한국수학사학회지 제20권 제2호(2007년 5월), 59-72

벡터개념의 강의적 체계순서에 관하여

대구한의대학교 컴퓨터학과 **박홍경**
hkpak@dhu.ac.kr
신라대학교 수학교육학과 **김태완**
twkim@silla.ac.kr
경남대학교 수학교육학과 **남영만**
nym4953@kyungnam.ac.kr

수학적 개념의 지도순서에는 크게 역사적 순서, 이론적 체계, 강의적 체계순서로 나뉜다. 본 논문에서는 벡터개념을 대상으로 구체적으로 강의적 체계순서를 정하는 문제를 논의하고자 한다. 이를 위해 먼저 2가지 원료에 해당하는 벡터개념의 역사적 순서와 이론적 체계에 대해 조사한다. 이 조사를 바탕으로 양자의 결합으로서 벡터개념의 강의적 체계순서를 정하는 기준과 형태에 관해 고려한다.

주제어 : 수학지도의 순서, 강의적 체계순서, 벡터개념, 공리주의, 수학적 지식

1. 서론

수학적 개념을 어떻게 지도해야 할 것인가? 이것은 수학교육에 있어서 가장 중요한 문제 중의 하나이다. 이 문제와 관련하여 수학지도 순서의 유형으로 역사적 순서, 이론적 체계, 강의적 체계순서라는 3가지 유형이 제안되었다([1]). 역사적 순서는 역사적인 발생과정을 그대로 따르는 입장이고, 이론적 체계는 역사성을 무시하고 이론의 구조성을 중시하는 입장이다. 이에 대해 강의적 체계순서는 문자 그대로 강의를 위해 전자의 두 유형의 결합적인 형태라고 할 수 있다. 문제는 개념지도를 위해서 역사적 순서와 이론적 체계의 두 원료를 어떻게 결합해야하는가 이다.

현재 대부분의 교과서는 효율성의 측면에서 이론적 체계를 따른다. 이를 위해 이론의 미와 힘을 강조한다. 하지만 지나치게 이론적 체계에 치우치게 되면 학생들의 자연스러운 학습 동기나 개념형성에 취약해지는 단점이 발생한다. 이러한 단점을 보완하기 위해서는 필연적으로 역사적 순서를 적절하게 결합할 필요가 생긴다. 물론 역사적 순서를 지나치게 강조하는 것은 시간적 어려움이나 도리어 이론적 체계 형성을 방해하게 되는 문제점을 야기한다. 결국 올바르고 효과적인 개념지도를 위해서는 역사적 순서와 이론적 체계를 적절히 상보적으로 잘 결합함으로써 강의적 체계순서를 정

해야 한다.

강의적 체계순서를 정하는 문제의 구체적인 사례로서 1차원 기하학적 측도의 하나인 각의 개념을 논의하였다([4]). 이를 위해서 공간과 도형의 개념에 관한 강의적 체계순서의 문제도 함께 다루었다. 이 경우 역사적 순서와 이론적 체계의 결합방식의 기준은 문제해결측면이었다. 말하자면 단순한 것에서 복잡한 것으로, 쉬운 것에서 어려운 것으로의 자연스러운 이행을 기준으로 삼았다. 같은 맥락에서 본 논문에서는 수학이나 물리학을 위시하여 자연과학이나 공학뿐만 아니라 인문과학, 사회과학, 의학 등 과학 전반에 중요한 개념으로 자리하고 있는 벡터개념을 대상으로 한다.

논의에 들어가기 전에 각과 벡터를 개념적으로 비교하는 것은 그 자체로 흥미롭다. 벡터의 기원은, 각의 경우와는 달리, 수학이 아니라 물리학(정확히 말하면 Newton. I의 역학)에 있다. 또한 각은 측정에 관한 개념으로서 이미 그리스수학 이전부터 있었는데, 가령, 이집트수학에서는 비록 정확하지는 않았지만 오늘날의 각에 해당하는 세케드라는 개념을 통하여 피라미드 건축에 활용하였다([2]). 그리스수학(특히, Tales)에서는 각의 정확한 (직관적인) 개념이 가능해진다. 이에 반해 벡터는 측정과는 무관한 존재방식, 그것도 물리학적인 존재에 관한 양적인 개념이다. 역사적으로 17세기 근대물리학이 들어서면서 크게 질에서 양으로의 전환이 가능하게 되었는데, 여기서 말하는 양적이란 어떤 물리학적 대상의 상태를 특정한 것으로서 구별, 특징짓기나 결정함에 있어서 또는 특정 지식이나 정보를 전달함에 있어서 궁극적으로 실수로 표현하는 것을 의미한다([6]). 말하자면 그것을 1개의 실수로 나타내건 여러 개의 실수의 쌍으로 나타내건, 또한 그들이 공식을 통해 내포적으로 주어지든 수표, 그래프, 도표 등에 의해 외연적으로 주어지든 그것은 상관이 없다. 다만 근대물리학과 그리스물리학의 차이점은 측정을 질적인 표현에서 양적인 표현으로 옮겼다는 것이다.

