韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 05. 제 46권, 제 2호, 141-153.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2007, Vol. 46, No. 2, 141-153.

영상적 표상이 포함된 비례 문제에서 나타난 아동들의 비례적 사고 분석

김 민 경 (이화여자대학교)

Ⅰ. 서 론

우리 일상생활 중 상당히 많이 사용되는 개념이면서 초등학생 대부분 어려워하는 개념 중 하나가 비와 비례/비례식 개념일 것이다. 미국의 NCTM(2000)에서도 강조되었듯이 5-8학년에서 다루어져야 할 중요한 개념 중 하나로 비와 비례/비례식 개념을 들고 있다. 이 개념은 우리나라 교육과정상에서 구체적으로는 6학년에서 등장하는데 이는 2:3 = 4:6 과 같이 표면적으로 단순하게 이해할 수 있어 보일지 모른다. 하지만 정완호・권용주・김영신(1998) 및 Irwin & Irwin(2005) 등이 지적하듯이 초등학생에게 있어 비와 비례에 관한 개념은 결코 쉽지 않은 개념이다.

숫자를 갖고 A:B = C:D의 공식에 대입하는 건 공식에 단순히 숫자를 대입하는, 그다지 어렵지 않은 개념이라고 할 수 있다. 하지만 실제적인 문제 상황에서 이러한 관계와 공식의 적용을 찾아 풀어내는 건 결코 쉬운 과정이 아니다. 비와 비례는 곱셈, 나눗셈, 분수 뿐 아니라 일차함수를 포함하는 상황 등 다른 개념들과 밀접하게 연관되어 있다. 여러 개념들과의 긴밀하고도 복잡한 연계 속에서 문제를 풀어야하는 만큼 이를 이루고 있는 각 개념의 선수학습은 또한 중요한 학습요인으로 분석된다.

이러한 비와 비례의 개념에서 등장하는 비례적 사고 혹은 비례 추론(proportional reasoning)은 새로운 개념이 아니다. 두 비의 동등한 관계를 포함하는 second-order의 관계다(Piaget & Inhelder, 1958). '4개 사탕이 50원이다.'의 의미는 돈의 액수와 그 돈으로 살 수 있는 사탕의 개수를 의미한다. 여기서 50원에서 150원으로 변화할 때 사탕을 살 수 있는 개수가 그 영향을 받아 같이 변한다는 비례적 사고를 의미한다. 비례적 사고는 이후 함수적 사고를 갖는데 매우 중요한 역할을 한다. 왜냐하면 이후 이어지는 중학교 교육과정에서 비례적, 반비례적 관계로 연결되며 실생활에서의 비례적 사고는 여러 면에서 실용적인 측면이 있어 중요한 개념이기 때문일 것이다.

문제해결 과정에서 문제에 제시된 문자적 정보는 매우 중요한 역할을 한다. 더욱이 문제에 포함된 다이어그램이나 그림(picture) 등의 영상적 표상(iconic 혹은 pictorial representation)의 정보는 문제해결에 긍정적인 도움을 줄 수 있음(Lamon, 1994; Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995)이 제안, 논의된 바 있다. 이에 본 연구에서는 아동에게 제시되는 비례 관련 문제에서 영상적 표상이 제시되는 경우와 그렇지 않는 경우 각각 아동의 비례적 사고가 어떻게 나타나는지 살펴보고자 한다. 또한 본 연구의 문제해결 과정에서 학생들의 문제해결 전력은 어떠한지, 문제해결과정에서 어떠한 오류가 나타났는지 살펴보도록 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 표상

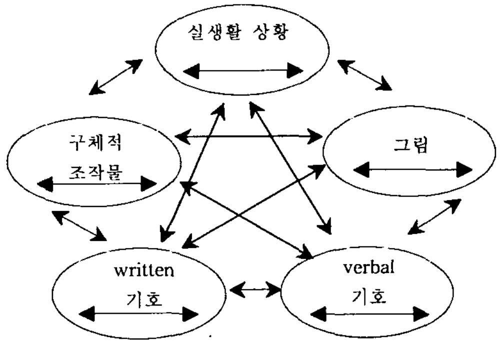
추상적인 수학 학습을 쉽게 이해하도록 하는데 있어서 아동의 인지발달의 경로인 활동(조작), 영상(그림), 상징(기호, 식)의 단계적인 과정에 따라 학습을 하면 효과적이라는 브루너의 인지경로 이론을 들 수 있다(Bruner, 1966). 이는 아동들에게 제시되는 문제 및 해결 과정에 있어서 처음 단계에서는 아동들이 실제 구체물 조작활동

* 2007년 2월 투고, 2007년 3월 심사 완료
*1)ZDM분류 : F83
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 비례적 사고, 문제해결, 영상적 표상

을 해 보게 하는 활동적 수준으로, 다음은 이미지를 이용한 영상적 수준으로, 마지막으로 기호를 엄격하게 다루는 상징적 수준이어야 한다는 것이다(강문봉 외, 2001).

Schneider & Saunders(1980)는 문제해결의 지도의 초기 단계에서 학생들이 문제해결에 적절한 정보를 기록할 수 있도록 그림 언어를 제공하는 방법을 제안한 바 있다. 그들의 연구 결과로는 학생들이 종이 위에 그림 언어를 이용하여 문제를 해결할 때 학생 스스로 발견한 유용한 방법으로 정보를 기록하며 문제를 해결하는 경향이 나타났다.

한편, 구체적인 상황에서 좀 더 추상적으로 지식이 전이되어 가는 과정을 Lesh는 <그림 1>로 표현하기도 하였다. 표상양식의 발달단계를 존중한 브루너의 인지경로(EIS)이론에서 나타나는 영상적 표상(iconic or pictorial representation)이 개념의 충분한 정의 없이도 양상을 통해 그림으로 지식을 이해할 수 있게 할 수 있다는 점을 뒷받침해 주고 있다. 영상적 표상 단계는 시각적 조작을 이용해 지식을 그림이나 도식, 모형 등으로 표현하는 것으로 그림, 도표, 벤다이어그램, 수직선 등이 이용된다.



<그림 1> Lesh의 전이 모델(Translation Model)
(Lesh, 1979, p449)

이와 관련하여 좀 더 구체적으로 NCTM(2000)은 수학교육에서의 10개 Standards 중 하나인 'Representation'에 대해 다음과 같이 권고하고 있다.

