 ⇒ 소수×소수

이를 좀더 자세히 들여다보면, A, B 교과서 공통적으로 동수누가에 기초하여 설명할 수 있는 승수가 자연수인 곱셈을 가장 먼저 다루고 있음을 알 수 있다. 그러나, 자연수의 곱셈과 달리 동수누가로 설명되지 않는 승수가 소수인 곱셈의 경우, A에서는 '자연수×소수'와 '소수×소수'로 나누어 지도하는 반면, B에서는 '소수×소수'에서 동시에 다루고 있다. 한편, B에서는 승수가 소수인 곱셈을 다루기 전에 '소수배'를 다루고, 이를 기초로 '소수×소수'를 설명한다. 비교하여, A에서는 비의 값으로서의 소수를 6-가 단계에서 다루는데, 남자와 여자의 수, 사과와 딸기의 수[6] 등과 같은 이산량의 비교에서 비와 비율을 다루고, 기준량을 1로 볼 때의 비율을 비의 값으로 정의한 후 비의 값을 분수 또는 소수로 표현하는 방식을 따르고 있다.

둘째, 자연수의 곱셈과는 구별되는 승수가 소수인 곱셈을 지도하는 방식을 살펴보면, A교과서는 '자연수×소수'와 '소수×소수'를 구별하여 지도하나 모두 직사각형의 넓이를 구하는 상황에서 다룬다. 넓이를 구할 때 내재된 비례관계를 적극적으로 다루지는 않으므로, 소수 곱셈을 생각할 수 있는 하나의 상황으로 생각될 수 있다. 즉, 소수 곱셈을 구체적인 상황과 연결지을 때는 미터단위를 수반한 소수들이 대부분으로, 비나 작용소로서의 소수 개념을 기초로 곱셈을 이해하기는 어려울 것으로 보인다. B교과서는 승수가 소수인 곱셈을 크게 두 양 사이의 단순 비례관계를 기초로 하는 상황과 넓이를 구하는 상황에서 다루고 있다. B교과서는 직사각형의 넓이로 소수 곱셈을 다룰 때에는 변의 길이가 소수로 표현될 때에도 넓이 공식을 사용할 수 있는 정도로 설명한다. 이는 A교과서의 지도 방식과 비슷하나, 제한적이나마 단순비례관계에서 다루어지는 소수 곱셈은 소수배를 사용하여 비나 작용소로서의 소수 개념을 기초로 하는 것으로 판단된다.

셋째, 소수 곱셈법을 다루는 방식의 차이를 볼 수 있다. A교과서는 소수를 분수로

6) 교과서에서는 사과 8개와 딸기 7개의 비교를 통해 사과 수에 대한 딸기 수의 비의 값을 $\frac{7}{8}$ 또는 0.875로 표현하도록 한다. 여기서, 소수 0.875는 기준량인 사과의 수 8개를 1로 볼 때 비교량인 딸기 7개의 개수를 0.875로 본다는 뜻이고, 그 이면에는 딸기 개수는 사과 개수의 0.875배라는 뜻이 담겨 있다([3], p.89). 그런데, 비교의 의미가 다소 인위적인 듯한 사과와 딸기 같은 두 사물의 개수 비교를 통한 비의 값으로서의 소수는 단순히 비 $a:b$에서 $a$를 $b$로 나누어 얻는 값 정도로 인식될 가능성이 있는 것으로 보인다.

변환하여 분수 곱셈을 한 뒤 이를 소수로 변환하는 과정으로 지도한다. 즉, 소수 곱셈법은 앞서 배운 분수를 매개로 하여 소수점의 위치에만 주의하면 자연수 곱셈법과 유사한 절차를 따르는 것으로 설명한다. B교과서는 승수와 피승수가 자연수가 되도록 10배 또는 100배하여 자연수의 곱셈을 한 후, 그 결과가 원래 소수 곱셈과 비교하여 몇 배가 되는지를 이해하여 소수점을 처리하도록 한다. 이는 비례관계의 인식을 토대로 소수 곱셈법을 자연수 곱셈의 알고리즘과 직접 관련짓는 것으로 볼 수 있다.

