韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 05. 제 46권, 제 2호, 193-205.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2007, Vol. 46, No. 2, 193-205.

조합문제에서의 인식론적 장애
-곱의 법칙과 합의 법칙 중심으로-

김 서 령 (서울대학교)
박 혜 숙 (서원대학교)
김 완 순 (호서대학교)

I. 서 론

우리는 실생활에서 여러 가지 경우로 나누어 생각해야 할 일을 흔히 겪는다. 이때 경우나누기를 보다 효율적으로 하면 생각하기도 수월하고 시간과 경비도 줄일 수 있다. 학교수학에서 경우 나누기를 다루는 부분은 조합론인데, 조합론에서는 모든 가능성을 고려하면서 그 경우의 수를 세고 가장 적합한 것을 발견하려는 태도를 계발하고 동시에 명확한 사고능력을 길러주기 때문에 그 중요성이 더욱 부각되고 있다.

이러한 이유와 컴퓨터의 발달 등으로 인하여 위상수학의 변두리 분야로 인식되어 왔던 (그래프이론을 포함하는) 조합론은 지금 이산수학의 한 독립된 분야로 분류되고 있다. 특히 제7차 교육과정에서는 기존의 수학 I에만 포함되어 있던 순열과 조합을 이산수학 교과로 독립하여 심도 있게 다루고 있다.

중등수학에서 다루는 순열·조합 문제는 표현(representation), 논리적 정당화(reasoning), 추상화, 일반화, 여러 수학 분야를 연결시키는 수학의 과정을 경험하게 할 수 있는 좋은 소재이다(Sriraman & English, 2004). 하지만 현행 교실에서 세기 문제를 해결하는 방식은 공식의 적용에 치우치고 있어 세기 문제의 수학 교육적 기능을 제대로 활용하지 못하고 있는 실정이다. 또한 대부분의 세기 문제가 단순히 공식에 적용하는 것만으로는 해결되지 않으므로 대부분의 학생들은 순열·조합 문제를 제대로 구별하지도 못하고 또한 세기 문제가 어렵다고 생각하고 있다.

특히, 세기문제에서 가장 근본적인 해결 방법을 제시하고 있는 곱의 법칙과 합의 법칙이 학교수학에서 매우 소홀히 다루어지고 있다. 실제로 인터넷 검색엔진의 지식 Q&A에서 곱의 법칙과 합의 법칙에 대한 학생들의 질문을 검색하여 본 결과, 매우 많은 학생들이 어떤 경우에 합의 법칙을 적용하고 어떤 경우에 곱의 법칙을 적용해야 하는지 전혀 구별하지 못하고 있음을 알 수 있었다.

학생들의 오류는 이상한 기능장애이거나 지식의 결여 탓으로 여겨졌지만 반복되는 오류들은 개념구성의 결과이며 우연이 아니라 적극적인 획득물이다(우정호, 2000). 세기문제에서 학생들의 반복되는 오류를 해결하기 위하여 곱의 법칙의 개념형성 과정을 재조명하고 잘못된 개념이미지를 수정하는 방법을 제시할 필요가 있다.

그동안의 조합론과 관련된 논문은 이지현(2004), 이주영 외(2006), Batanero 외(1997), English(1993, 1996, 1999a, 1999b), Hadar와 Hadass(1981) 등이 있으나, 곱의 법칙과 관련된 논문은 거의 찾아볼 수 없었다. 따라서 본고에서는 학생들의 곱의 법칙과 합의 법칙에 대한 이해도를 조사하고 세기에서의 곱의 법칙과 합의 법칙에 대한 개념형성 장애분석 및 효과적인 지도방안을 제시하고자 한다.

II. 학교수학에서의 조합론의 재조명

수학교육학자들은 오래 전부터 이산수학의 가치와 학교교육과정에서 조합론적 사고를 육성하는 가치를 인식

* 2007년 4월 투고, 2007년 5월 심사완료
* ZDM분류: K24
* MSC2000분류: 97D70
* 주제어 : 조합론, 곱의 법칙, 합의 법칙
* 이 연구는 부분적으로 2006년도 서울대학교 교육종합연구원 지원으로 수행되었음

하여 왔다. 이산수학이 연속적인 대상을 다루는 수학과 차별화 되어 생각되는 이유는 단순한 세기 기법으로부터 접근할 수 있어서 초등학교 수준의 학생들도 접근할 수 있기 때문이다(Sriraman & English, 2004).

Kapur(1970)는 학교수학에서 조합론이 중요하게 다루어져야 할 이유를 다음과 같이 설명하였다.

① 기존의 수학적 지식을 요구하지 않기 때문에 교육과정의 초기단계에서부터 다룰 수 있다.

② 세는 과정을 통하여 예상, 일반화, 최적화, 존재성, 구조적 사고 등을 훈련시킬 수 있다.

③ 물리, 화학, 생물, 네트웍 분석, 실험설계, 통신이론, 대칭성, 확률, 다이내믹 프로그래밍, 수론, 위상수학, 놀이수학 등에 활용될 수 있다.

④ 학생들이 새로운 문제를 만들어 내고자 하는 욕구를 불러일으킨다.

⑤ 그럴듯한 증명과 논리적인 증명을 구별하도록 할 수 있다.

⑥ 컴퓨터 프로그래밍의 동기부여를 제공한다.

⑦ 수학의 힘과 한계와 컴퓨터의 힘과 한계를 인식할 수 있다.

⑧ 사상, 관계, 함수, 동치관계, 동치류, 동형사상 등의 개념을 보다 일찍 깨달을 수 있게 한다.

⑨ 어려운 문제에 도전하여 그것을 해결함으로써 성취감을 느낄 수 있게 한다.

⑩ 대부분의 조합론 문제와 그 활용이 최근에도 발전되고 있으므로 수학의 팽창 및 발전을 실감할 수 있게 한다.

⑪ 모든 가능성을 고려하면서 그 경우의 수를 세고 가장 적합한 것을 발견하려는 조합론적인 태도를 계발하고 동시에 명확한 사고능력을 길러준다.

또한 Sriraman과 English(2004)는 피아제 이후로 조합론에 대한 다양한 연구가 이루어져 왔음을 언급하고, 여러 논문을 분석한 결과 조합론 문제가 다음과 같은 다섯 가지의 지적 능력을 함양할 수 있음을 밝혔다.