- 수학적 아이디어를 조직하고 기록하고 의사소통하기 위한 표상을 만들어 사용하기
  - -학생들은 자신의 아이디어를 다른 사람들이 이해할 수 있도록 표현하는 방법을 학습하기
  - -기존의 표현을 배우고, 수학 학습을 위한 도구로서 자신만의 표상을 만들어 정교화하여 활용하기
- 적절한 수학적 표상을 선택하여 문제를 해결하고, 이를 활용하기
  (학교에서 다루어지는 많은 수학적 개념은 학생들의 이해를 도울 수 있는 다양한 표상들을 통하여 제공되어야 한다.)
  - -표상에 대한 반성을 통해 다양한 표상들의 장단점을 이해하기
- 물리적, 사회적, 수학적 현상을 모델화하고 해석하기 위하여 표상을 이용하기(수학적 모델이란 복잡한 현상을 이상화했다는 점에서 요소와 관계에 대한 수학적 표상을 의미한다.)

표상 관련 연구로는 초등수학에서의 전반적인 표상연구(최창우, 2004)를 포함하여 학생 대상의 표상 연구(이양미・전평국, 2005), 교사를 대상으로 한 표상 연구(이대현・서관석, 2003; 이종욱, 2006 등) 등을 들 수 있다. 특히 이러한 표상을 학습전략으로 활용하여 수학학습에서 중학생 및 고등학생을 대상으로 그 효과를 관찰한 국미경・곽행숙(1999) 및 서화자・권명옥・김춘미(2004)의 연구가 있다. 이 연구들에서는 수학적 문장제에서 학생들이 문제를 보고 문제 속에 포함되어 있는 정보들을 그림이나 도표로 표현할 수 있도록 한 표상학습전략을 사용하여 학생들의 문제해결력이 향상되었음을 보여주고 있다.

2. 비례적 사고

수학교육과정 6-가 단계의 규칙성과 함수 영역에서 제시되는 비례 개념은 비와 비율에 관한 이해를 통해 비례식을 이해하도록 구성되어 있으며 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

6단원 비와 비율
- 두 수량 사이의 비와 비율의 의미를 이해한다.
- 비율을 여러 가지 방법으로 나타낼 수 있다.

7단원 비례식
- 비례식을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

특히 7단원 비례식은 비례식 알아보기, 비의 성질 알아보기, 비의 성질 이용하기, 비례식의 성질 알아보기, 비례식 풀기, 비례식을 이용하여 문제 풀기의 순으로 구성되어 있다.

NCTM(2000)에서도 5-8학년을 위한 수와 연산 영역을 위한 기준(Standards)에서 '양적인 관계를 표현하기 위하여 비와 비례를 이해하고 적절히 사용할 수 있어야 한다'고 권고하듯이 비와 비례 개념은 초등학교 고학년으로 올라올수록 강조되는 개념 중 하나이다. 비와 비례에 관한 연구로는 Piaget & Inhelder(1958), Singh(2000) 등을 들 수 있다.

A:B = C:D로 설명되는 비례식에서 두 비의 동등한 관계를 포함하는 second-order의 관계는 비례적 사고 혹은 비례 추론(proportional reasoning)으로 설명된다(Piaget & Inhelder, 1958). 즉 '빵 2개를 만드는 데에 달걀이 3개 필요하다. 빵 4개를 만드는 데에는 달걀이 몇 개 필요한가?'와 같은 6-가 교과서의 문제 상황의 의미는 달걀의 개수와 그 개수로 만들 수 있는 빵의 개수를 의미한다. 여기서 빵 2개에서 4개로 변화할 때 그 영향을 받아 필요한 달걀의 개수가 같이 변한다는 개념은 비례적 사고를 의미한다. 또한 비례적 사고를 황금분할과 같은 전체의 부분을 비교하는 개념으로, 겔론 당 마일과 같은 rates의 개념으로, 삼각형의 합동변환에서와 같은 늘리거나 줄이는 두 변 길이의 비 등으로 구분하여 설명하기도 한다.

이러한 비례적 사고에 관한 연구들로는 다음과 같은 연구들을 주목할 수 있다. Petty & Drum(2001)은 미니애쳐 장난감을 이용, 비/비례와 관련된 개념을 시각적 표상으로 도입함으로써 구체적인 사물과 실세계에서의 연결을 통한 비례적 사고 학습을 강조한 바 있다. 또한 Dwyer, Causey-Lee & Irby(2003)의 연구에서는 학생들이 닮음인 사각형에 관하여 예측하는 것을 적용함으로써 비례적 사고를 사용하기 시작하고, 이를 그래프로 나타내어 선형관계에서의 변화의 비율을 자연스럽게 토의하게 되었다. 6학년 학생들의 실생활과 관련된 맥락에 기초하여 문제를 선정하여 패턴 표를 도구로 하여 proportional thinking을 유도하고, 학생들 스스로가 비례적 사고를 할 수 있도록 한 Sharp & Adams(2003) 및 Lo & Watanabe(1997) 등의 연구가 있다. 우리나라에서도 초등학생의 추론 전략의 발달에 관한 정완호·권용주·김영신(1998), 비례 논리 관련 프로그램의 효과를 분석한 정완호(1998) 등의 연구가 있다.

아동의 비례적 사고를 위한 진단평가 연구를 수행한 Misailidou & Williams(2003)는 'proportional reasoning item bank'로 불리는 다양한 형태의 테스트를 이용하였다. 여기서 303명 학생들의 시험결과는 Rasch 분석방법에 의해 측정되었고 84명 학생들의 인터뷰를 통해 그림이 주어진 문제(여기서 그림이 주어진 문제를 '모델이 있는 문제'라고 표현함)와 그렇지 않은 문제 사이에서 학생들의 반응을 비교 분석하였다. 학생들의 비(비례) 관련 개념 및 이해에 관한 성취를 측정함과 함께 그들의 문제해결전략에 대한 경향성을 측정하면서 나타난 오류들을 분석하기도 하였다.

3. 문제해결 과정에서의 수학적 오류

문제를 푸는 과정에서 보면 처음부터 완전한 답을 기대하기는 어려울 것이다. 국어대사전에 따르면 '오류'란 의미는 '그릇됨', '그릇되어 이치에 어긋남' 등으로 기록되어있다. 수학적 오류에 관한 의미로 송순희·오정현(1997)은 '수학과 관련된 바르지 못한 논리적 과정'으로 설명하기도 하였다.

수학교육에서의 오류 분석은 아동들의 산술적 오류에 대해 언급한 Buswell과 Judd(1925)를 포함, Cox (1975), Radatz(1979) 등에 의해 오랜 역사를 걸쳐 연구되어 오고 있다. 특히 Radatz(1979)는 아동에게 나타나는 오류를 다음과 같이 분류하기도 하였다.