한편 각은 벡터에 의해서도 자연스럽게 정의할 수 있다. 사실 유클리드기하학은 어떤 부분에 있어서는 벡터기하학에 의해 더욱 잘 표현되기도 한다. 하지만 유클리드기하학의 모든 기하학적 성질이 그렇지는 않음을 주의한다.

한 가지 지적하고 싶은 것은 직선도형에서 곡선도형으로의 이행에 있어서 대응하는 각의 개념의 가장 중요한 아이디어는 (외)각의 순간변화율로서 곡률 개념이 도입된 것에 있다. 이러한 발상의 근저에 깔린 사고방식은 바로 무한소적 접근방법이다([4]). 그 핵심은 곡선도형에서는 직선도형과 달리 접공간(접선이나 접평면의 일반화)을 고려하는 것인데, 이것은 공간도형에 있어서 순간변화율에 해당하는 접공간은 바로 유클리드공간이기 때문이다. 이러한 접근방식은 벡터의 개념에서도 유사하게 일어난다. 즉 유클리드공간(또는 직선도형)에서의 벡터개념은 비유클리드공간(또는 곡선도형)에서는 자연스럽게 접벡터 개념으로 이어진다. 요컨대 무한소적 접근방법은 직선도형으로부터 곡선도형을 잇는 것이며 나아가 유클리드공간과 비유클리드공간을 잇는 본질적이며 중요한 가교이다.

본 논문에서는 벡터개념의 강의적 체계순서를 정하는 문제를 다룬다. 이를 위해 원료가 되는 벡터개념의 역사적 순서와 이론적 체계를 먼저 조사한다. 논의는 벡터개념의 이론적 체계에 대해서 조사를 한 후에 역사적 순서로 나아간다. 그것은 여기서 제시하는 벡터개념의 역사적 순서는 크게 4단계로 나뉘는데, 그러한 발전의 구분이 이론적 체계에서 고려한 벡터의 3가지 정의방식(기하학적, 대수적, 공리적 정의)에 의거하기 때문이다. 끝으로 이러한 조사를 바탕으로 양자의 결합으로서 벡터개념의 강의적 체계순서를 정하는 기준과 형태에 관해 고려한다.

2. 벡터개념의 이론적 체계

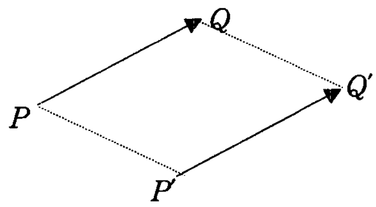
먼저 벡터개념의 이론적 체계에 대해서 고려한다. 특히, 역사적 순서를 정하기 위해 벡터의 정의와 이론 전개를 중심으로 살펴본다. 당연히 벡터개념의 정의방법을 기술하는 것으로 시작해서 벡터개념의 이론 전개로 나아간다.

벡터의 개념은 통상 기하학적, 대수적, 공리적인 방법으로 정의할 수 있다. 먼저 벡터의 크기와 방향에 의한 기하학적 정의는 벡터를 유향선분에 의해 도시함으로써 기하학적인 취급이 용이하다. 다음으로 공간에 좌표계를 도입하게 되면 벡터를 순서쌍으로 정의할 수 있다. 이러한 벡터의 성분표시 방법은 연산이나 차원의 확장 등의 대수적 취급에 유용하다. 끝으로 밝혀진 벡터의 성질을 이용하여, 집합론의 입장에서 역으로 이들 성질을 만족하는 집합으로서 벡터공간을 정의함으로써 추상적인 벡터를 고려할 수 있다. 이러한 공리적인 방법은 다른 많은 벡터공간을 구성하고 발견할 수 있는 장점을 가진다.

이러한 정의에 대해 보다 구체적으로 살펴보기로 한다. 아래의 내용에 대해서는 선형대수학, 대수와 기하, 해석기하학 등의 분야에 관한 여러 대학교재를 참조한다.

[벡터의 기하학적 정의] 스칼라는 크기만을 갖는 수학적 대상인데 반해, 벡터는 크기와 방향을 가지는 수학적 대상으로 정의한다. 이러한 벡터를 강조할 때에는 특히 기하벡터라고 부른다.

기하벡터는 <그림1>과 같이 (유클리드)공간에서 유향선분으로 도시할 수 있다. 단 유향선분으로서 평행이동에 의해 겹쳐지는 것은 같은 벡터로서 동일시한다.