- 독립적인 사고 능력
- 사고의 유연성
- 문제의 구조 파악 능력
- 의사소통 능력
- 문제제기 능력

한편 교육부(2001)에서는 이산수학을 '기본적인 개념, 원리, 법칙을 활용하여 실생활에서 일어나는 유한이나 불연속의 이산 상황의 문제를 수학적으로 분류하고, 논리적으로 사고하여 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르게 하는 과목'으로 정의하고, 특히 세기 문제가 포함된 선택과 배열 단원의 지도의 의의를 '실생활의 문제에서 시작하여 세기를 조직적으로 할 수 있는 능력을 기르고 규칙성을 발견하는 추론 능력을 계발하는 등 문제 해결력을 향상시키는 데 그 초점을 둔다.'고 하였다.

III. 인식론적 장애

1. 개념의 형성

개념이란 말은 널리 사용되지만, 이것을 정의하기는 쉽지 않다. 개념의 형성은 경험으로부터 시작된다. 추상화란 일상생활에서 우리의 경험들 사이의 유사성을 인식하는 활동이고, 분류란 이러한 유사성을 기초로 해서 우리의 경험을 함께 묶는 것을 의미한다. 추상은 영속하는 사고 변화의 한 종류이며 추상화의 결과이다. 활동으로서의 추상화와 마지막 결과로서의 추상을 구별하기 위하여 추상을 개념이라고 한다(박임숙, 2002, 재인용).

한편, 정인철(2003)은 학습자가 새로 접하는 수학적 개념을 기존 지식과 연관지어서 다음과 같이 세 가지로 분류하고 있다. 즉, 새로운 수학적 개념은 이미 이해하고 있는 그런 지식의 연장일 수도 있고(단순 확장형) 기존의 이해된 개념과 통합하여 적어도 이들의 조절을 통하여 이해의 성취가 이루어질 수도 있고(상호 조절형) 아니면 초기단계부터 새로운 개념 형성을 위한 노력과 에너지를 필요로 할 수도 있다(기반 구축형).

본 연구에서 곱의 법칙과 합의 법칙이라는 새로운 개념을 이해할 때에 학생들이 범하는 오류에 대하여 알아본 결과, 세기에서의 곱의 법칙과 합의 법칙은 상호 연관성이 있는 내용임에도 불구하고 학생들은 그 두 가지를 '상호 조절형'이 아닌 서로 독립적인 것으로 생각하는 오류를 범하고 있음을 알 수 있다.

2. 교수학적 상황

Brousseau가 말하는 '수학 교수학적 상황'이란 학생이 어떤 수학적 지식을 학습하도록 하는 것을 목표로 하는 교사, 학생, 환경 사이의 관계상황이며, 교사가 교수학적 의도가 담긴 문제상황 속에서 학생과 상호작용 하는 상황이다. 교사는 형식적인 수학적 지식을 보다 의미 있게 가르치기 위해서 그 지식의 근원, 의미, 동기, 쓰임새를 알게 해주는 일련의 활동을 교실 문맥으로 구성하려는 시도를 하지 않을 수 없게 된다(우정호, 2000).

이 때, 기존의 수학적 개념은 새로운 개념 형성에 상호보완적이기도 하지만 장애를 일으키기도 한다. 이와 같은 현상은, 본 연구에서 조사한 바와 같이 세기에서의 합의 법칙과 곱의 법칙의 개념형성과정에서도 볼 수 있다.

3. 인식론적 장애

Brousseau는 수학 교수학적 상황론의 핵심적인 개념의 하나인 '인식론적 장애(epistemological obstacle)'를 '어떤 특정한 맥락에서는 성공적이고 유용하였던 지식으로, 따라서 학생의 인지구조의 일부가 되었지만 새로운 문제상황이나 더 넓어진 문맥에서는 부적합해진 지식' 으로 정의하였다. 인식론적 장애형성에 영향을 주는 요인으로는 일상어, 직관, 과도한 일반화, 은유 등을 생각할 수 있고 교수체계에서 나타나는 인식의 장애에는 개체 발생적 기원을 가진 것, 교수학적 기원을 가진 것, 인식론적 기원을 가진 것을 구분할 수 있다. 이 때, 이러한 장애의 극복 과정이 수학적 사고의 발달과정이라고 할 수 있으며, 장애를 극복함으로써 보다 높은 새로운 차원의 이해가 가능해진다. 학교수학과 관련된 인식론적 장애를 밝히고 그를 극복하는 방안에 대한 연구는 수학교육학의 중요한 연구과제가 될 것이다(우정호, 2000).

이와 같은 맥락에서 본고에서는 세기문제의 곱의 법칙과 합의 법칙과 관련된 학생들의 인식론적 장애에 대하여 알아보고 그것의 극복 방안을 제시하고자 한다. 특히, 세기문제의 경우에 학생들은 문제에 포함된 특정한 단어에 관심을 집중하여 개념을 적용하는 과도한 일반화 현상을 보이는 경향이 있으므로, 본고에서는 곱의 법칙을 기존의 순서쌍 개념의 확장으로 지도하고 합의 법칙을 곱의 법칙 개념의 상호 조절형태로 지도하는 방안을 제시하고자 한다.

IV. 곱의 법칙과 합의 법칙의 적용 장애

1. 곱의 법칙의 개념형성 장애

현행 수학교과서에서는 일반적으로 곱의 법칙과 합의 법칙을 다음과 같이 서술하고 있다.

<곱의 법칙>

두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

<합의 법칙>

두 사건 A, B가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n이라 하면, A 또는 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$이다.

세기문제에서 학생들이 가장 혼동하는 것은 곱의 법칙과 합의 법칙의 적용이다. 이 때 학생들은 문제의 본질적인 특징보다는 표면적으로 보이는 단어에 집착하여 문제와 맞지 않는 해결전략을 적용하는 경향이 있다. 이것은 다음과 같은 인터넷 조사에서 더 부각되어 나타났다.

한 검색엔진의 지식 Q&A의 검색창에서 '합의법칙 & 곱의법칙 ! 삼각함수'(&는 두 단어를 모두 포함하는 것, !는 뒤의 단어를 제외한 것을 의미함)를 입력한 결과 수학·통계 분야에서 107건의 결과가 검색되었다. 이들을 검토해 본 결과 대부분의 질문자와 답변자가 이 법칙들을 제대로 이해하지 못하고 있음을 알 수 있었다. 이들 중 가장 흔한 질문의 유형과 본 연구에 시사점을 제시하는 사례는 다음과 같다.

사례 1. '두 사람이 가위바위보를 할 때, 일어날 수 있는 모든 경우의 수'의 답이 $3\times3=9$인데 저는 $3\times2=6$을 해버렸거든요. 저는

곱의 법칙, 합의 법칙 특히 못해요.