- 언어적 어려움으로 인한 오류
- 공간적 정보를 얻는데 어려움으로 인한 오류
- 충분치 못한 사실과 개념 등의 선수학습의 부족으로 인한 오류
- 부정확한 연결 혹은 사고의 고정으로 인한 오류
- 관련 없는 공식이나 전략의 적용으로 인한 오류

또한 Cox(1975)는 체계적인 오류, 임의의 오류, 부주의한 오류, 불완전한 자료 오류 등으로 구분한 바 있다. Babbit(1990)은 제4차 NAEP(National Assessment of Educational Progress)의 연구를 기초로 초등학생의 문

장제 문제해결과정에서 나타나는 오류 유형을 계산 오류, 연산 오류, 관련 없는 정보 오류, 언어 순서 오류, 시도하지 않은 오류 등으로 분류하기도 하였다. 특히 Miller & Fey(2000)의 연구에서는 학생들이 비와 비례에 관한 문제를 해결함에 있어서 곱하기 혹은 나누기의 전략을 사용하기 보다는 덧셈 혹은 뺄셈의 전략을 사용함으로써 문제해결 오류를 보인 현상을 밝힌 바 있다.

우리나라 수학교육의 경우, 초등교육에서는 혼합연산이나 계산능력 관련(구미애, 1998; 김종태, 1975; 김추일, 1985; 이종문, 1983), 분수와 소수연산(권오남 · 김진숙 · 이경아, 1997), 분수 및 유리수 계산(이경아, 1996; 조병윤, 1992), 도형(이종영 · 장영은, 2003) 등이 있다. 특히 분수 및 유리수 연산 과정에서 나타나는 오류는 다음의 <표 1>과 같이 요약할 수 있다.

<표 1> 분수/유리수 계산에서 나타나는 오류 유형 연구

구분	오류가 나타난 유형 구분
제4차 NAEP	분수의 의미 이해 부족 대분수를 가분수로 고치기 이분모 분수 계산의 통분 과정
조병윤(1992)	연산의 기본 원리, 대분수 처리, 약분 처리, 통분과정
이경아(1997)	대분수 변환 과정, 가분수 변환 과정 통분 과정, 약분 과정, 역수 과정 덧셈 과정, 계산 순서 및 기술적 오류 분수 구성 과정

한편 보다 고차원적 사고를 요하는 중등교육에서는 중학생의 일차방정식(김차숙, 2003), 함수(송순희 · 오정현, 1997) 관련 연구와 고등학생 대상의 수열(김수진, 2001), 조합수학(김중환, 2003) 등의 연구가 있다. 특히 김부미(2005)는 일차함수 관련 다양한 과제(예측 과제, 번역 과제, 해석 과제, 척도 과제 등)에서 나타난 오류 유형 분류 결과를 크게 해석 오류, 번역 오류, 인식 오류 등으로 분류한 바 있다.

Misailidou & Williams(2003)는 아동들의 비례적 사고를 중심으로 한 오류 분석 관련 진단평가 연구를 수행한 결과, 아동들은 주어진 문제해결과정에서 '더하는(additive) 오류', '정확하지 않은 build-up 방법의 오류', '(조건과 상관없이 무조건) 반으로 나누거나 두 배를 하는 오류'와 같은 자주 나타난 오류 외에 'incorrect build up', 'magical doubling/halving', 'constant sum', 그리고 incomplete reasoning' 등과 같은 오류가 나타났다고 보고한 바 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 분석 대상

본 연구는 비/비율에 관한 문장제에 있어서 초등학생의 비례적 사고 정도가 어떠한지, 문제해결 과정에서 나타나는 문제해결전략 및 오류는 무엇인지를 조사하여 그들의 비와 비례에 대한 이해력 증진 방안을 모색하기 위하여 서울 소재 두 초등학교에 재학 중인 6학년 81명을 대상으로 실시하였다(<표 2> 참조).

<표 2> 대상 학생수

<table>
<tr><th rowspan="2">초등학교</th><th colspan="2">학생수</th></tr>
<tr><th>집단1</th><th>집단2</th></tr>
<tr><td rowspan="2">M</td><td colspan="2">23</td></tr>
<tr><td>13</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">N</td><td colspan="2">58</td></tr>
<tr><td>26</td><td>32</td></tr>
<tr><td rowspan="2">계</td><td colspan="2">81</td></tr>
<tr><td>39</td><td>42</td></tr>
</table>

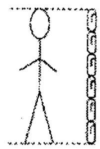
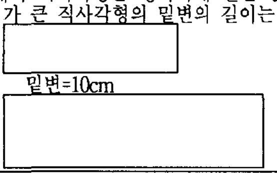
2. 검사 도구

1) 검사도구의 구성 및 평가

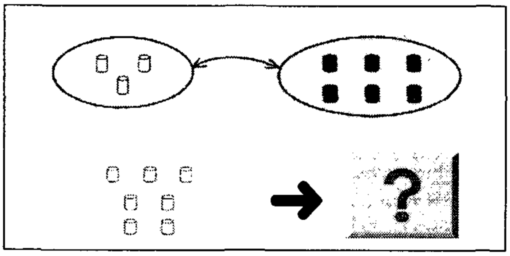
본 연구에 사용된 검사도구는 초등학생을 대상으로 Misailidou & Williams(2003)의 연구에서 사용되었던 'without-models' 및 'with-models' 형태의 진단평가에 사용된 13개 문항들을 우리나라 교육과정 및 현실에 적절하게 번안, 수정하여 실시하였다. 문항은 모두 9개로 구성되었으며(<표 3> 참고), 이들 문제는 주로 비례적 사고를 묻는 문장제로 예를 들어 2번 경우, 5cm : 2마리 = 10cm : ?의 형태이다. 문제 유형은 편의상 A와 B형으로 구분하여 제시되었다. 'without-models' 유형을 수정하여 만든 A형은 9개의 문항으로 구성되었는데 이들은 다음 세 가지(각 3문항 포함)로 분류된다.

