한국초등수학교육학회지 11(1) 1-21. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 11(1) 1-21.

십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석

김 수 정[1] · 방 정 숙[2]

본 연구는 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 곱셈을 지도하는 과정에서 학생들의 개념적 이해 과정을 면밀히 분석함으로써 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도 과정에 대한 시사점을 제공하는데 그 목적이 있다. 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들은 주어진 문제에서 각 연산의 의미를 개념적으로 이해하고 해석하였으며 그 의미에 따라 십진블록으로 모델링하여 계산하였다. 학생들은 십진블록을 이용한 계산 과정을 통해 알고리즘을 발견하고 알고리즘의 각 단계를 십진블록과 연결하여 설명함으로써 계산 원리를 개념적으로 이해하였다. 또한 소수의 곱셈 계산 결과가 올바른지 판단하고 그 이유를 십진블록으로 설명함으로써 소수의 곱셈 계산 결과를 각 연산의 의미와 연결하여 개념적으로 이해하였다. 이런 측면에서 본 연구는 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도가 초등학교 5학년 학생들의 소수의 곱셈에 대한 개념적 이해를 도울 수 있는 한 방안이 됨을 시사한다.

[주제어] 소수의 곱셈, 십진블록, 개념적 이해, 연산의 의미, 모델링

Ⅰ. 서 론

수학은 패턴을 찾고 논리적으로 사고하며 의사소통을 필요로 하는 탐구과정이다. 이런 측면에서 수학 학습 또한 사실, 절차, 규칙, 공식 등을 기계적으로 암기하는 것이 아니라 개념적인 이해를 추구하고 탐구를 수행하는데 필요한 사고 과정을 발달시키는 것이어야 한다. 이를 위해서는 학생들이 수학을 직접 해보고 이를 토대로 수학에 대해 논의하는 공동체에 능동적으로 참여하게 하는 수업이 이루어져야 한다(Baroody & Coslick, 1998). 이를 위한 노력의 일환으로 현행 초등 수학 교육에서는 활동주의 학습 원리를 적용한 교수 · 학습을 강조하고 있으며 학습 지도 과정에서 구체적 조작 및 교구 활용을 적극 권장하고 있다(교육부, 1998).

일찍이 Dienes도 구체물을 통한 학습을 강조하였고 수학적 구조를 구체화할 수 있는 여러 가지 교구를 개발하였는데(Resnick & Ford, 1981), 그 중 하나가 'Dienes 블록'으로 우리나라 교과서에서는 기수를 10으로 하는 십진블록이 제시되어 있다. 십진블록은 초등학교 전 학년에 걸쳐 이용될 수 있는 교구로써 연산에 대한 의미를 형성하고 연산의 성질과 알고리즘을 발견하는 데 도움을 줄 수 있다(김남희, 1999; 이소연, 2001; 정유경, 2004).

초등 수학의 상당 부분은 수와 연산을 이해하고 계산을 능숙하게 하는 데 초점을 둔다.

---

1) [제1저자] 부산신천초등학교
2) 한국교원대학교 초등교육과

그러나 대부분의 학생들은 수와 연산에 대한 학습을 어려워하고 재미없어하며 배운 내용에 대한 많은 오류를 가지고 있다. 특히 소수 개념 및 소수 연산 지도에서 이런 현상은 두드러지게 나타나며, 소수 연산 중 소수의 곱셈과 나눗셈에서 오류가 더 많이 발생한다(이경아, 1996; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson & Peled, 1989).

학생들이 소수 학습을 어려워하는 이유는 자연수와 자리값에 대한 이해를 바탕으로 1보다 작은 수를 나타내기 위한 10진법의 자리체계의 자연스런 확장으로 소수를 이해하고, 분모가 10의 거듭제곱인 분수로서 소수를 이해하는 확고한 개념적 기초가 없기 때문이다(National Council of Teachers of Mathematics, 2000).이러한 어려움을 해소하기 위한 방안 중의 하나로 선행 연구에서는 소수와 소수 연산의 개념적 이해를 돕는 구체물로 십진블록을 공통적으로 제시하고 있다(김용태, 2002; Drexel, 1997; Hiebert & Wearne, 1986). 하지만, 구체적으로 십진블록을 활용하여 학생들의 개념적 이해를 어떻게 증진시킬 수 있는지 그 과정을 상세히 분석한 연구는 드물다[3].

이와 같은 연구 배경을 바탕으로 본 연구는 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 곱셈을 지도하는 과정에서 학생들의 개념적 이해 과정을 면밀히 분석함으로써 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도 과정에 대한 시사점을 제공하는데 주요 목적이 있다. 특히, 현행 교과서에서는 자연수 연산 지도와 비교해 볼 때 상대적으로 소수 연산 지도에서는 구체적 조작활동이 매우 부족한 형편이기 때문에 구체적인 수업 사례를 제공함으로써 소수 곱셈 지도에 있어서 개념적 이해를 증진하는 방안을 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

II. 이론적 배경

1. 소수 개념 및 소수 계산 오류와 관련된 연구

소수의 개념과 관련된 오류는 흔히 소수의 크기 비교에서 빈번히 발생한다. 예를 들어, 비교되는 소수의 자연수 부분이 같을 때 학생들은 소수의 자릿수가 많을수록 더 크다고 생각하거나(예, 3.214>3.8), 반대로 소수의 자릿수가 작을수록 더 크다고 생각한다(예, 3.8>3.92). 한편 여러 개의 소수를 한꺼번에 비교하는 경우 소수점 바로 다음에 1 또는 0이 있을 때는 제대로 비교를 하는 반면에, 그 다음에는 소수점 아래 더 많은 자릿수를 가진 수가 더 크다고 판단하기도 한다(Sackur-Grisvard & Leonard, 1985).

소수 개념과 마찬가지로 소수 계산에서도 학생들은 여러 가지 오류를 범한다. 최근 우리나라에서 연구된 내용을 중심으로 소수 계산 오류의 유형을 살펴보면 먼저 주어진 문제를 분수로 바꾸어 풀 때 생기는 오류로는 학생들이 주어진 소수를 분수로 바르게 바꾸지 못하는 경우와 분수 계산을 제대로 하지 못하는 경우가 있다. 주어진 문제를 소수로 바꾸어 풀 때 생기는 오류로는 자연수 계산 오류가 가장 많이 발생하는데 특히, 소수의 곱셈에서는 0이 있는 곱셈 문제를 더욱 어려워한다. 소수의 곱셈에서의 오류 유형을 구체적으로 살펴보면 소수점 오류, 알고리즘 오류, 0처리 오류, 기술적 오류, 자연수 곱셈 오류, 덧셈 오류 등이 있으며 그 중 가장 빈도가 높은 유형이 소수점 오류, 자연수 곱셈 오류, 알고리즘 오류 순이다(윤희태, 2002; 이경아, 1996).

3) 예외적으로는 소수 계산에서 오류를 보이는 학생들을 대상으로 십진블록을 활용하여 교수 실험을 한 결과 소수 개념의 이해를 돕고 계산 원리를 직접 모델링함으로써 선행지식을 유용하게 연결시켜 소수 계산에서 나타나는 오류를 줄일 수 있다는 연구가 있다(방정숙·김재화, 2006).

이러한 오류의 원인은 분수의 개념 및 소수와의 상호관계에 대한 이해 부족, 자리값에 대한 이해 부족, 자연수의 기초 계산 능력의 부족 등 선행지식과 밀접하게 관련되어 있다. 이와 관련하여 십진블록을 활용한 구체물의 조작 활동은 소수 개념의 이해를 돕고 계산 원리를 직접 모델링함으로써 선행지식을 유용하게 연결시켜 소수 계산에서 나타나는 오류를 줄일 수 있는 효과적인 방법이 될 수 있다(Baroody & Coslick, 1998; 방정숙·김재화, 2006).

2. 소수 지도 과정 분석에 관한 연구

학생들이 소수와 소수의 연산을 개념적으로 이해하지 못하고 계산 과정에서 오류가 많이 발생하면서 소수 지도 과정에 관심을 가지는 연구가 이루어졌다. 그 중에서 교과서 분석을 토대로 소수 지도의 개선 방향을 제시한 연구들을 검토해 보면 다음과 같다.

먼저 미국의 소수 지도를 분석한 연구(Hiebert & Behr, 1988)를 살펴보면 초등학교에서 0과 자연수, 분수, 소수를 각각 분리하여 가르치고 있어 대부분의 학생들이 0과 자연수, 분수, 소수를 연결하여 개념을 이해하지 못하고 있는 것으로 드러났다. 또한 분수와 소수에 대한 개념적 이해 없이 여러 가지 기호 조작법을 기억하도록 강조하여 학생들이 실생활에서 0과 자연수, 분수, 소수를 의미있게 적용하지 못하며 전반적으로 소수 계산의 학업성취도가 낮은 것으로 드러났다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 Hiebert(1992)는 소수의 자릿값을 강조하고 소수와 분수를 연결하여 지도하며, 알고리즘은 기호와 개념 및 원리에 연결하고 개념이나 연산은 실생활과 연결하여 지도하며, 계산 결과를 실생활에서 일어나는 문제에 대응시켜서 검증할 수 있도록 지도하여야 한다고 제안한다.