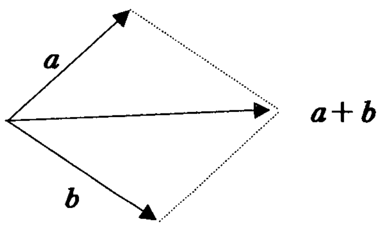


$a = \overrightarrow{PQ}$로 표시

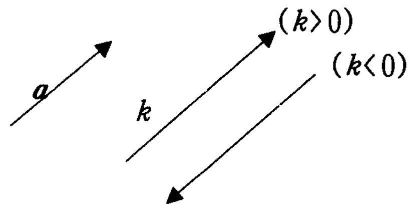
<그림1>

한 점 O를 정해두면, 임의의 점 P와 임의의 벡터 p는 $p = \overrightarrow{OP}$에 의해 일대일 대응이 된다. 이 때 p를 P의 위치벡터라고 한다.

기하벡터에는 다음과 같은 2가지 기본적인 작용이 가능하다. 기하벡터의 합과 스칼라와의 곱이 그것인데, 이를 도시하면 임의의 벡터 a와 b에 대하여 각각 <그림2>와 <그림3>이 된다. 여기서 스칼라는 실수(체), 즉 $k \in \vec{R}$라고 하자.



<그림2>



<그림3>

이제 공간에 좌표계를 도입하자. 가령 3차원 공간에 직교좌표계 $O-xyz$를 (오른손계에 따라) 택하자. 그러면 기하벡터는 좌표를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

[벡터의 대수적 정의] 공간의 직교좌표계 $O-xyz$에 관해서 시점이 $P(x_1, y_1, z_1)$, 종점이 $Q(x_2, y_2, z_2)$인 유향선분으로 표현되는 벡터는

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

으로 정의한다. 이를 벡터의 성분표시라고 한다.

대수적 정의에서 이러한 성분표시는 좌표계의 선택에 따라 달라진다는 것에 주의해야 한다. 좌표계의 변화에 따른 벡터의 성분표시에는 정확한 규칙이 성립한다. 공간에 좌표계가 도입된 경우에는 굳이 기하학적 정의와 대수적 정의를 구별하지 않고 벡터로 통칭한다.

그러면 <그림2>와 <그림3>에 의해 정의된 벡터의 작용은 다음과 같이 연산으로 표현된다. 이를 성분표시로 나타내면, 두 벡터 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$와 스칼라 $k\in\overrightarrow{R}$에 대해 합과 스칼라 곱은 각각

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3), \quad k\,\boldsymbol{a}=(ka_1, ka_2, ka_3)$$

로 된다. 이로부터 다음의 벡터의 성질은 쉽게 알 수 있다. 증명은 대수적 정의에 따라서도 가능하고 기하학적 정의에 따라서도 가능하다.

[정리] 공간에서 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$와 스칼라 $k, l\in\overrightarrow{R}$에 대해 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

(2) $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(4) $(kl)\,\boldsymbol{a}=k(l\,\boldsymbol{a})$, $1\,\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$

(5) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\,\boldsymbol{a}+k\,\boldsymbol{b}$, $(k+l)\,\boldsymbol{a}=k\,\boldsymbol{a}+l\,\boldsymbol{a}$

지금까지는 공간에 대해 3개의 성분을 가진 벡터를 대상으로 하였지만, 논의에서 알 수 있듯이 벡터의 대수적 정의는, 직관에 호소하는 기하학적 정의와는 달리, 성분표시에 의해 자연스럽게 임의의 자연수 $n(\in\overrightarrow{N})$에 대해 n개의 성분을 가진 벡터로 확장할 수 있다. 또한 합과 스칼라 곱에 대해서도 쉽게 일반화되어진다.

이제 벡터의 공리적 정의는 위의 정리로부터 자연스럽게 형식화된다. 이것은 공간이나 좌표계에 전혀 의존하지 않는다는 의미에서 벡터개념의 추상화라고 할 수 있다.

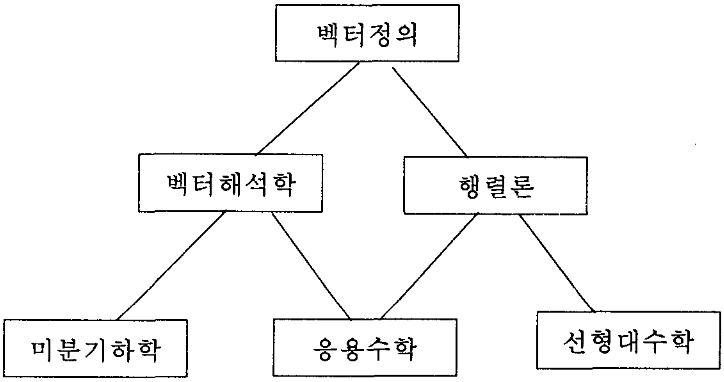
[벡터의 공리적 정의] 집합 $V(\neq\emptyset)$가 체 $\overrightarrow{F}$ 위의 벡터공간이란 V위에 합과 $\overrightarrow{F}$와의 스칼라 곱의 연산이 정의되어 위의 정리를 만족하는 것을 말한다.