(가) 텍스트와 숫자의 정보만으로 이루어진 문제-1(3,6,8번)
(나) 도형을 포함한 단순한 그림정보를 포함한 문제(2,7,9번)
(다) 텍스트와 숫자의 정보만으로 이루어진 문제-2(1,4,5번)

<표 3> 각 문항의 구성

문항번호 (가칭)	유형A,B 동일		유형B에서 영상적 표상 제공 (다)	문항
	그림 정보 전혀 없음 (가)	그림 정보 주어 짐 (나)		
#1 (학급내 학생)			◎	우리 반 선생님은 학생들을 각 그룹에 3명의 여학생들을 포함하여 5개의 그룹으로 나누었다. 단 각 그룹의 인원수는 같습니다. 우리 학급에 총 25명의 학생이 있다면, 남학생과 여학생은 각각 몇 명인가?
#2 (물고기 먹이)		◎		A, B, C 세 마리의 뱀장어가 동물원의 수족관 안에 있다. 뱀장어들은 자신의 몸길이에 비례하여 물고기 먹이 마리수가 결정된다고 한다. 뱀장어 C에게 2마리의 물고기가 주어진다면, 뱀장어 B에게는 몇 마리의 물고기가 주어지는가? A는 15cm B는 10cm C는 5cm
#3 (양파스프)	◎			* 8인분의 양파스프를 만들기 위해서는 다음 5가지가 필요하다고 한다. • 양파 8개 • 물 4컵 • 스프조각 4개 • 크림 1컵 • 디저트용 스푼으로 버터 12스푼 양파스프 2인분을 만들기 위해서는, 디저트용 스푼으로 버터가 얼마만큼 필요한가?
#4 (과일가게)			◎	과일가게에서 3개의 사과를 9000원에 팔고 있다면 사과 7개는 얼마인가? 단 사과의 가격은 모두 같다.
#5 (페인트칠)			◎	수지와 재현은 페인트칠을 함께 하려고 하는데, 이 때 같은 색깔을 만들어 사용하고 싶다. 수지는 노란 페인트 3통과 빨간 페인트 6통을 사용했고, 재현은 노란 페인트 7통을 사용하였다. 재현은 얼마만큼의 빨간 페인트가 필요한가?
#6 (캠핑)	◎			지난 주 10명의 야영자가 북한산에서 캠핑을 했다. 8덩어리 빵으로 야영자 10명이 모두 똑같은 양으로 나누어 먹어야 한다고 한다. 이러한 분배원칙으로 야영지도자가 요리사에게 다음 주 월요일에는 빵 16덩어리를 준비하라고 하였다면, 다음주 월요일에 캠프에 참여하는 인원은 몇 명인가?
#7 (키작은아저씨)		◎		'키작은아저씨'와 '키다리아저씨'는 성냥개비로 서로의 키를 측정해 보았더니, '키작은아저씨'는 4개의 성냥개비 높이이고 '키다리아저씨'는 6개의 성냥개비 높이라고 한다. 오른쪽 그림은 '키작은아저씨'의 키를 클립으로 측정한 것을 나타낸 것이다. '키다리아저씨'의 키를 클립으로 측정한다면, 몇 개의 클립이 필요할까? 
#8 (인쇄기)	◎			인쇄기는 14개의 사전을 찍어내는데 정확히 12분이 걸린다. 그렇다면 30분 동안에는 총 몇 개의 사전을 찍어낼 수 있을까?
#9 (직사각형)		◎		다음 2개의 직사각형은 정확하게 같은 닮음 모양이지만 한 개는 다른 한 개보다 크기가 크다. 크기가 큰 직사각형의 밑변의 길이는 몇 cm인가? 4cm  밑변=10cm 6cm

'with-models'유형을 수정·보완한 B형은 A형 문항 중 (가)와 (나) 부분은 동일한 문제가 제시되며 (다) 부분에 있어 1,4,5번에 영상적 표상(예, 5번에 삽입된 그림 <그림 2> 참조)을 문제에 포함하여 제공한 유형이다. 이렇게 함으로써 학생이 (가)와 (나)에서 나타내는 문제해결력 정도를 살펴보면서 (다)와 같이 영상적 표상의 정보가 주어지는가 여부에 따른 학생들 반응의 차이를 알아보고자 하였다. 집단1에게는 A형, 집단2에게는 B형이 주어졌다.



<그림 2> 유형B(#5문항)에 삽입된 영상적 표상의 예

비례적 사고에 관한 검사 도구는 총괄적 채점 방법을 사용하는 Malone의 5단계 평정법(noncommencement ->approach->substance->result->completion, Malone, Dougras, Kissane & Mortlock, 1980))을 기초로 하여 본 연구내용에 맞게 다음의 <표 4>와 같이 보완되어 평가되었다.

<표 4> 본 연구에서 활용된 기본 평가틀

점수	내용
0점	-백지 혹은 오답 이외에 아무 것도 없는 경우
1점	-문제의 정보를 옮겨 쓰는 수준은 넘었지만, 정답을 유도할 만한 접근 방법을 택하지 못한 경우, 부적절한 전략을 택하여 답이 틀린 경우, 문제를 제대로 이해하지 못한 경우
2점	-적절한 전략을 이용하였으나 답을 구할 만큼 충분하지 않아서 답에 이르지 못했거나 오답을 도출한 경우 -정답을 제시하였지만 풀이 과정을 이해할 수 없게 썼거나 과정을 나타내지 않은 경우, 전략이 적절하지 못한 경우
3점	-비례 관계를 이해하고 적절한 전략을 이용하였으나, 답이 부정확한 경우
4점	-비례적 사고에 대한 적절한 이해를 통해 정답을 구했고, 문제에서 지시한대로 답을 쓴 경우

2) 검사도구의 문제해결 과정에서 나타난 문제해결 전략 및 오류 분석

문제해결에 있어서는 Polya(1957)의 문제해결 4단계 즉 문제의 이해->계획 수립->계획의 실행->검토 및 반성의 과정을 들 수 있다. 이중 특별히 계획 수립 단계에서 문제를 구체적으로 해결하기 위한 전략으로는 Lenchner(1983) 및 강문봉 등(2001)이 제시한 전략을 들 수 있다(<표 5> 참조).

<표 5> 문제해결 전략

Lenchner(1983)	강문봉 등(2001)
① 그림이나 도표로 그리기	① 예상과 확인(혹은 시행착오)
② 규칙성 찾기	② 그림 그리기
③ 체계적인 목록 만들기	③ 규칙성 찾기
④ 표 만들기	④ 표 만들기
⑤ 문제를 단순화하기	⑤ 거꾸로 풀기
⑥ 추측하고 점검하기	⑥ 단순화하기
⑦ 실험해 보기	⑦ 식 만들기
⑧ 실제로 해보기	⑧ 논리적 추론
⑨ 거꾸로 풀기	
⑩ 식 세우기	
⑪ 연역적으로 추론하기	
⑫ 관점을 바꾸어 보기	

이에 본 연구에서는 Lenchner(1983)가 제시한 유형을 기초로 하여 아동들이 문제해결 과정에서 보여준 문제해결 전략을 분류하였다. 또한 문장제 문제해결에서 나타난 오류는 Babbit(1990)이 제시한 계산 오류, 연산 오류, 관련없는 정보 오류, 언어 순서 오류, 시도하지 않은 오류, 등으로 분류한 유형을 기초로 하여 분류하였다.