한편, 우리나라의 소수 지도와 관련된 교과서를 분석한 연구(김용태, 2000)를 살펴보면 소수가 발달되어 온 과정을 고려하지 못한 채 십진분수를 다루는 상황이나 문제 없이 소수의 도입부분에서 십진분수가 곧바로 소수로 표기된다. 또한 소수 지도는 십진분수의 동치류, 자연수의 확장으로 도입되기는 하지만 소수와 분수, 자연수와의 표기체계에 대한 유사점과 차이점을 인식시키는 설명이나 연습이 부족하며 동치소수에 대한 언급 없이 동치소수가 연산의 과정이나 결과 처리에 등장한다. 그리고 구체적인 조작활동을 통하여 개념을 이해하도록 교과서가 구성되어 있지 않다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 소수 지도의 개선방향으로 0과 자연수, 분수, 소수의 표기체계의 유사점과 차이점을 지도하고 세 수를 하나의 문제 상황에서 다루어 서로 연결되도록 하며 소수를 십진분수의 동치류와 연결시켜서 지도하여야 한다고 제안한다.

한편, 학생들이 소수와 소수의 연산에 대해 개념적으로 이해하도록 돕기 위해서는 소수 지도에 관한 분석 결과를 바탕으로 새로운 지도 방향을 모색하는 교사의 역할이 필요하다. 소수와 소수의 연산을 실생활 상황 속에서 의미 있게 지도하여야 하며 소수와 십진분수를 연결하고 알고리즘을 기호와 개념 및 원리에 연결할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

3. 구체적 조작 활동을 통한 소수 지도에 관한 연구

소수 학습에 대한 학생들의 개념적 이해를 돕기 위한 새로운 지도 방법을 모색한 연구들은 기본적으로 구체적 조작활동을 통하여 소수와 소수 연산을 이해하도록 하였다. 먼저 소수의 특징에 맞게 구체물 자료를 개발하여 학생들을 지도한 연구(김자영, 1993)를 살펴보면 연속적 자료와 이산적 자료[4)]로 구체물을 구안하여 새롭게 소수 단원을 제작하였다. 이를 현장에 직접 적용해보고 그 학습 효과를 비교해 본 결과 소수의 개념적 특징을 강조

한 구체물 자료 학습은 효과적이며 특히 이산적 자료를 활용한 학습이 학생들의 수 개념 사고 활동을 더욱 증진시킨다고 하였다. 또한 소수의 본질에 입각한 소수 지도를 강조한 연구(김용태, 2000)를 살펴보면 소수의 비 개념과 십진분수의 동치류 개념을 심어주기 위해 클립의 무게를 재는 활동을 제시하였으며, 작용소(배)개념과 선형사상으로서 소수 개념을 이해시키기 위해 도형을 축소하여 닮은 도형을 그리는 활동을 다루었다.

한편, 소수 개념 지도에 십진블록을 활용한 연구를 살펴보면 먼저, 기호의 의미에 대한 이해와 소수의 덧셈, 뺄셈에 초점을 두고 십진블록을 활용한 연구(Hiebert & Wearne, 1986)가 있다. 이는 십진블록이 소수의 덧셈과 뺄셈에 대한 개념적 이해를 돕는 유용한 구체물임을 제안한다. 또한 소수를 십진분수와 연결하여 지도하기 위해 십진블록을 활용한 연구(Drexel, 1997)가 있다. 소수를 십진분수와 연결하여 이해하기 위해서는 구체물의 조작활동을 통하여 분수를 표현하고 주어진 수를 소수와 분수로 동시에 표현하는 지도가 필요하며, 십진블록은 소수를 십진분수와 연결하여 이해하도록 돕는 유용한 구체물로 제시하고 있다. 또한 기호를 십진블록과 연결하고 알고리즘을 십진블록과 개념 및 원리와 연결하여 지도함으로써 학생들의 소수에 대한 개념적 이해를 도울 수 있다고 설명한다.

이와 같은 선행연구들을 검토해보면, 몇몇 예외적인 연구를 제외하고는 전반적으로 소수 개념 및 소수 연산 지도와 관련된 연구가 상대적으로 미흡함을 알 수 있다. 특히 소수 학습에서 학생들의 개념적 이해를 돕기 위해 십진블록과 같은 구체적 조작활동을 통한 지도 가능성을 제시하고는 있으나 구체적인 실증 연구는 찾아보기 어렵다. 이에 본 연구는 소수의 곱셈을 배우는 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 지도해 보고, 그 개념적 이해 과정을 상세하게 분석하고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구를 위해 부산광역시에 위치하고 있는 S초등학교의 5학년 2개 학급을 연구대상으로 선정하였다[5]. S초등학교는 주택가에 위치한 학교로 학생들의 학력수준은 부산광역시에서 중위수준이며[6] 가정의 사회·경제적 수준도 대체로 중위에 해당한다.

A교사의 학급 학생은 남 15명, 여 14명으로 모두 29명이다. A반은 기본적인 학습 훈련이 잘 이루어져 있었으며 학생들의 학습태도가 바르고 차분하였다. A교사는 교육 경력이 6년인 여교사로 교육대학교 초등수학교육학과를 졸업하였고 수학 교과 연구회에 참석하고 있으며 수학과에 관심을 가지고 학생들을 지도하고 있었다. B교사의 학급 학생은 남 15명, 여 13명으로 모두 28명이다[7]. B반은 기본적인 학습 훈련이 상대적으로 미흡하였으며 학생

4) 연구자는 'discrete physical representation'을 '단속적 자료'로 번역하여 사용하였으나, 본 요약에서는 보다 일반적으로 많이 활용되는 이산적 자료라는 용어를 사용하였다.

5) 여기서 2개 학급을 선택한 이유는 비교 목적이 아니라 연구의 신뢰도를 높이기 위한 방안 중의 하나로 동일한 지도 과정을 2개 학급에 적용해 봄으로써 교사, 학생, 또는 학급 분위기에 관계없이 소수 곱셈과 관련한 개념적 이해와 관련하여 공통적으로 드러나는 특성을 찾고자 함이다. 다만 본 논문에서는 지면의 한계상 구체적인 에피소드는 한 반의 사례를 중심으로 기술한다.

6) 두 반 모두 기본적인 학습 상태는 양호한 편이었으나 선수학습에 대한 이해 부족으로 수학을 어려워하는 학생들이 각각 5명 정도 있었다. 이 학생들은 특히 분수와 소수에 대한 개념적 이해가 부족하여 이와 관련된 단원을 학습할 때 어려움을 겪었다. 4-나 소수 단원 진단 평가를 해본 결과 60점 이하의 점수를 받은 학생들이 A반은 4명, B반은 3명이었다.

들의 학습태도가 조금 산만하였고 자신의 의견을 발표하는데 소극적이었다. 그러나 교사의 노력과 칭찬으로 수업이 진행될수록 많은 학생들이 발표에 적극적으로 참여하였으며 학습 태도도 정착되었다. B교사는 교육 경력이 2년인 여교사로 교육대학교 초등수학교육학과를 졸업하였고 수학과와 관련하여 올해 처음으로 수학 교과 연구회에 참석하였다.

2. 연구 방법

본 연구는 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정을 상세히 분석하기 위해 질적 사례연구방법을 사용하였다. 사례연구는 무엇보다 연구자가 결과보다는 과정에 관심을 두고 있을 때 적합한 연구방법이다(방정숙, 2001; Merriam, 1998). 본 연구는 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 곱셈을 지도한 후, 십진블록의 효과에 관한 검증에 초점을 두는 것이 아니라 소수의 곱셈에 대한 학생들의 개념적 이해 과정에 관심을 두고 면밀히 분석하는 데에 목적이 있기 때문에 사례연구를 선택하였다.

또한 사례연구는 연구자가 "어떻게"라는 질문에 대해 알고자 할 때 효과적이다(Yin, 2002). 본 연구는 십진블록을 활용한 소수의 곱셈과 나눗셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들이 연산의 의미와 결과를 어떻게 이해하여 모델링하고 십진블록을 이용한 계산 과정을 알고리즘과 어떻게 연결하여 나타내고 이해하는가에 대해 자세히 설명하므로 사례연구가 유용하다고 할 수 있다.