이러한 공리적 정의로부터 많은 새로운 벡터공간을 구성하고 발견할 수 있다. 하지만 앞서의 두 정의와 같이 기하학적이든 대수적이든 구체적으로 표현되지 않으면 쉽게 다룰 수 없다.

[벡터공간의 예] (1) 공간에서 (기하)벡터들의 모임은 $\overrightarrow{R}$위의 벡터공간이다.
(2) $\overrightarrow{F}$를 체라 할 때, $\overrightarrow{F}^n$은 $\overrightarrow{F}$위의 벡터공간이다.

(3) $\vec{F}$를 체라 할 때 $\overrightarrow{F^m}[x]=\{f|f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m,\ a_i\in\vec{F}\}$는 임의의 $m\in\vec{N}$에 대해 $\vec{F}$ 위의 벡터공간이다. 보다 일반으로, $F[X]=\{f|f: X\rightarrow\vec{F}\}$는 함수 는 $\vec{F}$ 위의 벡터공간이다.

다음으로 이러한 벡터의 3가지 정의로부터 이후의 이론 전개는 크게 3가지 방향으로 나눌 수 있다. 하나는 미적분학을 활용한 비선형분야로의 벡터해석학 방향이다. 이것은 다시 2가지 방향으로 세분되어 진행하는데, 한쪽은 기하학의 연구로서 미분기하학 방향으로 이어지고 다른 쪽은 물리학, 공학 등 여러 응용수학 방향으로 나아간다. 다른 하나는 행렬론으로 나아가는 선형분야로의 선형대수학 방향이다. 이후 작용소론, 고등선형대수학 등으로 발전해간다.



<그림4>

3. 벡터개념의 역사적 순서

벡터개념의 역사적 순서는 이론적 체계에서 소개한 3가지 정의방법에 의거하여 크게 4단계로 나뉜다. 먼저 직관에 호소하고 있는 벡터의 기하학적 정의를 최초로 구현한 17세기 Newton, I. (1642-1727)을 기준으로 17세기 이전과 17, 8세기가 각각 1단계와 2단계이다. 다음으로 해석기하학의 도움으로 기하학의 산술화의 성과인 벡터의 대수적 정의를 확립한 19세기 Hamilton, W. R. (1805-1865)을 중심으로 3단계가 시작한다. 이 시기는 앞서 언급한 벡터의 3가지 방향의 이론적 전개가 모두 일어난다. 4단계는 집합론의 영향으로 일어난 20세기 초반의 공리주의 수학이 시작되는 시기에서 출발한다.

1단계 : 그리스수학 및 물리학에서의 입장

(1) 그리스물리학의 입장

서론에서 언급한 바와 같이 그리스물리학은 근대물리학이 양적인 것에 반해 질적인 수준이라 할 수 있다. 다시 말하면 아직은 양적이지 않다는 의미이다. 가령 Aristoteles (B.C 384-322)는 힘을 벡터로 파악했지만 모호하였고 에너지나 열, 온도나 질량 등의 개념을 엄밀히 벡터와 스칼라로 구별할 수 없었다. 그리스물리학에서의 양이라는 것은 실수의 개념을 창조하지도 않은 채 막연하게 쓰고 있었는데, 실상 그것은 실수의 대용물이었다([6]). 가령, 길이도 양이고, 면적 또한 다른 종류의 양이고, 체적은 또 다른 양이었다.

(2) 그리스수학의 입장

그리스수학에서는 오히려 길이, 면적, 체적 등의 양을 개념화하려고 노력하였는데, 이를 해결할 수 있는 여건이 아니었기 때문에 결국 실패로 끝나고 말았다. 실패의 이유로 복잡한 것이 단순한 것보다 먼저 나타나고, 난해한 것이 쉬운 것보다 먼저 나타나고, 숨겨진 것이 자명한 것보다 먼저 나타난다는 것을 인식하지 못했기 때문이라고 한다([6]).

수학의 정의에서 보면 그리스수학은 수와 형태에 관한 연구인데, 주로 세고 측정하며 형태를 묘사하는 정적인 문제들에 한정된 수학이라고 할 수 있다([8]). 따라서 행성의 운동, 지구에서 낙하하는 물체의 운동, 기계의 작동, 액체의 흐름, 기체의 팽창 등 운동과 변화에 대한 문제에는 눈을 돌릴 수 없었고 이러한 표현에 맞는 벡터 등의 개념도 고려할 수 없었다. 17세기 근대수학이 되어서야 수와 형태, 운동, 변화, 공간에 관한 연구가 되었다([8]).