3. 신뢰도 검증

대학원에서 수학교육을 전공한 내용 전문가(초등교사) 3인의 내용타당도 검증 후, 대학 및 대학원에서 초등교육과 수학을 전공한 5년, 6년, 10년 교사경력의 초등교사 3인에 의해 응답 평가가 이루어졌다. 채점자 훈련을 거쳐 각 문항의 구체적인 채점 기준표에 대한 합의를 거친 후, 그 기준에 따라 각 채점자들은 독립적으로 채점하였다.

각 문항은 4점 만점으로 평가 점수는 서술형 문항을 채점한 뒤 세 평가자의 점수의 평균값으로 하였다. 각 학생들의 점수에 대한 채점자간 신뢰도는 다음의 <표

6>에 제시한 바와 같이 .974, .874, .882로 나타났으며 통계적으로 유의미한 상관도를 나타냈다. 검사도구의 신뢰도를 구하기 위하여 Cronbach α 신뢰도를 사용한 문항 내적 일관성 신뢰도 검사를 실시하였으며 신뢰도 계수는 0.982를 나타냄으로써 그 신뢰도가 비교적 높다고 해석할 수 있다(<표 7> 참조).

<표 6> 총점에 대한 채점자간 신뢰도

		채점자 A	채점자 B	채점자 C
채점자 A	Pearson 상관계수	1	.974**	.874**
	유의확률(양쪽)		.000	.000
	N	729	729	729
채점자 B	Pearson 상관계수	.974**	1	.882**
	유의확률(양쪽)	.000		.000
	N	729	729	729
채점자 C	Pearson 상관계수	.874**	.882**	1
	유의확률(양쪽)	.000	.000	
	N	729	729	729

** $p<0.01$

<표 7> 문항내적 일관성 신뢰도

구분		Cronbach α
문항 총점		.982
채점자별	채점자A	.824
	채점자B	.809
	채점자C	.803

Ⅳ. 연구결과

1. 학생들의 비례적 사고 분석

초등학교 6학년생에게 주어진 비례 관련 문제(각 4점 만점)에서 연구대상은 다음의 <표 8>과 같이 2점에서 4점 사이의 비례적 이해 정도를 나타냈다.

Misailidou & Williams(2003, p341)의 선행연구[1]에서는 연구대상 학생들이 가장 어렵게 반응한 문항으로는 페인트칠 문항(#5)인 것으로, 반대로 쉽게 반응한 문항으로는 양파스프 문항(#3)와 학급내 학생 문항(#1)로 나타났다. 이렇게 60.4%의 비교적 높은 정답률을 나타낸 미국 학생들의 경우 요리할 때 사용되는 레시피(recipe) 관련 상황에 비교적 많이 익숙해 있었던 점을 생각해 볼 수 있겠다. 반면 본 연구에서는 두 집단 모두가 어려워한 문항으로는 학급내 학생 문항(#1), 그 반대의 경우로는 과일가게 문항(#4)인 것으로 나타났다. 우리나라 학생의 경우, 다른 문항에 비교해 볼 때, 단순하게 비례식을 세워 풀 수 있는 유형이 아닌 #1 문항은 비교적 어려웠던 반면, 단순하게 비례식을 세워 풀 수 있는 #4 문항의 경우는 비교적 쉬웠던 것으로 보여 진다.

<표 8> 두 집단에서 나타난 학생들의 비례적 사고 수준의 집단간 차이

평균(표준편차)

구분	문항	집단1	집단2	t	p
(가)	#3	3.05(1.413)	3.21(1.317)	-.537	.592
	#6	3.46(1.189)	3.64(.983)	-.750	.455
	#8	3.33(1.199)	3.45(.968)	-.493	.623
(나)	#2	3.54(.884)	3.74(.734)	-1.109	.271
	#7	3.18(1.355)	3.38(1.361)	-.667	.507
	#9	2.69(1.608)	3.33(1.300)	-1.979	.051
(다)	#1[a]	2.87(1.399)	3.05(1.545)	-.535	.594
	#4[a]	3.64(.811)	3.93(.341)	-2.107	.038**
	#5[a]	2.90(1.483)	3.55(.993)	-2.334	.022**

[a]: 집단B에게는 영상적 표상을 제공한 문항
**: $p<0.05$

본 연구에서 사용된 문항 9개의 구성을 (가), (나), (다)의 유형으로 구분하여 각 집단의 점수를 비교해 보면 다음과 같다(<표 8> 참조). 두 집단 모두에게 동일하게 제시되었던 (가) 유형(텍스트와 숫자의 정보만으로 이루어진 문항: 3,6,8번) 및 (나) 유형(도형을 포함한 단순한 그림 정보를 포함한 문항: 2,7,9번)의 6문항 모두에서 두 집단 간 점수의 차이는 통계적으로 유의미한 차이

1)

문항 번호	#3 (양파스프)	#5 (페인트칠)	#7 (키작은 아저씨)
정답반응수(%)	128(60.4)	47(37.9)	55(25.9)

를 나타내지 않았다. 이는 두 집단에게 동일하게 주어진 문항에 대해 두 집단 간 유의미한 차이가 나타나지 않음으로써 두 집단은 동질한 집단으로 보여 진다.

반면, (다) 유형의 경우, 집단1에게는 유형A의 문항지에서 텍스트와 숫자의 정보만으로 이루어진 문항(1,4,5번)을 풀게 하고, 집단2에게는 그 문제에 영상적 표상을 제공하여 유형B를 풀게 한 결과, 과일가게 문항(#4) 및 페인트칠 문항(#5)에서 각각 두 집단간 유의미한 차이가 나타났다. 이는 비례적 사고를 요하는 문제 상황에서 텍스트로만 문제가 제시되는 경우보다 영상적 표상이 주어질 때 문제해결에 도움이 되었다고 보여 진다. 하지만 학급내 학생 문항(#1)의 경우, 두 집단간 차이는 나타나지 않았는데 이는 두 집단 모두에게 평소 익숙하지 않은 문제로 두 집단 모두 문제풀이를 시도하기 어려웠던 것으로 보여 진다.