## Ⅳ. 제언

본 논문은 학생들에게 소수 곱셈이 의미있게 학습, 지도되지 못하고 있다는 문제점의 인식에서 시작한다. 이에 따라, Dewey, Vergnaud, Brousseau의 관점에서 소수 곱셈의 본질을 드러내려는 노력을 하였고, 이를 토대로 우리나라와 일본 교과서에서 소수 곱셈을 다루는 방식을 비교하면서 그 특징을 살펴보았다. 이하에서는 이상의 논의 결과를 토대로 소수와 관련하여 우리나라 교과서 내용 전개 방식 개선을 위한 두 가지 제언을 하고자 한다. 단, 본 논문의 제언은 소수 곱셈 부분만을 중점적으로 분석한 결과에 따른 것으로, 교과서에서 다루어지는 다양한 수 개념 지도와 함께 통합적인 시각에서 이루어지지 못한 제한점을 갖는다.

먼저, 소수 곱셈을 지도할 때 비례관계를 좀더 적극적으로 다루는 것이 필요하다. Ⅱ장의 분석에 따르면, Dewey와 Vergnaud는 덧셈과 달리 곱셈은 비와 비례의 아이디어를 의식적으로 이해하는 것임을 분명히 한다. 또한, Brousseau는 소수의 곱셈과 나눗셈을 축도기의 연속적인 작용이라는 구체적인 맥락에서 설명하고 있으며, 여기서 사용되는 비나 작용소로서의 소수개념이 일반적인 의미의 소수 곱셈 연산을 가능하게 하고 형식화된 계산 알고리즘으로 나아갈 수 있음을 밝히었다. 현행 우리나라의 교과서는 소수 곱셈에 내재된 수학적 의미를 동수누가적 측면과 축도의 곱의 문제로 제한해 놓는다. 즉, 소수의 곱셈은 비나 작용소로서의 소수 개념을 토대로 하여 이를 비례관계로서 인식할 때 비로소 구체적이고 일반적인 수학적 의미를 가질 수 있음에도 불구하고, 극히 제한된 맥락에서의 소수 곱셈의 의미만을 제시하여 도입하고 있다. 그리고, 소수 곱셈에 내재된 비례관계를 직접적이고 적극적으로 다루지는 못한 채 성급하게 알고리즘화를 시도함으로써 학생들로 하여금 소수 곱셈의 본질에 대한 충분한 이해를 하기 어렵게 하고 있음을 알 수 있다.

또한, 소수를 지도할 때 분수 개념 이외에 다양한 소수 개념 요소[7]를 균형있게 다루는 것이 필요하다. 변희현은 현재 초등학교 교과서에서 소수 개념 지도에서 분수 개념을 지나치게 강조함에 따라, 측정수, 비, 작용소 등의 다른 개념적 측면들은 학생

7) 변희현은 소수의 본질을 9개의 개념요소로 추출하였다([4, p.37-56]).

들로 하여금 적절히 이해하기 어렵게 전개됨을 지적하였다[8]([4], p.84-94). 교과서에서 소수 곱셈 원리를 분수를 매개로 설명한 것 역시 분수 중심의 소수 지도라는 측면으로 볼 수 있다. 소수는 역사적으로 분수를 십진법화하려는 노력의 산물로 '분수'로서의 소수 개념은 분명 다루어야 한다. 그러나, 소수 곱셈의 본질에 비추어 볼때 비 또는 작용소로서의 소수 개념에 기초하지 않은 소수 곱셈 원리는 자칫 형식적이고 기계적인 계산을 능숙하게 해결하는 것에 초점이 모아질 수 있기 때문이다.