2단계 : 벡터기하학의 형성

(1) 벡터기하학의 물리적 기원

벡터개념의 본격적인 최초의 동기는 수학이 아니라 17세기 근대물리학에서 비롯하였다. 특히 천문학과 항해술의 발달에 기인한다. 이러한 운동과 위치에 대한 관심이 운동을 곡선으로 묘사하고 그 위치에서의 운동의 크기와 방향을 묘사하기 위해 (비록 명확하지는 않았지만) 유향선분으로 표현하게 된 것이다. 그리하여 힘의 합성의 법칙이 등장한다. 이를 정식화한 것은 이전에 Stevin, S. (1548-1629), Galilei, G. (1564-1642) 등이 있지만, 명확히 한 것은 Newton, I.이다. 그는 나아가 운동, 속도, 힘을 벡터로 표시하는 방법을 고안함으로써 물리적 이론으로서 벡터이론은 발전하게 된 것이다([5]). 예를 들면, 두 사람이 물건을 끈다든지 하는 것에서 나아가 정전기학에서 전

기력에 대한 쿨롱의 법칙을 구하는 경우에 적용될 수 있다. 벡터의 이름을 붙인 사람은 Hamilton, W. R.이며 물리적 양을 엄밀하게 벡터와 스칼라로 구분한 사람은 Maxwell, J. C. (1831-1879)이다.

이후 스칼라 곱에 대한 개념도 벡터의 크기나 방향을 바꾸는 수단으로 물리학에서 자연스럽게 등장한다. 이미 Newton. I. 등도 묵시적으로 사용하고 있었다.

(2) 벡터기하학의 수학적 형성

물론 벡터개념은 물리학에 기원을 두고 있지만 동시에 수학적으로도 개념이 형성되기 시작한다. 앞서 힘의 합성의 법칙으로부터 수학적으로는 벡터의 합의 개념이 정의된 것이다. 또한 자연스럽게 스칼라 곱이 도입되었다. 이 2가지 연산에 의해 기존의 유클리드기하학은 재해석된다. 즉 벡터기하학이 시작된 것이다. 가령, 평행사변형의 두 대각선은 서로 이등분한다는 명제를 벡터에 의해 증명할 수 있다. 또는 무게중심에 대한 표현, 내분점이나 외분점과 같은 점의 분할을 표현하는 데에는 유클리드기하학보다 훨씬 효과적이다.

이후 벡터의 중요한 연산인 내적과 외적을 최초로 도입한 사람은 Grassmann, H. G. (1809-1871)이다. 이로서 완전히 벡터기하학이 정립되었다. 나아가 그는 고차원 벡터를 다루었으며 이로 인해 고차원 수학이 발전하는 기틀을 마련하였다([9]).

(3) 벡터기하학에서 벡터대수학으로 이행

벡터개념이 기하학에서 대수적으로 이행하는데 중요한 가교의 역할을 한 것은 바로 복소수이다. 이것은 수이자 동시에 벡터인 최초의 대상이었다(다음으로는 사원수, 8원수가 있다). 복소수를 벡터로 표시하는 방법을 최초로 인식한 사람은 (물리적으로) Wessel, C. (1745-1818)이다. 그는 복소수를 방향을 가진 양으로 파악하였다([5]). 복소수는 최초에 수학적으로 고안되었지만 이 당시에는 많은 물리적 응용을 갖기 시작했다([6]). 이것은 Euler, L. (1707-1783), Gauss, K. F. (1777-1855)에 의해 더욱 수학적으로 정립되었다. 특히 Gauss, K. F.는 복소수의 기하학적 표현으로 복소수를 평면으로 나타내었다. 이후 Hamilton, W. R.은 위치벡터의 개념을 창안하고 복소수를 최초로 성분표시에 의해 나타내었다([9]). 그리하여 복소수의 수체계에서의 의미, 기하학적 의미, 대수적 의미가 모두 형성되기에 이르렀다. 이러한 생각은 자연스럽게 복소수에서 벡터 일반으로 확장되었다. 즉 벡터의 기하학적 의미에 대수적 표현이 가능하게 된 것이다.

3단계 : 벡터대수학의 형성

(1) 벡터대수학의 기초

다음으로 대수적 정의는 앞서의 기하학적 정의에 의한 물리학 및 수학적인 벡터이

론의 발전과 해석기하학의 출현으로 가능하게 되었다. Descartes, R. (1596-1650)는 (유클리드)공간에 좌표를 도입함으로써 점을 대수적으로 표현하기에 이르렀다. 이것은 당시의 수학 전반에 큰 영향을 끼쳤다. 이것은 복소수에도 적용되어 Hamilton, W. R.은 최초로 복소수를 성분표시로 나타내었고 이는 자연스럽게 벡터일반으로 나아갔다. 그는 위치벡터의 개념을 창안하고 오늘날과 같이 성분표시로 나타내어 드디어 위치에는 무관한 (시점과 종점 자체는 고려하지 않는) 크기와 방향만을 갖는 수학적인 양으로서 벡터의 개념을 정립하였다. 그리고는 벡터의 합과 스칼라 곱을 성분으로 표현하였다. 이제 벡터대수학이 시작되었다고 할 수 있다. 그는 또한 대수학의 입장에서 이를 3차원으로 확장하려는 시도를 하였으며 결국 4원수를 발견하기에 이르렀다. 이것은 대수학적으로로는 비가환대수의 최초의 업적이 되었다([9]).