3. 자료 수집 및 분석

연구대상으로 선정된 두 교실에서 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 수업을 녹화하였다. 초등학교 5-나에서 다루는 소수의 곱셈 내용을 분석한 후 십진블록을 이용하여 동수누가, 묶음, 넓이의 의미로 지도할 수 있도록 교과서를 재구성하고 교수·학습 과정안을 작성하였다. 교과서의 전체적인 틀을 유지하면서 곱셈의 의미와 결과 어림하기, (소수)x(자연수), (대소수)x(자연수), (자연수)x(소수), 곱의 소수점 위치 알기, (소수)x(소수), (대소수)x(대소수)의 학습 주제를 각각 1차시씩 다루었다. 그런 다음, 8차시에서는 5개의 식을 제시하고 하나를 골라 학생들 스스로 적절한 문장제를 직접 만들어본 후, 해결해 보게 하였다.

연구대상 교실 각각에서 한 번의 예비 녹화 후에, 전체 16개의 수학 수업을 교실 상황에 따라서 전체 수업 과정과 활발하게 토의가 이루어지는 소집단 활동을 중심으로 2개의 카메라를 통하여 녹화하였다. 또한 수업과 관련된 학생들의 소수 진단평가지, 십진블록 도입 활동 학습지, 재구성한 소수의 곱셈 교과서, 소수의 곱셈 평가지, 수학일지 등을 모두 수집하였다. 한편, 선정된 두 교사를 대상으로 수업을 마친 후, 수업에서 불분명한 점을 분명히 하고 특별한 상황에 대한 교사의 의도를 알아보기 위해 비구조화된 면담을 실시하였다. 또한 수업에서 나타난 학생들의 반응, 활동에서 학생들의 의도를 알아보아야 할 경우 해당 학생을 대상으로 비구조화된 면담을 실시하였다. 면담한 자료는 녹음하여 분석의 자료로 활용하였다.

교사와 학생의 전체 활동을 녹화한 교실 수업 자료와 소집단 활동을 녹화한 자료를 중심으로 트랜스크립트를 만들어 수업 에피소드를 중심으로 학생들의 개념적 이해 과정을 분석하였다. 두 교실에서 나타나는 공통되고 일관된 특징적인 상황을 바탕으로 십진블록을

7) 두 반에서 각 1명씩 특수교육대상아동이 있어 본 연구대상에서는 제외하였다.

활용한 소수의 곱셈 지도가 학생들의 개념적 이해 과정에 어떤 도움을 주었는지 분석하였다. 구체적으로, 재구성한 교과서에 학생들이 어떻게 반응하였는지 살펴보면서 각 차시마다 학생들이 소수의 곱셈의 의미를 어떻게 이해하여 십진블록으로 모델링하는지, 십진블록으로 계산한 과정을 알고리즘과 연결하여 어떻게 이해하고 있는지를 분석하였다. 그리고 수학일지에 정리한 학생들의 생각을 살펴보면서 소수의 곱셈에 대한 결과의 합리성을 판단하고 그 이유를 십진블록으로 어떻게 설명하는지, 세로셈으로 계산한 각 단계를 십진블록과 연결하여 이해하는지를 분석하였으며 수업 내용과 관련하여 새롭게 알게 되거나 느낀 점, 이해가 되지 않거나 어려운 내용 등을 파악하였다. 한편, 15문항의 평가 문제를 출제하여 소수의 곱셈에 대한 학생들의 전반적인 이해 정도를 종합적으로 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 연산의 의미에 대한 이해와 모델링8)

가. 동수누가의 의미에 대한 이해와 모델링

학생들에게 자연수의 곱셈 의미를 생각해 보게 한 다음 소수의 곱셈 의미를 유추하게 하자, 동수누가의 의미를 쉽게 파악하였다. 이에 대해 대표적인 수업 에피소드를 중심으로 기술하고자 한다. 다음 <에피소드 MG-1>은 주어진 문제 상황을 1.5×3으로 표현하고 이를 십진블록으로 모델링한 다음 소집단 내에서 서로 설명하는 과정 중의 일부이다9).

<에피소드 MG-1> 1.5×3의 모델링에 대한 설명

압정 한 개의 길이는 1.5cm입니다. 압정 3개를 이은 길이는 몇 cm입니까?

남호: (막대블록 1개, 단위블록 5개를 3번씩 가져옴. 막대블록 3개와 단위블록 15개를 모으면서) 단위블록이 15개잖아. 단위블록 10개를 막대블록 1개와 교환하면 이건(단위블록) 없어지고 (막대블록 1개를 가져오고 단위블록 10개를 왼손에 담음). 막대블록은 1, 단위블록은 0.1이잖아. 4 더하기 0.5를 하면 4.5가 나온다. 답은 4.5다.

찬호: 봐래이. 이게 0.5가 몇 개고? (단위블록을 모두 한 곳에 모으며) 5개씩 3번 더하면은 15개잖아. (막대블록 3개를 모으며) 일단은 '일'끼리 더해주고 나머지 이거는(단위블록) 십이 넘잖아. (단위블록 10개를 왼손에 잡아 위로 밀고 막대블록 1개를 가져옴) 막대블록 하나로 교체해주는 거야. 나머지 이거는(단위블록) 10개가 안되잖아. (남은 단위블록 5개를 막대블록 4개 옆에 놓으며)그러니까 그냥 보내주는 거야. 그러면 4.5.

남호의 설명을 살펴보면 막대블록 3개와 단위블록 15개로 같은 블록끼리 모아서 모델링하였다. 그 이유는 일단은 '일'끼리 더해준다는 찬호의 설명에서 확인할 수 있다. 즉, 막대블록은 일의 자리, 단위블록은 소수 첫째 자리로 구분해서 모델링하고 있는 것이다. 남호는 답을 말할 때도 '막대블록은 1, 단위블록은 0.1'이라는 각 블록의 소수의 자리값을 확인

8) 본 연구에서 다룬 연산의 의미는 동수누가, 묶음, 넓이이다. 이 각각의 의미에 따라 십진블록으로 모델링하는 과정이 달라진다.

9) 에피소드에서 소집단 활동은 MG로, 전체 수업 활동은 MA로 구분하여 제시하였으며 학생들의 이름은 모두 가명이다. 지면의 제한으로 A교실을 중심으로 기술하였기 때문에, 결과 분석에서 특별히 A교사와 B교사로 구분하지는 않는다.

하며 설명하였다. 이렇게 십진블록으로 모델링하는 과정은 소수의 자리값을 쉽게 확인할 수 있어 계산한 후 소수점을 찍는 과정에서의 실수를 줄일 수 있다. 남호와 찬호는 모델링하는 과정에서 단위블록이 15개이므로 그 중 10개를 막대블록 1개와 교환하였다. 단위블록 10개를 막대블록 1개로 교환하는 개념을 모델링하는 과정에서 직접 확인하였다. 이는 세로셈에서 일의 자리로 '1'을 받아올림하는 계산 과정을 이해하는데 도움이 된다.

나. 묶음의 의미에 대한 이해와 모델링

소수의 곱셈 의미를 지도할 때 동수누가, 넓이의 의미와는 달리 학생들이 묶음의 의미를 처음에는 생소해하였다. 이에 교사는 실생활 소재(예, 빵을 만들기 위해 0.5L짜리 우유의 $\frac{3}{10}$을 넣었을 때 빵에 넣은 유유)를 중심으로 이를 그림으로 나타내 보게 하고 학생들과 그 의미에 대해 이야기함으로써 묶음의 의미를 구별할 수 있게 하였다. 한편, 묶음의 의미를 십진블록으로 모델링할 때는 단위블록을 1로 정할 수 없기 때문에 기준을 정하는 것에 유의해야 한다. 예를 들어, (자연수)×(소수)의 문제에 대해서 십진블록으로 모델링할 때, 단위블록보다 작은 블록이 없기 때문에 즉, 단위블록을 1로 볼 경우 0.1에 해당하는 블록이 없기 때문에 막대블록을 1로 사용해야 한다. 이와 같이 학생들은 여러 가지 블록을 융통성 있게 필요에 따라 재정의하는 것에 대해서 의외로 어렵지 않게 할 수 있었다. 다음 <에피소드 MG-2>는 주어진 문제와 관련해서 교사가 기준에 대해서 학생들과 먼저 이야기를 나눈 다음, 막대블록을 기준으로 정하여 묶음의 의미로 모델링할 수 있도록 안내한 다음, 소집단 별로 직접 해 보면서 설명하게 한 경우이다.

<에피소드 MG-2> <u>2×0.6의 모델링에 대한 설명</u>

민지는 길이가 2m인 막대의 $\frac{6}{10}$을 파란색으로 색칠하였습니다. 파란색으로 색칠한 리본의 길이는 몇 m입니까?