사례 2. '식사 후에 먹을 수 있는 후식으로 과일 4종류, 아이스크림 3종류가 있을 때 식사 후 후식으로 과일과 아이스크림을 각각 한 가지씩 선택해서 먹을 수 있는 경우의 수는?' 이게 답이 $3\times4=12$인데 '동시에'라는 말도 없는데 왜 곱의 법칙을 사용했나요?

사례 3. '동시에 일어남', '연속해서 일어남', '또한' 이런 말이나 조건이 있으면 AND 조건으로 곱셈입니다. '거나', '또는' 이런 말이 있으면 OR 조건으로 더해야 합니다.

세기에서의 곱의 법칙과 합의 법칙은 상호 연관성이 있는 내용인데, 위에서 예시한 사례를 보면 학생들은 그 두 가지를 서로 독립적인 것으로 생각하는 오류를 범하고 있다. 이들을 분석하면 다음과 같다.

사례 1에서는 한 사람이 가위바위보를 할 때 일어나는 결과의 수를 모두 곱하는 대신에 더하는 오류를 범했는데, 이는 곱의 법칙의 개념형성이 제대로 되지 않았음을 보여준다. 실제로 개념의 형성은 경험으로부터 시작되는데, English와 Graeme(1995)도 세기문제에서 구체물을 사용하는 경험을 한 것이 지필 문제의 풀이에 도움을 주었다고 보고한 바 있다. 사례 1은 일어날 수 있는 결과들을 일일이 나열하는 경험을 하지 않은 채 문제를 해결해서 생긴 오류임을 시사한다.

사례 2, 3에서는 '동시에'라는 단어가 포함되었을 때는 곱의 법칙을 쓰고 '또는'이라는 단어가 포함되었을 때는 합의 법칙을 써야 한다고 제안하고 있다. 이는 문제의 본질적인 것이 어떻게 인과적으로 상호관련성을 가지고 있는 지와 같은 구조적인 특징보다는 특정한 대상물과 사용된 용어와 같은 겉으로 보기에 구분이 되는 표면적인 특징에 관심을 집중하여(English와 Graeme, 1995, 재인용) 하나의 단어로 문제 해결 전략을 결정하는 '과도한 일반화' 로 인한 인식론적 장애를 보여준다.

2. 설문조사

앞에서 살펴본 바와 같이 학생들은 곱의 법칙과 합의 법칙에 대한 이해를 어려워하고 있었다. 학생들이 어느 부분에서 어려워하고 잘못 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 설문조사를 실시하기로 하였다.

그러나 곱의 법칙과 합의 법칙은 교과과정상 수학 I의 후반부에 있어서 고2의 2학기에 해당되므로 고등학교 3학년 학생들을 대상으로 해야 하는 설문조사에 어려움이 있었다. 따라서 대학생을 대상으로 곱의 법칙과 합의 법칙의 인식 정도를 조사하기로 하고, 2006년 3월에 서울 소재 수학 전공 3학년 학생 36명과 중소도시 소재 수학 전공 2학년 학생 76명, 3학년 학생 52명으로 이루어진 수능 성적이 중·상위 계층이었던 학생 총 164명을 대상으로 설문조사를 실시하였다.

다음은 설문조사에 사용된 두 문제지이다.

<문제지 1>

1. a, b, c, d, e, f 중 세 개를 뽑아 늘어놓을 때 적어도 e를 한 개 포함하는 문자열의 개수는?

2. 여섯 명의 여학생과 다섯 명의 남학생 중 여섯 명을 뽑아 대표단을 구성하려고 한다. 이 때, 적어도 여학생 두 명이 들어있는 위원회를 구성하는 방법의 수는?

3. 서로 다른 국어 책이 5권, 서로 다른 영어 책이 4권, 서로 다른 일어 책이 7권 있을 때 이 중 언어가 다른 책 두 권을 뽑는 방법의 수는?

4. 3장의 똑같은 편지가 있다. 이 편지들을 빨간, 주황, 노란, 초록 봉투에 넣으려고 한다. 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지를 넣을 수 있다고 할 때 3장의 편지를 네 가지 색깔의 봉투에 넣은 방법은 모두 몇 가지인가?

<문제지 2>

다음은 어떤 학생이 푼 답안이다. 그것을 보고 그 학생이 생각한 풀이방법을 서술하고 그 풀이가 맞는지 틀린지를 논하여라.

1. a, b, c, d, e, f 중 세 개를 뽑아 늘어놓을 때 적어도 e를 한 개 포함하는 문자열의 개수는?
▶학생 A의 답안: $6\times6\times6-5\times5\times5=91$
▶학생 B의 답안: $6\times6+6\times6+6\times6=108$

2. 여섯 명의 여학생과 다섯 명의 남학생 중 여섯 명을 뽑아 대표단을 구성하려고 한다. 이 때, 적어도 여학생 두 명이 들어있는 위원회를 구성하는 방법의 수는?
▶학생 C의 답안: ${}_6C_2 \times {}_9C_4 = 1890$

설문조사는 먼저 <문제지 1>을 나누어주고 20분의 시간을 준 후 답안을 회수하고 <문제지 2>를 나누어주어 답안을 작성하도록 하였다. 이 때, <문제지 1>은 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용하여 문제를 어느 정도 해결할 수 있는지 알아보기 위한 것이고 <문제지 2>는 곱의 법칙을 정확하게 이해하고 있는지 알아보기 위하여 오류분석을 하도록 하였다.

<문제지 1>의 1번과 3번은 곱의 법칙과 합의 법칙을 적절히 적용할 수 있는지, 그리고 2번과 4번은 곱의 법칙을 제대로 이해하고 있는지 확인하려는 것이다. 특히, 4번은 이주영 외(2006)가 고등학생들이 조합문제 사이의 구조적 동형을 인식하고 있는지 알아보기 위하여 사용한 문항으로서, 당시의 조사결과에서는 조합문제임에도 불구하고 순열문제로 착각하여 오답을 얻은 학생들이 있었다. 이들 중에는 문제의 전체적인 구조를 보지 못하고 핵심 단어에 의존하여 문제를 이해하여 오류를 범한 학생들도 있었지만, 곱하는 것이 순서 지어진 것을 세는 것이라는 것을 인식하지 못하고 $4\times3\times2\times1$로 답한 학생들이 많았다. 이러한 현상이 대학생에서도 나타나는지 알아보고자 이번 설문조사에 이 문항을 포함시켰다.

각 문제의 올바른 풀이는 다음과 같다.