한편 Grassmann, H. G.에 의해 벡터는 4차원만이 아니라 고차원으로 확장되었다. 고차원 수학, 특히 고차원 대수학 및 고차원 기하학의 길이 개척된 것이다. 이후 Gibbs, J. W. (1839-1903)에 의해 내적과 외적도 성분표시가 가능해졌다.

(2) 벡터해석학의 성립과 그 이후 3가지 방향으로의 진전

Hamilton, W. R과는 다른 방향에서 Laplace, P. S. (1749-1827)는 기하학적 벡터에 미적분학을 접목하였다. 즉 벡터해석학이 시작된 것이다. 이를 정립한 사람은 Gibbs, J. W.이다([9]). 단 그들은 응용수학의 방향으로 나아갔다.

한편 Laplace, P. S.의 벡터해석학과는 달리, 기하학의 연구를 위해 기하학적 벡터에 미적분학을 접목한 사람은 Gauss, K. F.이다. 그는 매개적 형태를 적극 활용하여 곡선이나 곡면의 기하학을 연구하여 고전미분기하학을 형성하였다. 이후 Riemann, G. F. B. (1826-1866) 등에 의해 도형과 차원을 확장함으로써 현대미분기하학으로 나아갔다. 특히 벡터의 이론을 활용한 접벡터의 개념이 자연스럽게 도입됨으로써 유클리드공간과 비유클리드공간의 잇는 하나의 가교가 되었다. 접벡터의 개념은 곧 벡터장, 나아가 텐서의 개념으로 확장되었다. 이론적으로는 벡터해석학의 기초부분은 고전미분기하학의 곡선론과 곡면론의 기초이기도 하다. 그러나 고등적인 벡터해석학은 응용수학이라고 볼 수 있다. 또한 Cauchy, A. L. (1788-1857), Riemann, G. F. B. 등에 의해 복소해석학 및 복소기하학의 발전의 기틀이 마련되었으며, Grassmann, H. G. 등에 의해 고차원 수학이 함께 성장을 하기 시작했다

행렬의 개념을 최초로 도입한 사람은 Cayley, A. (1821-1895)이다. 그는 해석기하학의 도움을 받아 평면사이의 일차변환을 행렬로 표현하였다. 즉 일차함수라는 해석적 대상 또는 직선이라는 도형에 행렬이라는 대수적 표현을 부여한 것이다. 그리고 그는 행렬의 연산, 덧셈, 곱셈, 수와 행렬의 곱을 정의하였다. 이후 벡터대수학에 유사하게 Sylvester, J. (1814-1897)는 행렬대수학을 전개하였다([9]).

4단계 : 벡터의 공리적 정의

끝으로 벡터개념의 공리화는 집합론의 영향으로 일어난 20세기 초반의 공리주의 수학의 흐름 속에서 진행되었다. Galois, E. (1811-1832) 등에 의해 군론이 나온 이후 대수학의 추상화작업은 급속한 성장을 하게 되었다. 특히 Peano, G. (1858-1932)는 벡터공간의 공리적 정의의 기초를 마련하였다. 이어서 Steinitz, E. (1871-1928), Noether, A. E. (1882-1935) 등이 대수학의 추상화 기초를 확립하면서 군, 환, 체의 개념이 정립되고 전체적인 대수적 구조 속에서 벡터의 공리적 정의, 즉 (추상)벡터공간이 확립되었다([2]).

수학의 정의에서 보면 이 시기부터의 수학은 수와 형태, 운동, 변화, 공간의 연구에서 벗어나 어떤 특정 대상의 연구가 아니라 그것을 연구하는 방법 자체가 되었다. 말하자면 양식의 과학이 된 것이다([8]). 이러한 양식들은 사실적이거나 이상적일 수 있고, 시각적이거나 정신적일 수 있으며, 정적이거나 동적일 수 있고, 질적이거나 양적일 수 있으며, 실용적이거나 단지 사고게임에 불과할 수 있다. 이들은 우리 주위의 실제 세계로부터 나타날 수 있고, 공간과 시간의 깊은 곳으로부터 나타날 수 있으며, 인간 정신의 내부 작용으로부터 나타날 수도 있다.