찬호: 내가 설명할게. (막대블록 1개를 들고) 하나, 둘, 셋, 넷, 다, 여섯칸이다 아니가? 이 한 칸은 뭐랑 같지?
학생들: 단위블록 1개
찬호: 맞제. 이 여섯 개는 뭐로 바꾸지?
학생들: 단위블록 6개
찬호: (단위블록 6개를 놓음)
현영: 막대블록도 하나 놓아야지!
찬호: 있제. 이게 6개면은 아까 그거랑(막대블록 1개의 $\frac{6}{10}$) 똑같잖아. 일단 한 개는 해결됐어. (막대블록을 옆에 놓으며) 나머지 한 개는 이것도 0.6까지니까 (단위블록 6개를 놓으며) 6개 가져왔어. (막대블록을 옆에 놓으며) 6개 맞잖아. 이 두 개를 더하면 1이 넘잖아. (막대블록 옆에 단위블록 12개를 한줄로 세우며) 넘제. 그러면은 뭘로 교환해야 되지?
학생들: 막대블록 1개
찬호: 이 10개를 막대블록으로 교환하면 1.2

학생들은 막대블록의 한 칸 즉, 막대블록의 $\frac{1}{10}$은 단위블록과 같으므로 막대블록을 $\frac{6}{10}$

만큼 묶기 위해서는 단위블록을 가져와야 함을 이해하였다. 각 블록에는 단위블록이 몇 개 포함되어 있는지 알 수 있도록 선으로 분할되어 있기 때문에 이를 쉽게 이해할 수 있었던 것 같다. 따라서 찬호는 단위블록 6개를 가져와서 책상 위에 놓았다. 이때, 현영이는 찬호에게 "막대블록도 하나 놓아야지."라고 말하였다. 이는 막대블록의 $\frac{6}{10}$만큼을 묶었으므로 그 상황을 정확하게 나타내기 위해서는 막대블록 옆에 단위블록 6개를 놓아야 한다는 것을 알려준 것이다. 즉, 단위블록 6개만 놓아두면 막대블록의 $\frac{6}{10}$묶음인지, 그냥 단위블록 6개를 가져온 것인지 구분할 수 없으므로 단위블록 6개 옆에 막대블록을 놓아야 된다고 말한 것이다. 찬호는 이러한 현영이의 생각을 받아들여 남은 막대블록 1개를 $\frac{6}{10}$만큼 묶을 때에는 단위블록 6개 옆에 막대블록 1개를 놓고 $\frac{6}{10}$묶음이 맞는지 소집단 학생들에게 확인시켰다.

일부 소수의 학생들은 2×0.6이 2의 부분이라는 점 즉, 2의 $\frac{6}{10}$이라는 점을 인식하지 못하고 0.6×2로 바꾸어 동수누가의 의미로 모델링하거나 2×0.6을 막대블록 2개와 단위블록 6개를 가지고 와서 모델링하였으며 막대블록 1개만 $\frac{6}{10}$만큼 단위블록으로 묶기도 하였다. 이런 오류는 초등학생에게는 흔한 일이다. 왜냐하면 묶음의 의미와 곱셈식에서 각 숫자가 무엇을 나타내는지를 명확하게 알지 못하기 때문이다(Baroody & Coslick, 1998). 특히 4-가 소수 진단 평가에서 소수 사이의 관계를 제대로 이해하지 못한 학생들이 이와 같이 모델링을 하였다. 소수 사이의 관계를 이해하지 못한 학생들이 묶음의 의미를 이해하여 십진블록으로 모델링하는 것은 어려운 일이다. 그러나 대부분의 학생들은 2×0.6을 묶음의 의미로 모델링하였으며, 다른 문제를 묶음의 의미로 해석하여 십진블록으로 모델링하는 반복적인 과정을 통해 처음에는 이해하지 못한 학생들도 묶음의 의미를 이해하여 모델링하였다.

다. 넓이의 의미에 대한 이해와 모델링

넓이의 의미 자체는 학생들이 쉽게 이해하였으나, 이를 십진블록으로 모델링하기 위해서는 길이기준과 넓이기준을 동시에 생각해야 하는 어려움이 있다(Baroody & Coslick, 1998). 이에 교사는 십진블록 도입 활동에서 판블록의 한 변의 길이를 1로 볼 때의 판블록의 넓이, 막대블록 각 변의 길이와 넓이, 단위블록 각 변의 길이와 넓이가 얼마인지 알아보게 한 후, 넓이의 의미를 십진블록으로 모델링하게 하였다. 예를 들어, "효정이는 미술시간에 가로가 0.5m이고 세로가 0.3m인 직사각형 모양의 포장지를 만들었습니다. 이 포장지의 넓이는 몇 ㎡입니까?"라는 문제에 대해서 모델링하게 하자, 일부 학생은 습관적으로 막대블록을 1로 보고 기준을 나타내는 막대블록을 가지고 와야 한다고 말하였다. 하지만, 다른 학생들의 도움으로 문제에서 제시한 길이가 가로가 0.5이므로 한 변의 길이가 0.1인 단위블록을 가져와야 한다고 수정하게 되었다. 결과적으로 학생들은 단위블록으로 가로가 5개, 세로가 3개인 직사각형을 만들게 되었다.

그런 다음, 학생들은 단위블록의 넓이기준인 0.01을 이용하여 넓이를 계산하였다. 학생들은 소집단 활동을 통해 넓이를 계산하는 방법이 두 가지가 있음을 발견하였다. 첫 번 째 방법은 단위블록이 15개 있고 단위블록 1개의 넓이가 0.01이므로 직사각형의 넓이는 0.15

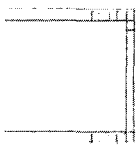
라고 설명하였다. 두 번째 방법은 단위블록 10개를 막대블록 1개로 교환해보자고 제안하여 단위블록 10개의 넓이는 막대블록 1개의 넓이와 같음을 이용하였다. 즉, 막대블록 1개는 0.1이고 단위블록 1개는 0.01이므로 넓이는 0.15라고 설명하였다. 소집단에서 학생들은 주어진 문제 상황이나 식을 자신이 직접 십진블록으로 모델링하면서 직사각형으로 나타낸 다음 '신기하다'고 표현하였으며, 소수의 곱셈을 십진블록으로 만든 직사각형이라는 도형을 가지고 계산하는 것이 재미있다고 말하기도 하였다.

한편, 교사는 (대소수)×(대소수)도 단위블록으로 넓이 모델을 만들 수 있을지 질문하여 학생들이 어떤 블록을 사용하면 넓이 모델을 쉽게 만들 수 있는지 도전해보게 하였다. <에피소드 MG-3>에서는 학생들이 소집단 활동을 통해 1.5×1.3의 넓이 모델을 어떻게 만들어나가는지를 확인할 수 있다.

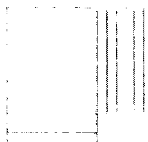
<에피소드 MG-3> 1.5×1.3을 넓이 의미로 모델링하기

효진이 아버지는 가로가 1.5m이고 세로가 1.3m인 직사각형 모양의 책상을 만들었습니다. 이 책상의 넓이는 얼마입니까?

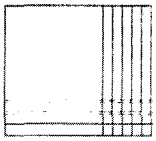
우진: 판블록을 1로 하자.
혜진: 일단 각자하고 설명하자.
우진: 판블록 1개, 막대블록 5개, 판블록 1개, 막대블록 3개, 1.5, 1.3
성진: (판블록을 놓으며 1이라고 말함. 막대블록을 가로로 놓는 시늉을 한다.)
혜진: 1.5가 되니까……. (막대블록을 가로로 1개 놓고 그 옆에 단위블록을 5개 놓으며) 단위블록이 안되면 …….
우진: (판블록 1개 옆에 막대블록 5개 놓는다.)
혜진: (판블록 1개, 막대블록 5개 가져온다. 검지 손가락으로 가로에 선을 그으며) 1.5! 가로가 1.5면 세로가 1.3이 와야 되는데. (판블록 밑에 단위블록을 놓기 시작한다.)
성진: (아래 그림과 같은 모양으로 모델링한다.)



우진: 설명을 해야지!
혜진: (단위블록을 치우고 막대블록을 가지고 와서 놓는다.)
우진: (아래 그림과 같은 모양으로 모델링 하며) 이렇게 하면 안되나?



혜진: (빈 공간을 가리키며) 여기는?
우진: (장난을 치면서 판블록을 갖다놓는다.)
혜진: 단위블록으로 채워야지! (우진은 빈 공간을 단위블록으로 채운다.) (우진이의 넓이 모델을 가리키며) 야, 저거 좋은 방법이다. 이게 1.5, 이게 1.3. 맞다! 네가 설명해봐봐.
우진: 판블록의 가로가 1이고 세로가 1이면 막대블록은 가로가 1, 세로가 0.1이니까 판블록 1개하고 막대블록 5개를 놓고 세로에는 막대블록 3개를 놓고 빈공간에는 단위블록으로 채운다.