2. 문장제 풀이과정에서 나타난 문제해결 전략 및 오류 분석

문장제 풀이과정에서 나타난 문제해결 전략 유형 분석은 Lenchner(1983)의 유형을 활용하였다. 두 집단에서 각각 가장 많이 나타난 전략들 순으로 그 빈도수를 제시하여 보면 다음의 <표 9>와 같다. 주어진 비례식 관련 문제에서 학생들이 사용한 문제해결전략으로는 식 세우기, 규칙성 찾기, 추측하고 점검하기, 그림이나 도표로 그리기 등의 순으로 나타났으며 두 집단 모두 주어진 비례식 사고 관련 문항에 대해 문제해결 전략 사용에 있어서 유사한 전략을 사용한다고 보여 진다. 각 집단에서 나타난 문제해결 전략의 대표적인 예는 다음의 <표 10>에 제시되어 있다. 가장 많이 사용한 전략인 식 세우기는 <표 10>에 나타났듯이 5:2 = 10:□와 같이 식을 곧바로 세워 풀고 있었다.

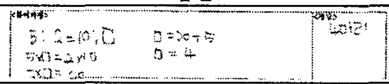
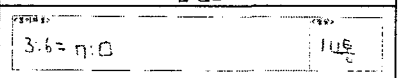
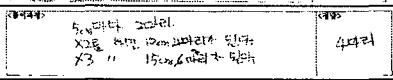
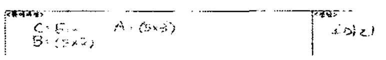
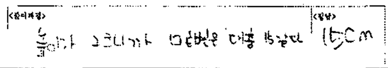
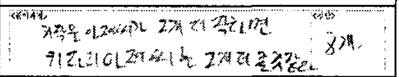
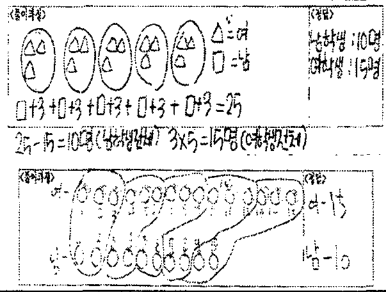
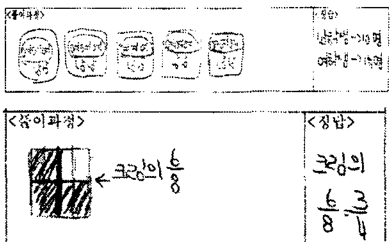
문장제 해결과정에서 학생들이 나타낸 오류 유형은 Babbit(1990)의 오류 유형(계산 오류, 연산 오류, 관련 없는 정보 오류, 언어 순서 오류, 시도하지 않은 오류)을 기초로 하여 이루어졌으며 학생들이 보여준 오류에 대해 이 다섯 가지 유형에 포함되기 어려운 오류는 기타로 분류하였으며 이는 '알아볼 수 없는 풀이'와 같은 오류로 추가 분류되었다(<표 11> 참조). 나타난 오류 중 각 집단의 대표적인 예를 제시하면 다음의 <표 12>와 같다.

그 결과, 많이 나타난 오류는 '관련 없는 정보 오류' 및 '시도하지 않은 오류'로 나타났다. 여기서 관련 없는 오류로 분류된 오류 중에는 Misailidou & Williams(2003)의 선행연구에서 가장 많이 나타났던 '더하는(additive) 오류'가 유사하게 나타나기도 하였다. 이는 본 연구의 경우에서 1번과 같은 경우, 가장 흔한 경

<표 9> 집단1과 집단2에서 나타난 문제해결전략 유형

유형	문항	집단1							집단2				
		식 세우기 (10)	규칙성 찾기 (2)	추측하고 점검하기 (6)	그림이나 도표로 그리기 (1)	머릿속 계산 (13)	문제를 단순화하기 (5)	실제로 해보기 (8)	식 세우기 (10)	규칙성 찾기 (2)	그림이나 도표로 그리기 (1)	추측하고 점검하기 (6)	관점을 바꾸어 보기 (12)
(가)	3	24	7	4	0	1	0	0	37	0	0	0	1
	6	34	1	1	0	0	1	0	39	0	0	1	1
	8	35	0	1	0	1	1	0	39	1	0	0	0
소계		93	8	6	0	2	2	0	115	1	0	1	2
(나)	2	19	17	1	1	2	0	0	22	20	0	0	0
	7	34	0	3	0	0	1	0	38	0	0	2	0
	9	30	0	2	0	1	1	0	40	1	0	0	0
소계		83	17	6	1	3	2	0	100	21	0	2	0
(다)	1	31	0	0	4	1	0	1	25	3	7	2	0
	4	38	1	0	1	0	0	0	40	1	2	0	0
	5	35	1	1	0	0	0	0	41	0	1	0	0
소계		104	2	1	5	1	0	1	106	4	10	2	0
계		280	27	13	6	6	4	1	321	26	10	5	2

<표 10> 나타난 문제해결전략 중 대표 예

해결전략	내용	집단1	집단2
#10	식세우기		
#2	규칙성 찾기		
#6	추측하고 점검하기		
#1	그림이나 도표로 그리기		

<표 11> 집단1과 집단2에서 나타난 오류

유형	문항	집단1						집단2					
		계산 오류 (1)	연산 오류 (2)	관련없는 정보 오류 (3)	시도하지 않은 오류(6)		기타(6)	계산 오류 (1)	연산 오류 (2)	관련없는 정보 오류 (3)	시도하지 않은 오류(6)		기타(6)
					풀이없고 답도 틀림 (5.1)	풀이없고 답은 맞음 (5.2)	알아볼 수 없는 풀이 (6.1)				풀이없고 답도 틀림 (5.1)	풀이없고 답은 맞음 (5.2)	알아볼 수 없는 풀이 (6.1)
(가)	3	1	2	6	2	1	3	0	1	2	5	0	2
	6	2	2	5	3	1	1	0	2	2	3	0	1
	8	5	0	4	3	1	1	4	0	3	3	0	0
소계		8	4	15	8	3	5	4	3	7	11	0	3
(%)		(18.6)	(9.3)	(34.9)	11(25.6)		(11.6)	(14.3)	(10.7)	(25.0)	11(39.3)		(10.7)
(나)	2	1	1	5	1	1	2	0	1	2	2	0	1
	7	0	1	5	2	2	2	0	1	4	3	0	2
	9	1	0	5	8	0	3	1	1	3	1	0	2
소계		2	2	15	11	3	7	1	3	9	6	0	5
(%)		(5)	(5)	(37.5)	14(35.0)		(17.5)	(4.2)	(12.5)	(37.5)	6(25,0)		(20.8)
(다)	1	3	9	1	3	0	4	0	2	3	1	0	1
	4	1	2	2	2	0	0	1	1	0	1	0	0
	5	4	1	5	5	0	1	3	0	5	2	0	1
소계		8	12	8	10	0	5	4	3	8	4	0	2
(%)		(18.6)	(27.9)	(18.6)	10(23.3)		(11.6)	(19.0)	(14.3)	(38.1)	4(19.0)		(9.5)
계		18	18	38	29	6	17	9	9	24	21	0	10
(%)		(14.3)	(14.3)	(30.2)	35(27.8)		(13.5)	(12.3)	(12.3)	(32.9)	21(28.8)		(13.7)