(1) 1번은 e가 첫 번째 자리에서 처음으로 나오는 경우, 두 번째 자리에서 처음으로 나오는 경우, 세 번째 자리에서 처음으로 나오는 경우로 나눈 다음, 각각에 대한 경우의 수를 곱의 법칙을 사용하여 6×6, 5×6, 5×5로 구한 다음 합의 법칙을 사용하여 더해 주면 91이라는 답을 얻게 된다. 다른 풀이로는 e가 정확하게 한 개, 정확하게 두 개, 정확하게 세 개 들어 있는 경우를 나눈 다음 각각의 경우의 수를 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용하면 다음의 답을 얻는다.
$(5\times5+5\times5+5\times5)+(5+5+5)+1=91$
또한 전체 가능한 경우의 수 $6\times6\times6$에서 e를 포함하지 않는 경우의 수 $5\times5\times5$를 빼서 구할 수도 있다.

(2) 2번은 여학생을 두 명 포함하는 경우, 세 명 포함하는 경우, 네 명 포함하는 경우, 다섯 명 포함하는 경우, 여섯 명을 포함하는 경우를 나누어서 각각의 경우에 곱의 법칙을 적용하여 ${}_6C_2\times{}_5C_4$, ${}_6C_3\times{}_5C_3$, ${}_6C_4\times{}_5C_2$, ${}_6C_5\times{}_5C_1$, ${}_6C_6\times{}_5C_0$을 구한 다음 합의 법칙을 적용하여 더하면 456가지가 된다. 다른 풀이로는 11명중에서 4명을 뽑는 방법을 모두 구한 다음 여학생을 전혀 포함하지 않는 경우의 수와 여학생을 한 명만 포함하는 경우의 수를 빼서 구할 수도 있다.

(3) 3번은 국어책과 영어책을 뽑는 경우, 영어책과 일어책을 뽑는 경우, 일어책과 국어책을 뽑는 경우를 나누어 각각에 대하여 곱의 법칙을 적용하여 5×4, 4×7, 7×5를 구한 다음 합의 법칙을 적용하여 더해주면 83가지가 된다.

(4) 4번은 네 개의 서로 다른 봉투 중 편지지를 넣은 세 개의 봉투를 고르는 방법이므로 ${}_4C_3=4$이다.

<문제지 1>과 <문제지 2>의 응답결과를 분석한 것이 다음의 <표 1>와 <표 2>이다. <표 1>는 설문에 응답한 164명의 문항별 응답유형을 나타낸 것이고 <표 2>는 <문제지 2>의 2번에 대한 응답유형을 집단별(지역 및 학년 구분)로 나타낸 것이다. 이 때 <문제지 2>의 1번은 대부분 잘 해결하였기에 분석대상에서 제외하였다.

<표 1> <문제지 1>로 검사한 학생들의 응답유형 (괄호 안은 %)

문제＼유형	T	F*	F**	F	H
1	27 (16)	34 (21)	·	36 (22)	67 (41)
2	80 (49)	27 (16)	7 (4)	50 (30)	·
3	121 (74)	·	12 (7)	31 (19)	·
4	112 (68)	·	29 (18)	23 (14)	·

T: 정답

F*: 1번 문항은 조합문제로 해결한 경우, 2번 문항은 곱의 법칙만 적용한 경우.

F**: 개념의 혼동에 의한 오답.

F: F*, F** 외의 틀린 답

H: 1번 문항에서 중복을 허용하지 않은 것으로 생각하여 맞는 해결을 함.

<표 2> <문제지 2>의 2번 문항으로 검사한 학생들의 응답유형 (괄호 안은 %, A집단은 중소도시 소재 수학 전공 2학년 학생, B집단은 중소도시 소재 수학전공 3학년 학생, C집단은 서울 소재 수학 전공 3학년 학생)

집단＼유형	a	b	c	d	e	f	g	합계
A	2 (3)	1 (1)	4 (5)	10 (13)	21 (28)	18 (24)	20 (26)	76
B	5 (10)	4 (8)	3 (6)	8 (15)	7 (13)	14 (27)	11 (21)	52
C	3 (8)	11 (31)	4 (11)	2 (6)	5 (14)	9 (25)	2 (6)	36
합계	10 (6)	16 (10)	11 (7)	20 (12)	33 (20)	41 (21)	33 (20)	164

a: 곱하는 것은 순서를 고려하는 것이므로 같은 경우를 중복되어 세어 틀리다고 함 (정답).

b: 곱하는 것이 순서를 고려하는 것을 언급하지 않고 그냥 중복되어 세어졌다고 하고 예를 들어 틀리다고 함.

c: 예를 들지 못하고 그냥 같은 원소가 중복되었으므로 틀리다고 함.

d: 아무 설명 없이 틀리다고 함.

e: 설명의 내용이 틀림.

f: 맞다고 함.

g: 기타

3. 설문조사 결과 논의

설문조사는 수학전공 학생을 대상으로 해서인지 합의 법칙과 곱의 법칙을 적절히 적용할 수 있는 지를 알아보고자 했던 3번 문제에서 74%(<표 1> 참조)의 높은 정답률을 보였다. 1번 문제는 중복을 허용하지 않는 것으로 해석한 학생이 41%이고 중복을 허락한 상황에서의 정답률은 16%이었다. 앞의 학생들의 답은 정답이라고 할 수는 없으나, 중복을 허락한 상황에서도 곱의 법칙을 사용했어야하므로 곱의 법칙을 이해하는데는 문제가 없었다고 사료된다. 또한 <문제지 2>의 1번의 오류분석은 대부분 잘 해결하였다.

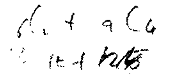
곱의 법칙이 순서쌍을 세는 것이라는 것에 대하여 인식하고 있는지에 대하여 알아보고자 했던 <문제지 1>의 4번 문제의 정답률은 68%이지만, 곱의 법칙에 대한 정확한 개념을 파악하기 위한 2번 문제에 대한 정답률은 49%(<표 1>의 음영 부분)로 상당히 낮았다. 한편 <문제지 2>의 2번 문제에 대한 오류분석은 6%(응답유형 a)만이 정확한 답을 하였고 이 6%을 포함한 23%(응답유형 a+b+c, <표 2>의 음영 부분 참조)의 학생이 곱의 법칙에 대하여 어느 정도 이해를 하고 있음을 보여주고 있다. 따라서 곱의 법칙에 대한 답을 제대로 한 49%의 학생들 중 절반 이상이 곱의 법칙을 사용한 단순한 계산만 할 뿐, 곱의 법칙에 대한 정확한 파악을 제대로 하지 못하고 있음을 알 수 있다. 특히, 2학년 학생인 A집단의 경우는 10%에도 못 미치는 학생만이 곱의 법칙에 대한 정확한 파악을 하고 있었다(<표 2>의 밑줄 부분 참조).