학생들: (가로가 1.5, 세로가 1.3이 되게 막대블록과 단위블록을 놓는다. 아래로 막대블록과 단위 블록을 채워나간다.)
남호: (가로가 1.5, 세로가 1.3이 되도록 막대블록과 단위블록을 이용하여 직사각형의 테두리를 만든다.)
찬호: (막대블록을 3개 정도 놓다가 판블록을 가져온다. 교사가 판블록을 가져온 이유를 묻자, '1.3이 1이니까'라고 대답함)
남호: (직사각형 안에 채워야 되지 않느냐는 교사의 질문에 고민하다 직사각형 테두리 안에 판블록을 놓는다.)
찬호: 먼저 판블록을 갖다놓고.
현영: 나는 제일 나중에, 제일 끝에 갖다 놓을거다!
찬호: (판블록 아래에 막대블록 3개를 갖다놓는다. 그 옆에 단위블록을 채운다. 단위블록을 계속 가져오다가 막대블록 5개를 가져온다. 나머지 빈 공간을 단위블록으로 채운다.)
현영: 막대블록 10개를 판블록으로 교환했다!

위 에피소드에서 보듯이 학생들마다 1.5×1.3을 넓이 모델로 모델링하는 과정이 조금씩 달랐다. 처음부터 판블록을 가지고 넓이 모델을 만든 우진이는 다른 학생들처럼 단위블록을 막대블록으로, 막대블록을 판블록으로 교환하는 과정이 없어 제일 먼저 넓이 모델을 만들었다. 빈 공간을 단위블록으로 채워보라는 혜진이의 충고를 듣고 넓이 모델을 완성하였다. 이와 같이 소집단 활동을 통해 모델링하는 과정에서 학생들은 서로의 모델을 보고 교정해주거나 자신의 모델을 수정하였다. 또한 자신이 모델링한 과정을 다른 사람에게 설명하고 다른 사람이 모델링한 과정을 들으면서 그 과정이 맞는지 확인하는 기회를 가졌다.

혜진이는 막대블록과 단위블록으로 1.5를 놓다가 막대블록 대신에 판블록을 놓았다. 세로 길이가 1.3이 되도록 판블록 밑에 단위블록을 놓다가 단위블록들을 막대블록으로 바꾸었다. 찬호도 혜진이처럼 모델링하는 과정을 반성하고 좀더 간단하고 편한 방법을 생각하면서 활동하였다. 남호는 막대블록과 단위블록으로 직사각형의 둘레를 먼저 만들었으며 일부 학생들도 이렇게 모델링을 하였다. 직사각형의 안을 채워야 되지 않느냐는 교사의 질문에 판블록으로 바꾸는 학생들도 있었고 그 모양을 유지한 채 판블록을 넣은 다음 빈 공간을 막대블록과 단위블록으로 채워나가는 학생들도 있었다. 그러나 대부분 이러한 과정은 소집단활동에서 토의과정을 통해 수정되었다.

특이하게도, 현영이는 막대블록과 단위블록만 가지고 직사각형을 만들어 나갔다. "제일 나중에, 제일 끝에 갖다 놓을거다."라는 말에서 알 수 있듯이, 막대블록과 단위블록으로 직사각형을 완성한 다음, 직사각형의 어느 부분이 판블록으로 교환되는지 확인하기를 원하였다. 그래서 직접 판블록을 자신이 만든 직사각형 위에 놓아보고 판블록으로 교환하였다. 이처럼 학생들은 자신들에게 의미 있는 방법으로 1.5x1.3을 십진블록으로 모델링할 수 있었고, 다양한 방법으로 직사각형을 만드는 과정에 대해 재미있어 했다.

2. 십진블록을 이용한 계산 과정과 알고리즘과의 연결[10]

10) 단원의 특성상 각 차시별로 십진블록을 이용한 계산 과정과 알고리즘을 연결하는 내용을 포함하

가. (대소수)×(자연수)를 십진블록으로 계산한 과정과 알고리즘 연결

교사는 1.5×3을 십진블록으로 계산한 과정을 세로셈으로 나타내게 한 다음, 학생 1명을 지명하여 칠판에 적어보게 하였다. 그 학생은 소수 첫째 자리에 5를 적고 일의 자리에 1을 올려준 다음 4를 적고 소수점을 찍었다. 교사는 답이 4.5가 나왔으며 일의 자리에 1을 올려준 것을 다시 한번 확인시킨 다음 <에피소드 MA-1>과 같이 십진블록으로 계산한 과정을 세로셈과 연결하여 생각할 수 있도록 안내하였다.

<에피소드 MA-1> <u>1.5×3 십진블록을 이용한 계산 과정과 세로셈의 연결</u>

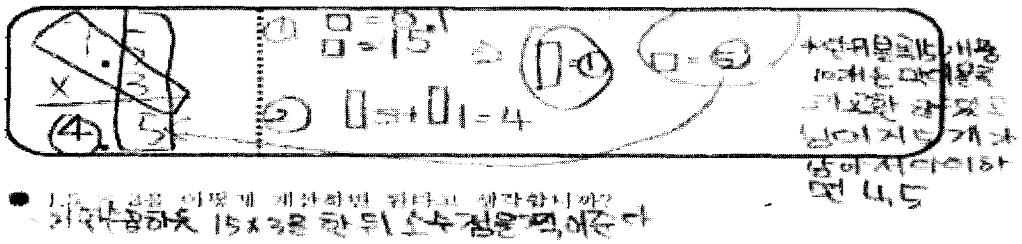
T: 1.5×3이면 뭐부터 먼저 계산해야 됩니까? 고은이
고은: 3과 5를 먼저 계산해야 합니다.
T: 옳지. (분필로 5와 3을 그으며) 5하고 3하고 먼저 계산해야 되지요. 그러면 1은 무슨 블록이지?
학생들: 막대블록
T: (막대블록이라고 적으며) 막대블록이고. 이 5는 무슨 블록이지?
학생들: 단위블록.
T: (단위블록이라고 적으며) 단위블록이지. 단위블록이 0.1이지요. 단위블록이 5개 있는데 거기다 곱하기 3하면 단위블록이 몇 개?
학생들: 15개
T: 단위블록 15개 중에서 단위블록 10개를 뭘로 교환해 줄 수 있어?
학생들: 막대블록 1개
T: 그러면 남아있는 단위블록 몇 개?
학생들: 5개
T: 그러면 막대블록 1개 생겼다 맞지. 막대블록 1개는 어디로 올려줘야 되지?
학생들: 일의 자리
T: 그래서 어떻게? (1을 반복해서 표시하며) 일의 자리로 올려줬다. 그러면 남아있는 단위블록 5개는 어디에 적어줄까? 답을?
학생들: 소수 첫째 자리
T: 소수 첫째 자리에 5를 적어줘야 되지. 알겠습니까? 이게 첫 번째 계산. 두 번째 계산을 뭘 해야 되지? 한울이
한울: 3과 1을 곱합니다.
T: 옳지. (분필로 1과 3을 그으며) 1하고 3하고 곱해줘야 되지요. 막대블록이 1이라 그랬지요. 막대블록 1개를 3번 곱하면 막대블록이 몇 개 있는 거 하고 똑같지?
학생들: 3개
T: 그러면 답이 3.5니?
일부 학생들: 아니요.
T: 3이라고 적으면 되나? 이 계산 끝나나? 그 다음에 뭐해줘야 되지? 고은이
고은: 위에 올린 1을 더해줘야 됩니다.
T: 옳지. (1을 손으로 가리키며) 위에 올린 1을 더해줘야 되지. 3개에다 1개를 더해주면 얼마?

학생들은 1.5×3에서 제일 먼저 계산하는 것은 5×3이며, 이는 단위블록 5개 곱하기 3으로 자연수 15가 아니라 단위블록 15개를 의미함을 이해하였다. 단위블록 10개를 막대블록

고 있으나 이중 (대소수)×(자연수), (대소수)×(대소수)의 경우만 간단히 기술한다.

1개로 교환하였으며 막대블록이 1이므로 일의 자리에 받아올림 '1'을 해주어야 함을 알게 되었다. 이는 받아올림한 '1'을 더하지 않고 빠뜨리는 계산상의 실수를 줄일 수 있다. 1×3은 3으로 막대블록 3개를 의미하며 교환한 막대블록 1개와 더하여 답은 4.5가 된다고 설명하였다. 십진블록으로 계산한 과정을 알고리즘과 연결하여 생각해보는 과정은 1.5×3을 세로셈으로 계산하는 각 과정에 대해 논리적으로 타당한 근거를 제시하여 학생들이 알고리즘을 기계적으로 암기하는 것이 아니라 자연스럽게 이해하는데 도움이 된다.

<그림 1>은 1.5×3을 십진블록으로 계산한 과정을 세로셈으로 계산한 각 단계와 연결하여 나타낸 전형적인 사례이다.



<그림 1> 1.5×3 세로셈과 십진블록 계산 과정 연결

이 학생은 1.5×3을 세로셈으로 계산한 부분을 두 부분으로 나누었다. 0.5×3은 ①번 계산 과정과 연결되며 1×3은 ②번 계산 과정과 연결된다. ①번 계산 과정은 단위블록 15개를 막대블록 1개와 단위블록 5개로 나타내었으며 남은 단위블록 5개는 0.5로 소수 첫째 자리의 5와 연결하였다. 1.5의 1위에 '1'을 표시하여 단위블록 10개를 막대블록 1개로 교환한 것을 나타내었다. ②번 계산 과정은 막대블록 3개와 ①번에서 교환한 막대블록 1개를 더하여 막대블록이 4개가 되었고 막대블록 4개는 4이므로 일의 자리에 4를 적어주어 답은 4.5가 된다고 설명하였다.