우가 3:6 = 7:?와 같은 비례식을 세워 푸는 시도를 하는 데 비해 <표 12>의 집단1에서 나타난 예(#3)와 같이 3과6, 4와7, 5와8, 6과9, 7과10의 관계로 3에서 7과의 관계를 6에서 10과의 관계로 하나씩 수를 더해가는 과정으로 푸는 오류를 나타내기도 하였다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 아동에게 제시되는 비례 관련 문제에서 영상적 표상이 제시되는 경우와 그렇지 않는 경우 각각 아동의 비례적 사고가 어떻게 나타나는지 살펴보고자 하였으며 이를 좀 더 구체적으로 알아보기 위해 학생들이 문제해결 과정에서 그들의 문제해결 전력은 어떠한지, 문제해결과정에서 어떠한 오류가 나타났는지 살펴보았다. 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 초등학교 6학년생에게 주어진 비례 관련 문제에서 연구대상 두 집단 모두 어려워한 문항으로는 학급 내 학생 문항(#1), 그 반대의 경우로는 단순하게 비례식을 세워 풀 수 있는 과일가게 문항(#4)인 것으로 나타났다. 또한 본 연구에서 사용된 문항 9개의 구성을 (가), (나), (다)의 유형으로 구분하여 각 집단의 점수를 비교해 본 결과, 두 집단 모두에게 동일하게 제시되었던 (가) 유형 및 (나) 유형의 6개 문항 모두에서 두 집단간 차이가 나타나지 않았으며 반면, (다) 유형의 경우, 두 집단간 두 문항에서 유의미한 차이가 나타났다. 이는 비례적 사고를 요하는 문제 상황에서 텍스트로만 문제가 제시되는 경우보다 영상적 표상이 주어질 때 문제해결에 도움을 주었다고 보여 진다.

둘째, 학생들이 나타낸 문제해결 전략 및 오류 유형 분석 결과는 다음과 같다. Lenchner(1983)의 문제해결 전략 유형을 이용한 분석 결과, 학생들이 사용한 문제해결전략으로는 식 세우기, 규칙성 찾기, 추측하고 점검하기, 그림이나 도표로 그리기 등의 순으로 나타났다. 두 집단 간 주어진 비례식 사고 관련 문항에 대해 문제해결 전략 사용에 있어서 유사한 전략을 사용한 것으로 나타났다. 이는 비례식을 세워 푸는 방법이 학생들에게 가장 익숙한 전략으로 보여 진다. 또한 Babbit(1990)의 오류 유형을 기초로 한 오류 분석 결과, 많이 나타난 오류는 관련 없는 정보 오류 및 시도하지 않은 오류로 나타났다. 여기서 관련 없는 오류로 나타난 오류 중에는 Misailidou & Williams(2003) 및 Miller & Fey(2000)의 선행연구에서 나타났던 '더하는(additive) 오류'와 같은 경우도 나타났다. 이는 본 연구에서도 주어진 문제 상황에 적절한 비례식을 세우기보다는 비의 관계에 있

<표 12> 나타난 오류 유형 중 대표 예

오류 유형	내용	집단1	집단2
#1	계산 오류	<풀이과정> 3:6 = 7:18 … 42 <정답> 12도	<풀이과정> [illegible] 10 + 24 + 11 = 45 <정답> 45개
#2	연산 오류	<풀이과정> 8÷1 = 0.125 … <정답> 0.75컵	<풀이과정> 8÷1×6 = 0.75컵 <정답>
#3	관련 없는 정보 오류	<풀이과정> 3=6, 4=7, 5=8, 6=9, 7=10 8=11 … <정답> 10도	<풀이과정> 7-3=4 6+4=10 <정답> 10도

는 두 수에 똑같은 수를 더함으로써 오류를 범하는 비슷한 경우가 나타났다. 이는 본 연구 참여 학생들이 'a:b = c:d'와 같은 비례식에 숫자를 대입하는 데에는 익숙하지만, 정작 비, 비례, 그리고 비례식의 개념을 올바로 이해하지 못함으로써 비례적 사고를 요하는 적절한 식을 세우지 못한 결과로 보여 진다.

문제해결 과정에서 문제에서 제공하고 있는 정보는 문제해결에 매우 중요한 역할을 한다. 더욱이 문제에 포함된 영상적 표상(iconic 혹은 pictorial representation)의 정보는 특히 문제해결에 결정적인 중요한 역할을 하기도 한다.(Lamon, 1994; Middleton & van den Heuvel-Panhuizen, 1995). 특히 수학에서 다루어지는 용어, 개념, 공식은 초보 수준에서부터 그림 등으로 시작한 표현 방법은 점점 세련된 기호적 언어로의 표현으로 점차 상징적인 수준으로 발전하게 된다. 이는 구체적인 수준에서 추상적인 수준으로 도약하는 초등학생에게 있어서 수준 도약의 도움을 줄 수 있는 영상적 표상은 매우 의미 있는 정보로 보여 진다. 이에 초등학교 수학 교실에서 다루어지는 수많은 문제들을 풀기 위하여 학생들에게 문자와 그림 등의 정보가 좀더 의미 있게 사용되어 그들의 사고 수준을 확대하고 추상화되어 형식적 수학화를 돕기를 기대하며 비례적 사고 이외의 다양한 수학적 사고 측면에서의 후속연구를 기대해 본다.

참 고 문 헌

강문봉 · 김수미 · 송상헌 · 박교식 · 박영배 · 유현주 등 (2001). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.