이 논문에서는 현재 우리나라 초등학교에서 소수 곱셈을 지도할 때, 제한된 맥락에서 소수 곱셈의 의미를 다룬 후 성급한 알고리즘화를 시도함으로써 학생들로 하여금 소수 곱셈의 본질을 충분히 이해하지 못하게 하는 점을 지적한다. 따라서, 소수 곱셈의 본질에 비추어 볼 때, 보다 의미있는 소수 곱셈의 학습 지도를 위해서는 비와 비례관계에 기초한 소수 곱셈을 보다 적극적으로 다루는 것이 필요함을 제언하였다. 또한, 소수 곱셈이 분수 곱셈을 매개로 학습 지도되는 것을 이 논문에서는 초등학교에서 소수 지도시 분수 개념이 지나치게 강조되는 것의 일환으로 파악한다. 이에 따라 소수 지도시 다양한 소수 개념을 균형있게 다루는 것이 필요하며, 특별히 소수 곱셈을 지도할 때에는 비나 작용소로서의 소수 개념을 기초로 해야 함을 제언하였다.

## 참고 문헌


1. 교육인적자원부, 초등학교 수학 5-나, 대한교과서 주식회사, 2002a.
2. 교육인적자원부, 초등학교 교사용지도서 수학 5-나, 대한교과서주식회사, 2002b.
3. 교육인적자원부, 초등학교 수학 6-가, 대한교과서 주식회사, 2002c.
4. 변희현, 소수 개념의 교수학적 분석, 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 2005.
5. 文部科學省, 新しい 算數 5-上, 東京書籍, 2004.
6. Bell, A., Swan, M. & Taylor, G., *Choice of Operation in Verbal Problems with Decimal Numbers,* Educational Studies in Mathematics, 12, 399-420(1981).
7. Brousseau, G., *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
8. Brousseau, N. & Brousseau, G., *Rationnels et Decimaux dans la scolarite obligatoire*. I.R.E.M. de Bordeaux. 1997.
9. Carpenter, T. P., Corbit, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M. & Reys, R. E.,


8) 변희현은 분수 중심의 소수 지도는 실수 개념 이해에 핵심적인 역할을 하는 무한소수의 의미있는 접근을 어렵게 함을 지적하고([4], p.94-100), 분수의 관점으로 접근할 수 없는 무한소수의 이해도에 대한 지필검사의 결과 정답률이 10% 정도로 상당히 낮음을 보였다([4], p.105-114]).

*Decimals: Results and implications from the second NAEP mathematics assessment.* Arithmetic Teacher, 28(8), 34-37(1981).

10. Graeber A. O. & Tirosh D., *Insights Fourth and Fifth Graders Bring to Multiplication and Division with Decimals,* Educational Studies in Mathematics, 21, 565-588(1990).
11. Graeber A. O., *Misconceptions about Multiplication and Division.* Arithmetic Teacher, March. 408-411(1993).
12. Greer, B., *Nonconservation of Multiplication and Division Involving Decimals,* Journal for Research in Mathematics Education, 18(1). 37-45(1987).
13. Hiebert, J., *Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions,* In Leinhardt, G., Putman, R. & Hattrp, R. A. (Eds.), Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching. (p. 283-322). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. 1992.
14. McLELLAN, J. A. & DEWEY, J., *The Psychology of Number and its applications to methods oh teaching arithmetic,* NY: D. APPLETON AND COMPANY. 1901.
15. Nesher, P., *Towards an Instructional Theory*: the Role of Student's Misconceptions. For the Learning of Mathematics, 7(3), 33-40(1987).
16. Vergnaud, G., *Multiplicative Structures,* In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. (p.127-174). New York: Academic Press. 1983.

# A Study on the Multiplication of the Decimal Fractions

Korea Institute of Curriculum & Evaluation **Hee-Hyun Byun**

Finding the lack of meaningful approaches in teaching multiplication of decimal fractions, this paper tries to show from the standpoints of Dewey, Vergnaud and Brousseau that the cognition of ratio and proportion is essential to the understanding of multiplication of decimal fractions. Based upon such posture, this paper compares the characteristics and approaches to multiplication of decimal fractions in Korean and Japanese textbooks. Finally, this paper suggests ways to develop the concept of multiplication of decimal fractions in Korean textbooks.

*Key words*: multiplication of decimal fractions, ratio, proportion

2000 Mathematics Subject Classification: 97D30, 97U20

ZDM Classification: F42

논문 접수: 2007년 3월 심사 완료: 2007년 4월