위 예에서 알 수 있듯이, 십진블록으로 계산한 과정은 각 수의 자리값을 잘 나타내어 세로셈의 각 부분과 연결된다. 따라서 학생들은 십진블록으로 계산한 과정을 쉽게 식으로 나타내어 알고리즘과 연결할 수 있었다.

나. (대소수)×(대소수)를 십진블록으로 계산한 과정과 알고리즘 연결

(대소수)×(대소수)를 넓이 모델로 나타낸 각 부분은 (대소수)×(대소수)를 부분곱으로 계산한 세로셈의 각 단계와 정확하게 연결된다. 다음 <에피소드 MA-2>에서는 넓이 모델의 각 부분과 부분곱을 이용한 세로셈 계산 방법을 서로 연결하여 지도하는 과정을 확인할 수 있다.

<에피소드 MA-2> <u>1.5×1.3 십진블록을 이용한 계산 과정과 세로셈의 연결</u>

T: ([에피소드 MG-3]의 세 번째 그림을 칠판에 제시한 후) 이렇게 가로가 1.5, 세로가 1.3인 직사각형을 만들었지. 여기서 네 부분으로 나누겠습니다. 단위블록만 있는 부분을 1번, 막대블록 3개 있는 부분을 2번, 막대블록 5개 있는 부분을 3번, 판블록 있는 부분은 4번이라고 한다. 알겠지? 1.5×1.3이니까는(세로셈으로 판서) 먼저 첫 번째 단위블록이 여기 몇 개 있습니까?

학생들: 15개

T: 단위블록 15개 있으니까 넓이가 얼마예요?
학생들: 0.15
T: 그러면 이 식에서 0.15 어디에 적을까? 나와서 적어볼 사람. 찬준이
찬준: (소수점을 맞춰 0.15를 적음)
T: 이 의미는 단위블록이 몇 개?
학생들: 15개
T: 옳지. 15개 (판서). 따라서 넓이가 얼마?
학생들: 0.15
T: (0.15를 적음) 그 다음에 2번, 막대블록이 몇 개 있어요?
학생들: 3개
T: 막대블록이 3개 있으면 넓이 얼마?
학생들: 0.3
T: 그러면 0.3 어디에 적지? 우찬이
우찬: (0.15밑에 소수점 맞추어서 적음)
T: 옳지, 이렇게 적으면 되지. 이거는 막대블록이 몇 개?
학생들: 3개
T: (막대블록 3개를 적음) 넓이 얼마?
학생들: 0.3

이러한 과정을 통해 학생들은 부분곱을 넓이모델과 연결하여 개념적으로 이해하게 된다. 십진블록과 연결하여 세로셈에 부분곱을 모두 나타낸 다음, 교사는 넓이 모델 그림과 세로셈의 부분곱을 서로 확인시키며 부분곱을 어떻게 해야 하는지 질문하였다. 학생들은 더해야 하며 답이 1.95라고 말하였다. 이렇게 부분곱을 더하여 답을 구하는 것은 받아올림한 수를 빠뜨리고 더하지 않는 실수를 줄일 수 있으며 소수점도 쉽게 찍을 수 있어 (대소수)×(대소수)를 쉽게 계산할 수 있게 한다. 실제 대부분의 학생들은 각 블록의 넓이를 계산할 때 지필로 계산하지 않고 넓이 모델을 보고 바로 각 블록의 넓이를 더하여 답을 말하였다.

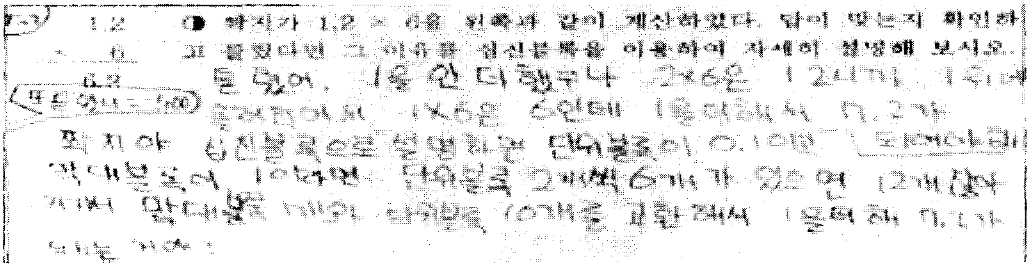
3. 연산의 결과에 대한 이해와 모델링

가. (대소수)×(자연수)의 결과에 대한 이해와 모델링

십진블록을 활용하여 소수의 곱셈을 학습한 경험은 학생들로 하여금 다양한 종류의 연산 결과를 개념적으로 이해하는 데 도움을 주었다. 예를 들어, 1.6×3을 세로셈으로 해결한 다음 왜 4.8이라는 답이 나왔는지 그 이유를 십진블록으로 설명해보게 하였다. 한 학생은 막대블록을 1로 보고 단위블록이 18개에서 10개를 막대블록 1개로 교환하여 답이 4.8이 되었다고 설명하였다. 또 다른 학생은 판블록을 1로 보고 막대블록 18개 중에서 10개를 판블록 1개로 교환하여 판블록이 1이니까 4개고 막대블록이 8개니까 4.8이라고 설명하였다. 이렇게 소수의 곱셈 결과를 판단하고 왜 그렇게 생각하는지 십진블록으로 설명함으로써 받아올림한 1을 더하는 과정을 개념적으로 이해하게 되었다.

한편, <그림 2>는 1.2×6=6.2라는 연산 결과를 어떻게 이해하여 십진블록으로 모델링하였는지 알 수 있는 수학일지이다. 생각을 글로 표현하는 데 어려움을 겪거나 알고리즘만으로 생각하는 소수의 학생들을 제외한 대부분의 학생들은 아래 학생의 수학일지와 같이

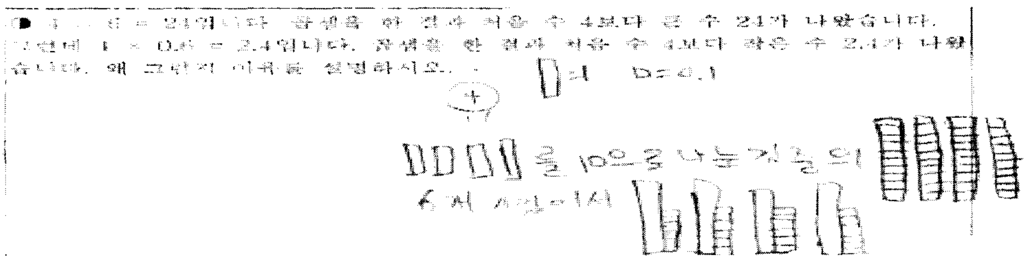
1.2×6=6.2의 계산 결과가 틀린 이유를 십진블록으로 모델링하여 설명할 수 있었다.



<그림 2> 1.2×6의 답이 틀린 이유

나. (자연수)×(소수)의 결과에 대한 이해와 모델링

예를 들어, 4×6처럼 자연수의 곱셈 결과와 달리 4×0.6의 곱셈 결과는 처음 수보다 작아진다. 자연수의 곱셈에 익숙한 학생들은 이처럼 소수의 곱셈에서 결과가 처음보다 작아지는 이유를 제대로 이해하기 어렵기 마련이다(Greer, 1992). <그림 3>은 본 연구에 참여한 학생들의 경우 소수의 곱셈 결과에 대해 십진블록을 활용한 경험을 이용하여 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 나타낸 전형적인 일지의 예이다.



<그림 3> 4×0.6의 곱셈 결과가 4보다 작은 이유

이 수학일지를 살펴보면 4×0.6을 묶음의 의미로 해석하여 십진블록으로 모델링하였다. 학생이 그린 그림에서 막대블록 4개를 $\frac{6}{10}$만큼 묶은 것은 막대블록 4개보다 작음을 확인할 수 있다. 묶음의 의미를 생각하지 않고 4×0.6을 계산하는 경우 처음 수 4보다 작은 2.4라는 답이 나왔을 때 자신이 잘못 계산했거나 곱셈을 한 것이 잘못 되었다고 생각하기 쉽다. 그러나 본 연구의 학생들은 묶음의 의미를 이해하고 십진블록으로 4×0.6을 계산할 경우 4의 $\frac{6}{10}$만큼 묶기 때문에 답이 처음 수 4보다 작아진다는 것을 확인할 수 있었다.