4. 벡터개념의 강의적 체계순서

수학적 개념의 역사적 순서를 정함에 있어 결정적인 중요한 단계를 어떻게 설정할 것인가는 매우 중요한 문제이다. 수학적 위대한 탄생에 대해 역사적 체험을 목적으로 한다면 단순히 역사의 연대기적 변천과정을 사실적으로 기록하는 것만으로는 부족하다. 이에 본 논문에서는 이론적 체계, 특히 정의와 이론 전개에 맞추어 벡터개념의 발전의 4단계를 설정하였다. 말하자면 기하학적, 대수적, 공리적 정의의 3가지 정의방법과 이후의 이론 전개인 미분기하학, 응용수학, 선형대수학의 3가지 방향의 구분은 벡터의 개념이 어디에서 어떻게 극적인 탄생과 성장을 하였는지 잘 보여준다.

벡터개념의 3가지 정의방식은 각각 수학적 능력에 있어서 기본적인 3가지 능력, 즉 직관능력, 계산능력, 형식화능력과 연관된다고 할 수 있다. 더욱 흥미로운 점은 이러한 3가지 수학적 능력은 20세기 초에 등장한 3종류의 수리철학과도 대응한다. 형식주의, 논리주의, 직관주의가 그것이다. 그러한 사상은 정도의 차이는 있지만 오늘날 수학적 지식과 활동 속에 여전히 담겨있으며 또한 반영되고 있다.

이러한 고찰을 토대로 벡터개념의 강의적 체계순서를 정함에 있어 기준과 형태를 고려해 보자. 벡터의 3가지 정의에서 출발하기 때문에 형식적으로는 3≠6가지 순서가

가능하지만 아래의 3가지 형태만을 고려하는 것으로도 충분하다. 대수적 정의를 거치지 않고 곧바로 기하학적 정의에서 공리적 정의로의 이행은 역사적으로나 이론적으로나 부자연스럽기 때문이다. 또한 반대로 공리적 정의에서 기하학적 정의로의 이행 역시 마찬가지이다.

(a) 직관 강조 : 기하학적 → 대수적 → 공리적
(b) 계산 강조 : 대수적 (→ 기하학적) → 공리적
(c) 공리 강조 : 공리적 → 대수적 → 기하학적

먼저 벡터개념의 강의적 체계순서를 정하는 기준으로 공리적 정의를 삼을 수 있다. 즉 공리적 정의에서 출발하는 것과 공리적 정의를 제일 마지막으로 하는 것으로 나눌 수 있다. 위의 (a)와 (b)는 후자에 해당하고 (c)는 전자에 해당한다. 특히 (a)는 역사적 순서와 일치한다.

공리적 정의로부터 출발하는 것은 현대수학의 입장을 따르는 것이다. 현대수학은 대부분 공리주의 입장을 취하고 있기 때문이다. 이 입장은 다른 과학에 비해서 수학의 특질인 추상성과 체계성을 극명하게 드러내 보여준다. 이러한 특질은 이론적 체계를 전개함에 있어서 매우 효과적이다. 반면에 개념이나 문제해결에 있어서 직관이나 논리의 구체적인 구사능력이 약화되지 않도록 주의를 기울어야 한다.

다른 기준으로는 수학적 지식의 입장에서 고려할 수 있다. 수학적 지식은 크게 개념적 지식과 절차적 지식이라는 2가지 유형으로 나뉜다([5]). 또는 개념적 지식과 알고리즘 수학으로 구분하기도 한다([7]).

단적으로 말하면, 개념적 지식은 개념의 이해를 강조하고 절차적 지식은 기능을 강조하는 것이다. 후자는 계산능력을 중시하는 것인데, 여기에는 반복학습과 훈련이 필요하다. 수학에서 계산능력의 중요성은 말할 나위도 없다. 하지만 능숙한 계산만으로는 부족하며 개념의 이해가 요구된다. 또한 전자는 관계를 풍부하게 가지고 있는 지식이다([5]). 이러한 측면에서 볼 때 (b)는 절차적 지식을 반영하고 (a)와 (c)는 개념적 지식을 반영한다고 할 수 있다.

개념적 지식과 절차적 지식은 서로에게 도움을 주고 역할에 있어서도 역동적이라는 점에서 상보적이다. 개념적 지식은 기호나 언어에 의미를 부여하고 규칙이나 절차의 관계를 풍부하게 함으로써 절차적 지식을 선도하고 유연하게 한다. 반면에 절차적 지식은 (직관적이든 공리적이든) 개념에 언어와 절차를 제공함으로써 개념적 지식의 수준과 적용가능성을 강화하고 향상시킨다. 또한 이들의 구분은 고정된 것이 아니라 상황 속에서 역할이 전환된다는 의미에서 역동적이다. 말하자면 상황에 따라 개념적 지식이 절차적 지식이 되기도 하고 그 반대의 전환도 일어난다.