이 절에서는 <문제지 1>의 문제별로 대표적인 오답을 제시하여 오류의 원인을 분석하고자 한다. 그런데 1번 문제의 경우는 상당히 많은 학생이 e를 제외한 문자는 중복을 허락하지 않는다고 생각하고 풀어서 이 문제에서 알아보고자 한 곱의 법칙과 합의 법칙의 적절한 적용과는 무관해졌다. 또한 세고자 하는 집합의 여집합의 개수를 구하여 전체집합의 개수에서 빼는 방법을 사용하여 정답을 구하였기에 특이할 만한 오답이 없었으므로 1번 문제의 답안 분석은 생략하기로 한다.

이제 다음 2번 문제에 대한 답안을 살펴보기로 한다.

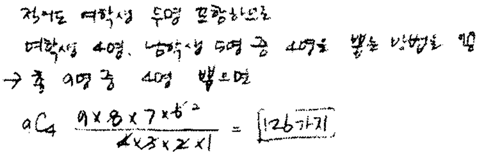
2. 여섯 명의 여학생과 다섯 명의 남학생 중 여섯 명을 뽑아 대표단을 구성하려고 한다. 이 때, 적어도 여학생 두 명이 들어있는 위원회를 구성하는 방법의 수는?

우선 다음은 수학을 복수전공으로 하는 문과계 학생의 답안인데, 이 학생은 경우의 수를 더하는 것과 곱하는 것의 의미를 전혀 파악하지 못하여 이 두 법칙에 대한 개념이 전혀 없음을 보여준다.



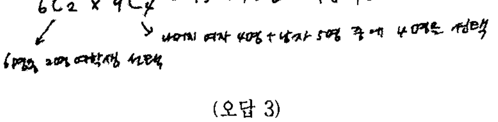
(오답 1)

또한 아래의 답안에서는 여학생이 이미 두 명 뽑혔으므로 나머지 9명 중 4명을 택하는 방법의 수를 구하고 있다. 이는 특정한 여학생 두 명을 포함하면서 위원회를 구성하는 방법의 수를 구한 것으로 전체 구해야 하는 대상 중에서 극히 일부분만을 센 것이다.



(오답 2)

그 외의 틀리게 답한 학생들의 대부분은 곱의 법칙을 적용하는 것이 순서쌍을 세는 것과 같은 상황임을 인식하지 못하고 있었다. 예를 들어, 아래의 답안은 '적어도 두 명'을 충족하기 위하여 처음에 여학생 두 명을 뽑는 방법의 수($_6C_2$)와 남은 9명의 학생 중 4명을 뽑는 방법의 수($_9C_4$)를 곱하였다. 그렇게 함으로써 처음에 뽑힌 여학생과 나중에 뽑힌 여학생의 순서가 바뀐 경우도 별도로 간주한 결과를 초래하여 같은 경우를 중복하여 세게 되었다.

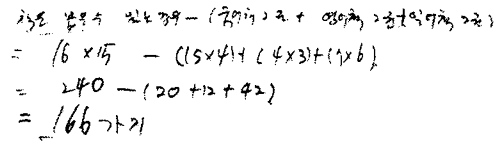


(오답 3)

다음 3번 문제에서도 이와 같은 오류가 일어났다.

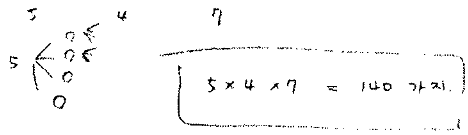
3. 서로 다른 국어 책이 5권, 서로 다른 영어 책이 4권, 서로 다른 일어 책이 7권 있을 때 이 중 언어가 다른 책 두 권을 뽑는 방법의 수는?

다음 답안에서 보면 서로 다른 두 책을 뽑을 때 (국어, 영어)=(영어, 국어), (국어1, 국어2)=(국어2, 국어1)임을 간과하여 세고 있다.

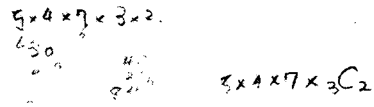


(오답 4)

3번 문제는 각 경우마다 한 번의 곱의 법칙을 적용할 수 있도록, 먼저 경우 나누기를 하고 각각의 경우에 곱의 법칙을 적용해야 하는 복잡한 문제이다. 그러나 이 문제에 대한 대부분의 오답은 경우나누기를 제대로 하지 못한 것이다. 우선 경우나누기를 하지 않고 한 번의 곱의 법칙만 적용하기도 하였는데 다음의 두 개의 답안이 그 대표적인 예이다.

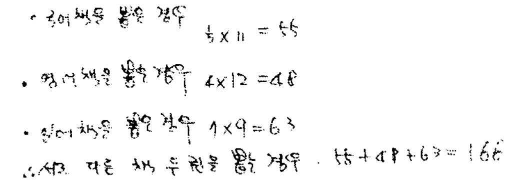


(오답 5)



(오답 6)

다른 한편 경우나누기를 시도하였으나 분할을 제대로 하지 못하여 오류를 범하기도 하였다. 경우나누기는 서로 공통이 없는 경우들로 나누어야 하는데 이것을 인식하지 못하였다. 즉, 공통부분이 있으면 합의 법칙이 적용될 수 없는 상황임에도 불구하고 합의 법칙을 적용하여 오답을 작성하였는데, 다음이 그 대표적인 예이다.

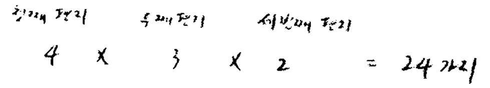


(오답 7)

다음의 4번 문제는 곱의 법칙이 순서 지어진 것을 세는 것이라는 것을 제대로 이해하고 있는지 확인하려는 것이다.

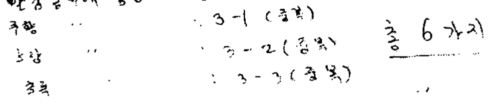
4. 3장의 똑같은 편지가 있다. 이 편지들을 빨간, 주황, 노란, 초록 봉투에 넣으려고 한다. 봉투 하나에 많아야 한 장의 편지를 넣을 수 있다고 할 때 3장의 편지를 네 가지 색깔의 봉투에 넣은 방법은 모두 몇 가지인가?