다. (소수)×(소수)의 결과에 대한 이해와 모델링

자연수의 곱셈에서 곱셈 결과는 항상 처음 수보다 크지만 (소수)×(소수)는 두 소수가 모두 1보다 작은 소수이기 때문에 답이 작아진다. 개념적 이해 없이 알고리즘을 사용하는 학생들은 이러한 계산 결과가 잘못되었다고 생각하거나 처음 수보다 큰 수를 계산 결과로 선택하는 경우가 많다(선춘화, 2005). 그러나 (소수)×(소수)의 계산 결과가 왜 그렇게 나왔

는지 넓이의 의미로 해석하여 십진블록으로 설명하는 과정에서 학생들은 (소수)×(소수)의 계산 결과는 자연수의 곱셈 결과와 달리 처음 수보다 작아진다는 것을 개념적으로 이해하게 된다. <에피소드 MA-3>은 학생들이 0.5×0.3의 답이 1.5가 아닌 0.15인 이유를 넓이 모델로 어떻게 이해하고 설명하는지를 알 수 있는 전형적인 사례이다.

<에피소드 MA-3> <u>0.5×0.3의 답이 0.15인 이유</u>

T: 그러면 0.5×0.3에서 0.5도 소수점 아래 한자리, 0.3도 소수점 아래 한자리란 말이야. 그런데 0.15는 소수점 아래 두자리네. 얘가 소수점 아래 한자리, 얘가 소수점 아래 한자리면 답이 선생님 생각에는 1.5가 되야 될 것 같은데 왜 0.15가 되었을까? 1분간 생각! 발표해 볼 사람. 소희

소희: 십진블록으로 이용하여 해본다면 막대블록은 0.1이고 단위블록은 0.01이니까 막대블록 1개와 단위블록 5개이기 때문에 0.15입니다.

T: 진주

진주: 가로가 0.5이고 세로가 0.3인 직사각형을 구하는데 단위블록 가로로 5개와 세로로 3개를 놓았을 때 단위블록은 0.01인데 0.01이 15개 있으므로 0.15입니다.

T: 옳지, 잘했습니다. 단위블록이 15개 있었는데 단위블록의 넓이가 0.01이므로 0.01이 15개이므로 0.5×0.3은 1.5가 아니고 0.15입니다.

두 학생의 설명에서 0.5×0.3은 단위블록 15개의 넓이이며 단위블록의 넓이가 0.01이기 때문에 답이 1.5가 아닌 소수 두 자리 수인 0.15임을 알 수 있다. (소수)×(소수)를 넓이의 의미로 모델링하는 과정에서 학생들은 곱셈 결과가 왜 처음 수보다 큰 1.5가 아닌 처음 수보다 작은 0.15가 되는지를 설명할 수 있었다.

4. 소수의 곱셈에 대한 학생들의 전반적인 이해 정도

가. 문제를 만들고 해결하기

7차시까지는 제시된 실생활 문제의 의미를 해석하고 십진블록으로 모델링하여 문제를 해결하게 한 반면에, 8차시는 5개의 식(즉, 0.3×5, 1.2×6, 2×0.8, 0.6×0.3, 1.4×2.1) 중 하나를 선택하여 적절한 문장제를 만들고 해답을 적은 후 짝과 바꾸어 문제를 해결해보도록 하였다. 이는 학생들이 소수의 곱셈의 의미, 알고리즘, 곱셈 결과를 어떻게 이해하였는지 확인하기 위함이었다. [표 1]과 [표 2]는 학생들이 어떤 식을 선택하고 어떤 의미로 문제를 만들었는지 요약한 것이다[11].

[표 1] 소수의 곱셈 문제 만들기 - A반

의미 \ 식	0.3×5	1.2×6	2×0.8	0.6×0.3	1.4×2.1	합계
동수누가	6명	5명				11명
묶음	·	·	8명	1명	·	9명
넓이	·	·	2명	1명	5명	8명
합계	6명	5명	10명	2명	5명	28명

11) 2×0.8, 0.6×0.3, 1.4×2.1은 동수누가의 의미로 해석할 수 없으므로 음영으로 표시하였으며 실제로 문제를 만들려고 시도한 학생들도 없었다.

[표 2] 소수의 곱셈 문제 만들기 - B반

의미 \ 식	0.3×5	1.2×6	2×0.8	0.6×0.3	1.4×2.1	합계
동수누가	10명	2명				12명
묶음	·	·	5명	2명	·	7명
넓이	·	·	1명	2명	5명	8명
합계	10명	2명	6명	4명	5명	27명

두 반 모두 동수누가의 의미로 문제를 가장 많이 만들었으며 특히 B반에서는 식이 간단한 0.3×5를 1.2×6보다 많이 선택하였다. 2×0.8은 주로 묶음의 의미로 해석하여 문제를 만들었으며 0.6×0.3은 묶음과 넓이의 의미로 각각 해석하였다. 또한 0.6×0.3보다 1.4×2.1을 선택하여 넓이의 의미로 문제를 만들었다.

0.3×5, 1.2×6을 선택한 대부분의 학생들은 동수누가의 의미로 다양한 상황을 이용하여 문제를 쉽게 만들었다. 실생활 속에서 동수누가의 의미로 해석할 수 있는 상황을 쉽게 찾을 수 있기 때문인 것으로 유추된다. 다만, 일부 학생들은 단위에 대한 이해가 부족하고 수업 시간에 문장제를 만들어 본 경험이 부족해서 그런지 실생활 속에서 일어나기 힘든 상황으로 문제를 만든 경우도 있었다.

2×0.8을 선택한 학생들은 대개 끈 2m의 $\frac{8}{10}$을 파란색으로 색칠했을 때 파란색으로 색칠한 끈의 길이, 2L의 음료수 중 $\frac{8}{10}$을 다른 병에 담았을 때 옮겨 담은 음료수의 양, 2m의 대나무를 0.8만큼 부러뜨려 사용하려고 할 때 부러뜨린 대나무의 길이 등 여러 상황에서 발생할 수 있는 묶음의 의미로 문제를 만들었다.

0.6×0.3을 선택한 학생들은 포장지의 넓이, 책상의 넓이, 강아지를 목욕시키기 위해 0.6L 샴푸의 $\frac{3}{10}$을 사용했을 때 사용한 샴푸의 양 등으로 문제를 만들었다. 그 중 한 학생은 '책상의 넓이가 몇 센티미터인가?'라고 문제를 제시하여 넓이 단위에 대한 이해와 넓이 단위의 크기에 대한 감각이 부족함을 알 수 있었다.

1.4×2.1을 선택한 모든 학생들은 탁자의 넓이, 선생님 책상 넓이, 고구마 밭의 넓이, 화단의 넓이 등 넓이의 의미로 해석하여 문제를 잘 만들었다. 또한 세로셈으로 계산하는 과정을 부분곱으로 나타내어 설명하였으며 부분곱을 십진블록으로 해결한 과정과 연결하여 제시하였다.

이처럼 대부분의 학생들은 소수의 곱셈 의미를 이해하여 주어진 식에 알맞은 여러 가지 의미로 문제를 만들었으며 문제출제자처럼 해답을 적는 활동에 흥미를 가졌다. 해답을 적는 과정에서 자신의 만든 문제를 세로셈으로 계산할 때 실수를 하는 학생들이 거의 없었으며, 계산 결과가 맞는지 확인하기 위해 세로셈의 각 단계를 십진블록으로 모델링하는 과정과 연결하여 잘 설명하였다. 또한 발표를 통해 다른 학생들이 만든 문제를 보고 하나의 식을 동수누가, 묶음, 넓이 등 여러 의미로 해석할 수 있었다.

나. 소수의 곱셈 평가

십진블록을 이용하여 소수의 곱셈을 배운 후 A반 학생 28명과 B반 학생 27명을 대상으로 하여 평가를 하였다. 문항 수는 총 15문항이며, 소수의 곱셈의 각 차시별 주제에 해당하는 곱셈식 13문제와 문장제 2문제를 제시하였다. 정답을 맞춘 문항수와 학생 수, 퍼센트

는 [표 3]과 [표 4]에 제시한다.