구미애 (1998). 초등 수학 교과의 혼합 연산을 적용하는 문제 만들기에서 나타나는 오류 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

국미경 · 곽행숙 (1999). 문장제 수학문제 해결력 향상을 위한 표상학습전략의 효과. 정서.행동장애연구(구.정서·학습장애 연구), **15(1)**, pp.77-92.

권오남 · 김진숙 · 이경아 (1997). 초등학교 6학년 학생들의 분수와 소수연산에 나타나는 오류 유형 분석. 초등수학교육, 1, 45-58.

김부미 (2005). 수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.

김수진 (2001). 고등학생의 수열에 관한 오류 유형 연구. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

김종태 (1975). 산수학습에 따른 계산능력향상을 위한 오류의 교정지도. 동아대학교 교육대학원 석사학위논문.

김중환 (2003). 고등학생의 조합수학에 대한 오류 분석에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김차숙 (2003). 중학교 1학년 학생들의 일차방정식에 대한 오류분석과 교정에 관한 연구. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김추일 (1985). 산수과 기초계산의 오류유형에 관한 조사연구: 곱셈과 나눗셈을 중심으로. 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.

서화자 · 권명옥 · 김춘미 (2004). 표상학습전략 훈련이 수학학습부진아의 문장제 문제해결력 향상에 미치는 효과. 정서.행동장애연구(구.정서·학습장애 연구), **20(4)**, pp.353-376.

송순희 · 오정현 (1997). 중학교 함수영역에서 발생하는 수학적 오류에 대한 연구. 수학교육, **36(1)**, pp.11-22.

이경아 (1996). 유리수 계산에서 나타나는 오류의 현상적 분석 : 초등학교 6학년을 중심으로. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

이대현 · 서관석 (2003). 초등수학 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석. 초등수학교육, **7(1)**, pp.31-41.

이양미 · 전평국 (2005). 초등학교 3학년 학생의 수학적 문제 해결에서의 표상과 표상의 정교화 과정 분석. 수학교육, **44(4)**, pp.627-651.

이종문 (1983). 국민학교 산수학습 계산과정의 오류분석에 근거한 치료프로그램 개발에 관한 연구. 계명대학교 교육대학원 석사학위논문.

이종영 · 장영은 (2003). 도형과 관련된 문제해결과정에서 초등학생의 오류 유형과 원인 분석 연구. 과학교육연구 논문집, **25**, pp.47-80.

이종욱 (2006). 예비초등교사의 사다리꼴 넓이 표상에 대한 교수학적 분석. 수학교육, **45(2)**, pp.177-189.

정완호 (1998). 비례 논리 형성에 미치는 학습자 요인 및 비례 논리 신장을 위한 프로그램 효과 분석. 한국과학교육학회지, **18(4)**, pp.503-516.

정완호 · 권용주 · 김영신 (1998). 초등학교 학생들의 비례 논리 전략의 발달에 관한 연구. 한국초등과학교육학

회지, **17(2)**, pp.23-31.

조병윤 (1992). 분수 계산 오류의 효과적인 교정지도 방안. 한국교원대학교 석사 학위논문.

최창우 (2004). 초등수학 학습에 있어서 표상에 관한 고찰. 초등수학교육, **8(1)**, pp.23-32.

Babbit, B.C. (1990). *Error pattern in problem Solving* (ED 338-500)

Bruner, J.S. (1966). *Toward a theory of instruction.* New York: Norton.

Buswell, G.T. & Judd, C.H. (1925). *Summary of educational investigations relating to arithmetic* (Supplementary Educational Monograph No. 27). Chicago: University of Chicago.

Cox, L.S. (1975). Diagnosing and remediating systemic errors in addition and subtraction. *Arithmetic Teacher*, **22(2)**, pp.151-157.

Dwyer, N.K.; Causey-Lee, B.J. & Irby, N.M. (2003). Conceptualizing ratios with look-alike polygons. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **8(8)**, pp.426-431.

Irwin, K.C. & Irwin, R.J. (2005). Assessing Development in numeracy of students from different Socio-economic areas: A Rasch analysis of three fundamental tasks. *Educational Studies in Mathematics*, **58(3)**, 283-298.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel, & J. Confrel (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany: State University of New York Press.

Lenchner, G. (1983). *Creative Problem Solving in School Mathematics*. Boston MA: Hougton Miffilin Co.

Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities: Considerations for identification, diagnosis and remediation. In R. Lesh, D. Meierkiewicz, & M. G. Kantowski (Eds.), *Applied mathematical problem solving*. Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Lo, J. & Watanabe, T. (1997). Developing ration and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*, **28**, pp.216-236.

Malone, J.A.; Douglas, G.A.; Kissane, B.V. & Mortlock, R.S. (1980). Measuring problem-solving ability. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), Problem Solving in School Mathematics pp.204-215, NCTM.

Middleton, J. & van den Heuvel-Panhuizen, M. (1995). The ratio table. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **1(4)**, pp.282-288.

Miller, J.L. & Fey, J.T. (2000). Proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **5(5)**, pp.310-313.

Misailidou, C. & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, **22**, pp.335-368.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston,* VA: The Author.

Petty, W.G. & Drum, R.L. (2001). Miniature toys introduce ratio and proportion with a real-world connection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **7(1)**, pp.50-54.

Piaget J. & Inhelder, B. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. London: Routledge & Kegan Paul.

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Garden City: Doubleday.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **10(3)**, pp.163-172.

Schneider, J. & Saunders, K.W. (1980). Pictorial Languages in Problem Solving. In S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), Problem Solving in School Mathematics pp.61-69, NCTM.

Sharp, J. M. & Adams, B. (2003). Using a pattern table to solve contextualized proportion problems.

Mathematics Teaching in the Middle School, **8(8)**, pp.432-439.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade students. *Educational Studies in Mathematics*, **43**, pp.271-292.

An Analysis of Children's Proportional Reasoning in Proportional Problems with Iconic Representations

Kim, Min Kyeong

Ewha Womans University

E-mail: mkkim@ewha.ac.kr

The purpose of the study is to analyze children's proportional reasoning and problem solving in proportional problems with/without iconic representations. Proportional problems include 3 tasks such as (a) without any picture, (b) with simple picture, and (c) with/without iconic representation. As a result, children didn't show any significant differences in two tasks such as (a) and (b). However, children showed better proportional reasoning with iconic representation. In addition, 'build-up expression' strategy was used mostly in solving problems and 'additive strategy' was shown as an error which students didn't make an appropriate proportional relation expression and they made a wrong additive strategy.

* ZDM Classification : F83

* 2000 Mathematics Classification : 97C30

* Key Word : proportional reasoning, problem solving, iconic representation