이 문제에 대한 오답의 대부분은 고등학생들을 대상으로 하였던 이주영 외(2006)의 결과에서와 같이 곱의 법칙을 기본적으로 이해하지 못한 것이었다. 우선 다음 답안은 첫 번째 편지를 넣을 봉투를 선택하는 방법의 수, 두 번째 편지를 넣을 봉투를 선택하는 방법의 수, 세 번째 편지를 넣을 봉투를 선택하는 방법의 수를 모두 곱한 것이다. 이렇게 각 경우를 구하여 곱의 법칙을 적용하여 곱한다는 것은 편지가 구별될 때에 한한다는 것을 이해하지 못한 것이다.

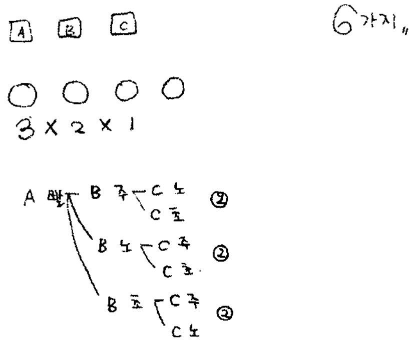


(오답 8)

또 다음의 두 답안은 위의 (오답 8)과 같이 곱의 법칙이 서로 다른 것들을 늘어놓을 때 사용하여야 함에도 불구하고 같은 편지지를 편지에 늘어놓는 식으로 생각하여 곱의 법칙을 적용하였다.



(오답 9)



(오답 10)

위에서 살펴 본 바와 같이, 수학을 전공하고 있는 대학생(2, 3학년)임에도 불구하고, 학생들은 곱의 법칙과 합의 법칙을 제대로 이해하지 못하여 단순한 상황에서 하나의 곱의 법칙이나 하나의 합의 법칙을 사용하는데 익숙하고 본 연구진에서 조사한 문제와 같은 복합적 상황의 경우에는 제대로 적용하지 못하고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 오류들은 더 넓어진 문맥에서는 제대로 답을 하지 못한 것으로 곱의 법칙 개념에 대한 인식론적 장애 현상을 보여주는 것이다.

비록 본 연구에서의 설문조사가 전국에 걸친 것이 아니기는 하지만, 이것이 학생들을 대상으로 한 설문조사 결과임을 감안하면 상당히 많은 학생들이 이와 같은 오류를 범할 것으로 추측할 수 있다.

V. 곱의 법칙과 합의 법칙의 지도방안

Schoenfeld는 '안다'는 것의 의미는 학습자의 입장에서 스스로가 교사의 도움과 안내를 통해 좀 더 적극적으로 구성하고 남에게 그 구성된 지식을 공표함으로써 인정받는 것을 의미하는 반면 Lampert는 학습자의 소극적인 지식의 축적과정의 일부로서 '안다'의 의미를 제시한다. 이런 경우에 학습자는 스스로 지식을 구성할 수 있는 기회가 박탈되고 교사의 일방적인 안내에 의해 지배되고 기계적인 암기와 훈련으로 이들의 지식이 축적되어간다(정인철, 2003).

이는 당장의 입시문제의 해결에는 도움이 될지 모르지만, 학생으로 하여금 배운 지식을 피상적으로 수용하

게 함으로써 의미 있게 이해하고 적용하지 못하게 하며, 새로운 지식을 스스로 개발하지 못하게 하는 치명적인 결함을 갖게 된다(우정호, 2000).

예를 들어 조합문제에서 별다른 의미파악 없이 곧 바로 '그리고'라는 단어가 나오면 곱의 법칙, '또는'이라는 단어가 나오면 합의 법칙을 적용하는 오류(인터넷 조사의 사례 3 참조)를 범하곤 하는데 이것은 기성의 이론적인 수학적 지식을 정확한 이해 없이 곧바로 가르치는 데에서 비롯되는 '형식적 고착'이라 할 수 있다.

English와 Graeme(1995)는 초등학생들이 상의와 하의의 모든 가능한 조합의 개수를 세는 문제를 해결하는 과정에서 사용한 전략을 다음과 같이 세 단계로 나누어 설명하였다. 첫 번째 단계(비계획적)는 어떤 전체적인 계획적 요소들을 배제한 임의적이고 시행착오적 절차를 포함한다. 두 번째 단계(과도기적)에서 학생들은 결합할 항목들을 선택하는데 명백한 유형을 채택하는 과도기적 전략을 보여준다. 이 때에는 시행착오적 접근을 반복하고 마지막 단계(주행거리계)에서 학생들은 주행거리계 전략을 개발한다. 주행거리계 전략은 수형도에서와 같이 한 항목을 계속적으로 선택하여 체계적으로 그 항목을 다른 다양한 항목과 비교하는 것을 포함한다.

제대로 된 개념형성을 위해서도 학생들이 위와 같은 비계획적, 과도기적 단계를 모두 거치는 구체적 경험을 하도록 할 필요가 있다. 특히, 곱의 법칙의 개념형성의 경우에도 다양한 구체적인 사례를 활용하여 위와 같은 단계를 거치게 함으로써, 곱의 법칙이 순서가 지어진 것을 세는 것임을 명확히 하여 (오답 8), (오답 9), (오답 10)과 같은 인지적 장애를 더 이상 일으키지 않도록 해야한다.

한편, 학생의 수학적 지식의 습득은 일련의 여러 개념 구성을 따라서, 각각의 개념은 다음 것에 대해 다소 장애를 형성하면서 일어난다. 인식론적 장애는 제도화된 지식의 형식 속에 들어 있는 것이 아니라 학습자가 구성하는 이해 속에 들어 있다(우정호, 2000).

이러한 인식론적 장애가 곱의 법칙과 합의 법칙의 다음과 같은 개념형성 과정에서 일어날 수 있다: 실생활에서 제기되는 세기문제들은 한 개의 곱의 법칙으로만 해결될 수 없는 문제들이 대부분이고, 이런 문제에서는 각 경우마다 곱의 법칙이 적용될 수 있도록 세고자 하는 대상들의 전체집합을 분할할 필요가 있다. 이 때 전체의 경우의 수는 나뉘어진 경우의 수를 모두 합하면 된다는 합의 법칙이 사용되어야 하는데, 학생들은 이미 형성된 곱의 법칙에 대하여 인지적 장애를 일으키기도 하고 곱의 법칙에 대한 개념이 합의 법칙의 개념형성에 간섭을 일으키기도 한다.

이러한 문제를 최소화하기 위해서는 앞서 언급한 바와 같이 곱의 법칙의 정확한 개념형성을 유도함과 동시에 합의 법칙이 하나의 곱의 법칙이 적용될 수 있도록 세고자 하는 전체집합을 적절히 분할하고 각각의 경우의 수를 모두 합하는 것임을 정확하게 이해시켜야 한다.