문제의 일반적인 해결기법에서 보면, 주어진 문제를 기존의 방법으로 풀기 어려운

경우에 종종 문제를 변환해서 풀고 다시 역변환 한다([10]). 여기서 변환하거나 역변환 할 때에는 개념적 지식이 중요하며 풀 때에는 절차적 지식이 필요하다. 이 또한 문제 상황에 따라서 그 역할은 역동적이다. 따라서 올바른 개념형성을 위해서 그리고 문제해결능력의 증진을 위해서는 결코 어느 한쪽만이 강조되어서는 안된다. 균형과 조화를 갖추지 못한 지식은 관계 구속적이며 단편적이며 전이가가 낮은 것이 되어버리기 때문이다.

5. 결론

서론에서 각과 벡터에 대해 개념적으로 비교하였다. 이제 결론적으로 강의적 체계순서의 관점에서 양자의 결합방식을 비교해보자. 각의 개념의 경우 강의적 체계순서의 기준은 문제해결중심이었다([4]). 그것은 각은 기하학적 개념이며 이것이 공간과 도형의 강의적 체계순서를 따라 정해졌기 때문이다. 말하자면, 공간과 도형의 순서를 정함에 있어 각의 개념을 문제해결측면에서 쉬운 것에서 어려운 것으로, 간단한 것에서 복잡한 것으로 진행하였다. 이러한 기준에 따라 크게는 4가지

평면직선도형 → 평면곡선도형 → 곡면곡선도형 → 다양체

로, 세부적으로는 8가지 형태로 주어졌다([3], [4]).

이에 비해 벡터개념은 기원이 물리적이며 그 수학적인 개념은 기하학적 정의에서 시작한다. 또한 이 경우는 기하학적(직관적), 대수적(계산적), 공리적(형식적)이라는 3가지 형태의 개념이 전부 등장한다. 이에 대해 본 논문에서는 벡터개념의 강의적 체계순서의 기준으로 2가지 사항을 고려하였다. 하나는 현대수학의 주류인 공리주의 입장의 강조에 따라 체계순서를 정하는 것이고 다른 하나는 수학적 지식의 입장에서 개념적 지식과 절차적 지식의 강조에 따라 정하는 것이다. 이로부터 전절에서 (a), (b), (c) 3가지 형태를 제시하였다.

하지만 개념적 지식과 절차적 지식은 개념형성이나 문제해결에 있어서 서로 상보적이다. 따라서 개념지도에 있어서 강의적 체계순서는 개념적 지식과 절차적 지식을 상보적으로 융합하는 방향으로 역사적 순서와 이론적 체계를 잘 결합해야 하는 것이다.

감사의 글 본 논문의 개선을 위해 심사위원의 유용하고 효율적인 지적과 조언에 깊이 감사드린다.

참고 문헌

1. 김용운, 수학사학과 수학교육, 한국수학사학회지 3(1986), 21-33
2. 김용운, 김용국, 수학사대전, 우성문화사, 서울, 1986.
3. 박홍경, 김태완, 정인철, 수학사를 활용한 수학교육II, 한국수학사학회지 17(2004), 101-122.
4. 박홍경, 김태완, 정인철, 수학교육에 있어서 각의 개념지도 방안, 한국수학사학회지 18(2005), 85-100.
5. 이건창, 수리철학, 경문사, 서울, 2000.
6. S. Bochner, "*The role of Mathematics in the rise of science*", Princeton Univ. Press, New Jersey, 1966.
7. P. Davis and R. Hersh, 양영오, 허민 역, 수학적 경험 상, 경문사, 서울, 1999.
8. K. Devlin, 허민, 오혜영 역, 수학 : 양식의 과학, 경문사, 서울, 1996.
9. H. Eves, 허민, 오혜영 역, 수학의 위대한 순간들, 경문사, 서울, 1994.
10. M. Kurita, *現代幾何學*, 筑摩書房, 東京, 1972.

On lecturing organization-order of the concept of vectors

Department of Computer Science Daegu Haany University **Hong Kyung Pak**
Department of Mathematics Education Silla University **Tae Wan Kim**
Department of Mathematics Education Kyungnam University **Young Man Nam**

There are three kinds of order of instruction in mathematics, that is, historical order, theoretical organization and lecturing organization-order. Simply speaking, each lecturing organization-order is a combination of two preceding orders. The problem is how to combine between them. In a recent paper, we concretely considered this problem for the case of the concept of angle.

The present paper analogously discuss with the concept of vectors. To begin with, we investigate theoretical organization and historical order of the concept of vectors as materials for the construction of its lecturing organization-order. It enables us to establish 4 stages in historical order of the concept of vectors proper to its theoretical organization. As a consequence, we suggest several criteria and forms for constructing its lecturing organization-order.

Key words: order of instruction, lecturing organization-order, concept of vectors, axiomatism, mathematical knowledge

2000 Mathematics Subject Classification : 97B50

ZDM Classification : G89

논문 접수 : 2006년 12 월 심사 완료 : 2007년 3 월