[표 3] A반 소수의 곱셈 평가 결과

맞춘 문항수	14~15	12~13	11	9~10	합계
학생 수(%)*	18명(64.3%)	5명(17.9%)	2명(7.1%)	3명(10.7%)	28명(100%)

* %는 $\frac{\text{학생수}}{N}$이며, 소수 둘째 자리에서 반올림함

[표 4] B반 소수의 곱셈 평가 결과

맞춘 문항수	14~15	12~13	11	9~10	합계
학생 수(%)	15명(55.6%)	5명(18.5%)	4명(14.8%)	3명(11.1%)	27명(100%)

14~15문제를 맞춘 학생 수가 A반은 18명, B반은 15명으로 전체 학생의 64.3%, 55.6%를 차지하였다. 또한 12문제 이상 즉, 문제의 80%이상을 맞춘 학생 수는 A반은 23명으로 82.2%, B반은 20명으로 74.1%이다. 물론 문제의 60%만을 맞춘 학생들도 A, B반에 각각 3명이 있다. 그러나 이 학생들은 학습부진아들로 3, 4학년에서 배운 분수와 소수에 대한 개념적 이해가 부족하여 소수의 곱셈을 이해하는데 어려움이 있었다. 십진블록이 소수 연산을 학습하기 위한 훌륭한 구체물일지라도 한 단원의 수업만으로 이전 학년에서 배운 내용을 모두 이해하고 소수의 곱셈을 개념적으로 이해하는 것은 무리일 수 있다. 그러므로 이들을 제외한 학생들을 살펴보면 소수의 곱셈 문제를 어려움 없이 해결하였음을 알 수 있다. 십진블록을 이용한 소수의 곱셈 지도는 알고리즘에 대한 학생들의 개념적 이해를 도울 뿐만 아니라 정확하게 계산하는데도 도움이 됨을 알 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 연구를 통해 얻을 수 있는 결론을 요약해 보면 다음과 같다. 첫째, 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 학생들은 해당 연산의 다양한 의미를 십진블록으로 모델링하여 나타내었으며, 이러한 과정에서 소수의 곱셈 의미를 개념적으로 이해하였다. 그 결과 학생들은 주어진 실생활 문제나 식을 소수의 곱셈 의미로 해석할 수 있었으며, 제시한 식 중에서 하나를 선택하여 문제를 만들고 해결해보는 활동에서도 식에 알맞은 소수의 곱셈 의미로 해석하여 문제를 만들 수 있었다.

주의할 점은 소수의 곱셈 의미를 십진블록으로 모델링하면서 개념적으로 이해하기 위해서는 학생들에게 해당 연산의 의미를 무조건 모델링해보라고 활동을 제시하는 것이 아니라 교사가 십진블록의 사용을 개념적으로 안내하는 것이 필요하다는 점이다. 기호를 기계적으로 다루듯이 구체물을 기계적으로 사용할 수 있기 때문이다(Baroody & Coslick, 1998). 학생들이 연산의 의미에 따라 십진블록으로 모델링하는 과정이 어떻게 다르며, 왜 그렇게 모델링해야 하는지를 깨달을 수 있도록 교사는 단계적으로 발문하고 활동을 제시하여 학생들의 사고를 촉진하고 이끌어나가야 하며, 이를 통해 학생들이 십진블록으로 모델링하는 과정을 스스로 발견할 수 있도록 해야 한다.

둘째, 십진블록으로 계산한 과정을 알고리즘과 연결하는 활동을 통해 학생들은 알고리즘의 각 단계를 왜 그렇게 해야 하는지 십진블록을 이용하여 논리적으로 설명하였으며 알고리즘을 스스로 발견하고 이해하였다. 따라서 십진블록으로 계산한 과정과 알고리즘을 연

결하는 활동은 학생들이 소수의 곱셈 계산 원리를 이해하고 알고리즘을 사용하는데 도움이 되며, 이는 소수의 곱셈을 개념적으로 이해하는 바탕이 된다. 또한 십진블록은 소수의 곱셈 알고리즘의 각 단계에 대한 논리적인 근거를 제시할 수 있는 유용한 구체물이다.

그러나 이미 언급했듯이, 소수의 곱셈을 십진블록으로 계산했다고 해서 학생들이 알고리즘을 자연스럽게 이해하는 것은 아니다. 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 십진블록으로 계산한 과정을 알고리즘과 연결하는 활동이 반드시 필요하며, 이 과정에서 학생들이 계산 원리를 이해하고 알고리즘을 발견할 수 있도록 돕는 교사의 역할 또한 중요하다.

셋째, 전반적으로 학생들은 십진블록으로 모델링하면서 이해한 소수의 곱셈 의미와 함께, 소수의 곱셈의 결과를 이해하여 설명하였다. 또한 세로셈의 각 단계와 계산 원리도 십진블록으로 모델링하는 과정과 연결하여 정확하게 이해하고 있음을 확인할 수 있었다. 십진블록은 소수의 자리값을 잘 나타내어 소수의 곱셈 결과의 합리성을 쉽게 판단할 수 있으며 왜 그러한 답이 나왔는지에 대한 타당한 근거를 제시해준다. 따라서 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도는 연산의 결과를 이해하는데 도움이 됨은 물론 연산의 의미, 알고리즘, 연산의 결과를 서로 연결하여 이해하는데 도움이 된다.

마지막으로 본 연구를 해석하고 적용하는 데 있어서 주의할 점이 있다. 본 연구는 알고리즘 위주로 가르치기 쉬운 소수의 곱셈에 대해서 십진블록을 활용하여 학생들에게 연산에 대한 의미를 지도할 수 있다는 경험적 근거를 제공한다는 점에서 의의가 있다. 하지만 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도가 모든 소수의 곱셈에 적합하다는 것을 시사하지는 않는다. 예를 들어 1.26×2.5을 십진블록으로 모델링하여 답을 구하도록 했을 때, 그 과정이 너무 복잡하고 어려워 학생들에게 의미 있는 학습이 되지 않는다. 또한 넓이의 의미는 길이기준에서 0.01에 해당하는 블록이 없기 때문에 십진블록으로 모델링할 때 수의 범위에 제약이 있다. 따라서 각 차시의 계산 원리가 포함된 간단한 문제나 식을 십진블록으로 모델링하여 연산의 의미를 이해하고 계산원리를 발견하도록 지도하는 것이 바람직하다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). **초등학교 교육과정 해설(IV): 수학, 과학, 실과**. 서울: 대한교과서 주식회사.

김남희 (1999). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블록. **수학교육, 1**(1), 305-324.

김용태 (2000). **소수 개념의 분석 및 그 지도에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

______(2002). 조작활동을 통한 분수와 소수 개념의 연결 지도에 관한 연구. **초등교육연구, 17**(3), 1-26.

김자영 (1993). **초등학교 산수과 소수학습에서 구체물 자료 적용의 효과 연구**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

방정숙 (2001). 교실문화비교를 통한 수학교육개혁에 관한 소고. **수학교육학연구, 11**(1), 11-35.

방정숙, 김재화 (2006). 초등학교 6학년 학생들의 소수 계산 오류와 선행지식간의 연결 관계 분석 및 지도방안탐색. **수학교육, 45**(3), 275-293.

선춘화 (2005). **초등학교 6학년 학생의 수감각 실태조사**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

윤희태 (2002). **초등학생들의 기초 계산 오류에 대한 분석적 연구**. 인천교육대학교 대학원 석사학위 논문.

이경아 (1996). **유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.

이소연 (2001). 십진블록을 이용한 초등학교 연산지도 방법 탐색. **수학교육, 1**, 111-123.

정유경 (2004). **초등학교 수학 수업에서 연산 알고리즘 발명을 위한 십진블록의 활용 방안 연구**. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 권성룡 · 김남균 · 김수환 · 김용대 · 남승인 · 류성림 외 6인 공역(2005). **수학의 힘을 길러주자. 왜? 어떻게?** 서울: 경문사.

Drexel, R. E. (1997). *Connecting common fraction and decimal fraction concepts: A common fraction perspective.* Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin-Madison.

Greer, B. (1992). Multiplication and division. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fraction. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R. S. Hattrup (Eds.), *Analyses of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Introduction: Capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades Vol.2* (pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts. The acquisition of decimal knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedual knowledge: The case of mathematics* (pp. 199-223). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* New York: John Wiley & Sons. 강윤수 · 고상숙 · 권오남 · 류희찬 · 박만구 · 방정숙 외 3인 공역(2005). **정성연구방법론과 사례연구.** 서울: 교우사.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

Resnick, L. B, Ford, W. W. (1981). *The Psychology of mathematics for instruction.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 구광조 · 오병승 · 전평국 공역 (2000). **수학 학습 심리학**. 서울: 교우사.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithemetics errors: The case of decimal fractions, *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Sackur-Grisvard, C., & Leonard, F. (1985). Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers, *Cognition and Instruction, 2*, 157-174.

Yin, R. K. (2002). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: SAGE.

<Abstract>

An Analysis on the Process of Conceptual Understanding of Fifth Grade Elementary School Students about the Multiplication of Decimal with Base-Ten Blocks

Kim, SooJeong[12]; & Pang, JeongSuk[13]

The purpose of this study was to propose instructional methods using base-ten blocks in teaching the multiplication of decimal for 5th grade students by analyzing the process of their conceptual comprehension of multiplication of decimal. The students in this study were found to understand various meanings of operations (e.g., repeated addition, bundling, and area) by modeling them with base-ten blocks. They were able to identify the algorithm through the use of base-ten blocks and to understand the principle of calculations by connecting the manipulative activities to each stage of algorithm. The students were also able to determine whether the results of multiplication of decimal might be reasonable using base-ten blocks. This study suggests that appropriate use of base-ten blocks promotes the conceptual understanding of the multiplication of decimal.

Keywords: multiplication of decimal, base-ten blocks, conceptual understanding, the meaning of operation, modeling

12) gmksj@hanmail.net
13) jeongsuk@knue.ac.kr