이렇게 함으로써 학생들이 가장 많이 했던 질문인 '곱의 법칙과 합의 법칙 중 어느 법칙을 적용하는가'의 문제는 실제로 한 번의 곱의 법칙이 적용될 수 있는지 아니면 여러 개의 곱의 법칙을 사용하여야 하는지를 파악하는 것으로 귀착시킬 수 있다.

위에서 언급한 것으로 볼 때, 먼저 단순한 상황에서의 곱의 법칙을 지도하고 다음에는 복잡한 상황에서 합의 법칙도 적용하도록 지도하는 것이 좋다. 즉, 곱의 법칙을 합의 법칙보다 먼저 다루는 것이 바람직하다.

특히, 합의 법칙을 적용할 때는 경우나누기가 중요함을 인식시켜 학생들이 (오답 5)와 (오답 6)과 같이 경우나누기를 하지 못하거나 (오답 7)과 같이 잘못된 경우나누기를 하는 오류를 범하지 않도록 해야 한다.

여기서 경우나누기는 '세고자 하는 모든 대상을 포함하면서 서로 공통이 없는 부분들로 나누는 것'임을 명확히 지도하여야 한다.

또, 다양한 예를 제시하여 학생들이 두 법칙을 충분히 이해할 수 있도록 해야 한다. 특히 합의 법칙을 다룰 때 세고자 하는 전체 대상에 대하여 한 번의 곱의 법칙이 적용되지 않은 예를 다루어 합의 법칙이 왜 필요한 것인지를 인식시키도록 한다.

앞에서 제안한 것들을 반영하여 곱의 법칙과 합의 법칙의 개념을 형성시키는 구체적인 지도방안을 제시하면 다음과 같다.

우선 곱의 법칙을 다음과 같은 방법으로 합의 법칙보

다 먼저 도입하도록 제안한다. 이 때 각 경우에 문제의 상황과 맥락에 대한 이해를 먼저 할 수 있도록 지도하여야 하며, 곱의 법칙은 순서가 지어진 열을 세는 것으로, 나열된 순서가 바뀌면 다른 경우가 된다는 것을 강조한다.

1. 빨간색 상의(R), 노란색 상의(Y), 초록색 바지(G), 검정색 바지(B)를 인형에게 입히는 상황을 문자를 사용하여 나타내도록 한다. (예를 들어, R-G, RG, 혹은 R과 G와 같이 나타냄.)
2. 1의 경우에 흰색 모자(W), 보라색 모자(V), 주황색 모자(O) 중 하나를 선택하여 씌우는 상황도 첨가하여 문자를 사용하여 나타내도록 한다.
3. 1, 2의 결과를 체계적으로 정리하는 방법을 제시하도록 하여 수형도와 같은 모양을 유도시킨다. 이 때, 각자의 표현방법은 (상의, 하의), (모자, 상의, 하의)와 같은 순서쌍으로 표현하는 것과 같다는 것을 인식시킨다.
4. 수형도를 사용하여 1의 경우의 수는 2×2, 2의 경우의 수는 $3\times2\times2$임을 확인시킨다.
5. 일반적으로 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건가 일어나는 경우의 수가 n이라 하자. 이 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우는 A의 한 경우 a와 B의 한 경우 b의 순서쌍 (a, b)로 나타낼 수 있다는 것을 인지시키고, 따라서 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수가 앞에서와 같이 $m\times n$임을 이해하도록 한다. (참고: 이미 초등학교 수학에서 곱의 의미지도와 곱셈을 유도하는 경우 수형도를 그리거나 순서쌍을 이용했으므로 이 선행경험을 활용할 수도 있다.)

위와 같이 곱의 법칙을 지도한 후에는 합의 법칙을 도입한다. 이 때 곱의 법칙을 한 번 사용해서는 해결할 수 없는 문제를 한 개 제시하기로 한다.

1. 어느 장난감가게에서 다음과 같은 판촉행사를 하고 있다. 고객이 곰인형 또는 토끼인형 중 한 개를 골라 원하는 옷을 입혀 구입하도록 하는 것이다. 곰인형을 위해 준비한 옷은 상의 3종류, 하의 4종류, 토끼인형을 위해 준비한 옷은 상의 5종류, 하의 3종류이다. 이 때, 구입 가능한 인형의 가짓수를 알아보는 문제를 제시한다.
2. 이 문제는 고객이 곰인형을 선택할 수도 있고 토끼인형을 선택할 수도 있으므로 두 가지 경우로 나누어 생각하여야 함을 강조한다.
3. 곰인형을 선택하였을 경우와 토끼인형을 선택하였을 경우 각각에 대하여 구입 가능한 인형의 가짓수를 구하여 보게 한다.
4. 곰인형을 선택하였을 경우 상의와 하의를 입히는 것은 곱의 법칙에 의하여 가짓수를 구하고, 토끼인형을 선택하였을 경우도 곱의 법칙을 이용하여 구입 가능한 토끼인형의 가짓수를 계산할 수 있음을 확인시킨다. 이렇게 두 가지 경우를 나눔으로써 각각의 경우에 곱의 법칙을 적용할 수 있게 됨을 인식시킨다.
5. 곰인형을 선택하였을 경우 만들 수 있는 인형과 토끼인형을 선택하였을 경우 만들 수 있는 인형이 겹칠 수 없음을 확인시킨다(겹칠 수 없는 경우에만 합의 법칙이 적용 가능함을 강조한다.).
6. 4, 5로부터 구입 가능한 인형의 가짓수는 합의 법칙에 의하여 각각의 가짓수를 더한 값 $3\times4+5\times3=27$임을 확인시킨다.
7. 1에서 제시된 문제처럼 곱의 법칙 한번으로 해결될 수 없는 경우, 하나의 곱의 법칙이 적용될 수 있도록 세고자 하는 전체집합을 적절히 분할하고 각각의 경우의 수를 합의 법칙에 의하여 모두 합해서 구해야 함을 정확하게 이해시켜야 한다.

VI. 결 론

어떤 대상의 개수를 셀 때 적용할 수 있는 기본전략은 크게 두 가지로 분류할 수 있다. 하나는 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용하여 해결하는 것이고 다른 하나는 그 대상과 일대일 대응이 존재하면서 이미 세어본 경험이 있는 대상을 찾아 그것의 개수를 세는 것이다. 이와 같이 곱의 법칙과 합의 법칙은 세기의 중요한 수단이다. 그럼에도 불구하고 실제 수업에서는 간단히 언급한 후 곧바로 순열의 세기공식을 지도하는 일이 흔히 일어나고 있다. 순열의 세기공식도 곱의 법칙의 특별한 경우이고 실제 문제상황에서는 경우나누기를 하여야 그 공식이 적

용될 수 있는 경우가 빈번하므로 곱의 법칙과 합의 법칙을 학생들에게 제대로 이해시키는 과정이 필요하다고 하겠다. 이 때 나누는 경우의 수를 최소화하는 능력은 실 사회에서도 매우 중요하다.

본 연구에서는 학생들의 곱의 법칙과 합의 법칙의 개념이해 정도를 살펴보았는데 그 결과는 다음과 같다.

첫째, 인터넷 조사결과 많은 학생들이 곱의 법칙과 합의 법칙의 문제상황 적용에 어려움을 가지고 있었다.

둘째, 수학전공 학생에 대한 설문조사 결과, 과반수 이상의 학생이 곱의 법칙과 합의 법칙을 구별하여 적용할 수 있었다(1번 57%, 3번 74%의 정답률, <표 1> 참조). 이것은 중・상위 계층의 수학전공 학생들을 대상으로 하였기 때문인 것으로 사료된다.

셋째, 곱의 법칙의 경우는 수학전공 학생이더라도 정확한 의미는 제대로 파악하지 못하였다. 실제로 곱의 법칙에 대한 이해를 묻는 문제 4의 정답률이 68%인 반면 곱의 법칙에 대한 정확한 개념을 파악하기 위한 오류분석은 23%만이 제대로 답하였다(<표 1>, <표 2> 참조).

넷째, 학생들의 답안을 분석한 결과 곱의 법칙을 적용하기 위하여 필요한 경우나누기에서 많은 학생들이 분할을 제대로 하지 못하는 오류를 범하고 있었다. 특히, (오답 5), (오답 6), (오답 7)에서 볼 수 있듯이 3번에 대한 오답의 대부분이 경우나누기의 잘못에 기인하였다.

위와 같은 사실을 토대로 하여 본고에서는 학생들의 곱의 법칙과 합의 법칙에 대한 이해도를 높이기 위한 한 지도방안을 제안하였다. 즉, 곱의 법칙을 순서쌍을 세는 것으로 인식시켜 도입하고, 그 다음 합의 법칙을 도입하는데, 합의 법칙은 하나의 곱의 법칙이 적용될 수 있도록 세고자 하는 전체집합을 적절히 분할하고 각각의 경우의 수를 모두 합하는 것임을 이해시키도록 한다. 이 때, 다양한 예를 제시하여 학생들이 두 법칙을 충분히 이해할 수 있도록 해야 한다.

본고에서는 학생들의 세기문제에 대한 이해도를 파악하고 그에 따른 지도방안을 제시하였는데, 이를 바탕으로하여 실제 수업모델을 개발하고 현장에 적용하여 그 효과를 검증하는 연구도 필요할 것이다.

또한, 복잡한 현대사회에서 필요로 하는 독립적인 사고 능력과 의사소통 능력 및 문제 해결력을 기르는 데는 효율적인 '경우 나누기'를 많이 다루어 보는 것이 효과적이다. 이와 같은 '경우 나누기'를 포함하는 조합론 교육이 중요함을 인식하고 그에 대한 많은 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (2001). 고등학교 교육과정 해설 05(수학), 서울: (주)대한교과서

박임숙 (2002). 고등학교에서의 극한개념 교수・학습에 관한 연구, 단국대학교 대학원 교육학 박사학위논문.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부

이주영・김서령・박혜숙・김완순 (2006). 조합문제 사이의 구조적 동형, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **45(1)**, pp.123-138.

이지현 (2004). 조합 문제에 대한 학생들의 이해와 해결 전략, 서울대학교 대학원 석사학위논문.

정인철 (2003). 수학 교육에서 '이해'의 의미와 구조에 대한 고찰, 문제 사이의 구조적 동형, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(1)**, pp.11-18.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils, *Educational Studies in Mathematics* ***32***, pp.181-199.

English, L. D. (1993). Children's strategies for solving two- and three-dimensional combinatorial problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **24(3)**, pp.255-273.

______________ (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form, *Journal of Mathematical Behavior* **15**, pp.81-112.

______________ (1999a). Assessing for structural understanding in childrens' combinatorial problem solving, *Focus on Learning Problems in Mathematics* **21(4)**, pp.63-83.

______________ (1999b). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning K-12* (1999 Yearbook of NCTM), Reston VA: NCTM, pp.22-36.

English, L. D. & Graeme, S. H. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes,* 고상숙 외 역 (2003). 수학교육론, 경문사.

Gholson, B.; Morgan, D.; Dattel, A. R. & Pierce, K. A. (1990). The Development of analogical problem solving: Strategic processes in schema acquisition and transfer. in D. F. Bjorklund (Ed.), *Children's strategies: Contemporary views of cognitive development*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp.269-308.

Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem in strewn with pitfalls, *Educational Studies in Mathematics* **12(4)**, pp.435-443.

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial Analysis and School Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* **3** pp.111-127.

Novick, L. R. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Congnition* **14**, pp.510-520.

Novick, L. R. (1992). The role of expertise in solving arithmetic and algebra word problems by analogy, in J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills*, Amsterdam: Elsevier, pp.155-188.

Silver, E. A. (1981). Recall of mathematical problem formulation: Solving related problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **12(1)**, pp.54-64.

Sriraman, B. & English, L. D. (2004). Combinatrorial Mathematics: Research into Practice, *Mathematics Teacher* **98(3)**, pp.182-191.

Stavy, R. & Tirosh, D. (1992). When analogy is perceived as such, *Journal of Research in Science Teaching* **30(10)**, pp.1229-1239.

Epistemological Obstacles on Learning the Product Rule and the Sum Rule of Combinatorics

Suh-Ryung Kim
Dept. of Math. Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
srkim@snu.ac.kr

Hye Sook Park
Dept. of Math. Education, Seowon University, Chongju, Chungbuk 361-742, Korea
hyespark@seowon.ac.kr

Wan Soon Kim
Dept. of Math., Hoseo University, Asan, Chungnam 336-795, Korea
kimws@office.hoseo.ac.kr

In this paper, we focus on the product rule and sum rule which are considered as the most fundamental counting tools of Combinatorics. Despite of the importance of these rules in both educational and social aspects, they are taught superficially in class. We take the survey through both internet and questionaire to investigate how thoroughly students understand the rules. Then we discuss about the results of the survey and suggest effective teaching methods to improve students' understanding of these rules.

* ZDM Classification : K24
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D70
* Key Words : combinatorics, product rule, sum rule