

# 드롭퍼 위치를 고려한 고속전철 전력선과 급전기의 접촉 분리 해석

## Analysis of Contact and Separation between the Catenary and the Pantograph of a High-speed Electrical Train Considering the Dropper Positions

이 기 수†

Kisu Lee

(2007년 1월 22일 접수 ; 2007년 4월 19일 심사완료)

Key Words : Contact(접촉), Catenary(전력선), Dropper(드롭퍼), Pantograph(급전기), High-speed Electrical Train(고속전철), Numerical Analysis(수치해석), Multibody Dynamics(다물체 동역학)

### ABSTRACT

The catenary of a high-speed electrical train is modeled by the finite elements with the upper suspension wire, lower contact wire, and droppers, and the dynamic contact between the catenary and the pantograph is numerically analyzed by solving the whole equations of motion of the pantograph and the catenary system subjected to the contact condition. For the stability of the numerical solution, with the cubic spline interpolation of the catenary displacement, the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint are imposed on the contact point. Through the various numerical examples, it is shown that the dropper positions as well as the static deflection are crucial to determine the contact and separation of the pantograph of a high-speed train.

### 1. 서 론

고속전철은 300 km/h 이상의 고속으로 주행할 경우에도 차량의 급전기(pantograph)와 차량 지붕 위의 전력선에서 접촉이 계속 유지되어야 한다. 그런데 고속 주행 시 급전기와 전력선 사이의 접촉은 전력선의 인장력과 밀도 등은 물론 전력선을 지지하는 방법에 의하여 큰 영향을 받는다. 물론 전력선의 인장력을 증가시키거나 전력선을 지지하는 수직 기둥 사이의 간격을 줄이면 고속 주행 시에도 접촉을 유지할 수 있지만 설치비용이 증가하게 된다. 고속 주행 시에도 접촉이 유지되는 경제적인 시스템을 위하여 전력선은 일반적으로 수직 기둥에 의하여 지지되

는 상층의 지지선(suspension wire), 차량 급전기와 접촉하는 하층의 접촉선(contact wire), 하층의 접촉선을 상층의 지지선에 연결하는 드롭퍼(dropper)로 구성되어 있다. 즉 상층 지지선은 지상의 수직 기둥에 의하여 수십 미터 간격으로 지지되고, 차량 급전기와 접촉하는 하층 접촉선은 상층 지지선에서 드롭퍼에 의하여 매달려 있게 되는 경우가 일반적이다. 그러나 이 경우에도 차량이 고속 주행하는 경우에는 급전기 및 전력선에 진동이 불가피하게 발생하게 되고 심한 경우 급전기와 전력선 사이의 접촉이 끊어질 수 있다. 그런데 전력선의 상층 지지선과 하층 접촉선 사이의 드롭퍼 설치 및 그 위치 변경은 경제적 부담과 거의 관계가 없으므로 적당한 드롭퍼 설치 위치에 의하여 급전기와 전력선 사이의 접촉이 고속 주행 시에도 보장된다면 대단히 큰 경제적 의미를 가지게 된다. 물론 이를 위하여는 상하 2층 케

† 교신저자 ; 정희원, 전북대학교 기계공학과, 공업기술연구원  
E-mail : kisulee@chonbuk.ac.kr  
Tel : (063) 270-2326, Fax : (063) 270-2315

이불 및 그 사이의 드롭퍼로 구성된 전력선을 고체 역학 및 동역학적으로 정확히 모델링하고 또한 급전기와의 접촉조건을 정확히 풀 수 있는 수학적 방법이 제시되어야 한다. 그러나 국내외에서 발표된 기존 논문의 경우 드롭퍼가 제대로 포함되지 못한 경우가 상당히 많다. 단 최근 일부 논문에서 드롭퍼가 포함된 전력선을 모델링하여 전력선과 급전기 사이의 접촉력을 계산하였고 그 결과를 실제 실험치와 비교하는 등 성과를 이룬 것은 대단히 고무적인 현상이다. 예로써 Seo 등<sup>(1)</sup>은 전력선과 급전기 사이에 임시 강체 및 스프링-댐퍼가 존재한다고 가정하여 접촉력을 계산하였으며 그 계산 결과는 실험치와 잘 일치하는 좋은 결과를 얻었다. 그러나 실제 현상의 경우 전력선은 접촉점에서도 탄성변형으로 인하여 심하게 휘어지고 접력선은 급전기와 직접 접촉하므로 그 사이에 스프링과 댐퍼는 존재하지 않는다. 따라서 이 경우 접촉력 계산치는 가정된 스프링과 댐퍼 값에 의하여 크게 좌우된다(수치해석에서 잘 알려진 바와 같이 스프링 상수가 커지면 접촉조건은 비교적 잘 만족되나 수치 불안정이 발생하며, 스프링이 약하면 수치적으로 안정되나 침투 현상이 발생하며, 계산된 접촉력은 스프링-댐퍼 특성에 크게 좌우될 수 있음). 결국 어떤 설계조건 및 속도에서 어떤 스프링 및 댐퍼에 의하여 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻은 경우에도 속도 및 설계요소가 달라지면 동일한 스프링 및 댐퍼 파라미터에 의하여 신뢰성 있는 결과를 얻을 수 있다고 말하기 어려우며 따라서 추가적인 연구가 요망된다.

일반적으로 전력선은 일정한 크기의 인장력이 작용하는 케이블 또는 굵힘 저항을 고려한 케이블과 보의 합성체로 해석될 수 있으며 이를 이용하면 유한요소법에 의한 운동방정식은 쉽게 얻어진다. 그런데 이러한 전력선 운동방정식 및 차량 급전기 운동방정식은 그 사이에 접촉조건이 없다면 각각의 독립된 운동방정식은 수치적분에 의하여 쉽게 풀리지만, 접촉조건에 의하여 연결되는 경우 전력선 운동방정식 및 차량 급전기 운동방정식을 동시에 해석하는 것은 대단히 어렵다. 특히 이 경우 접촉조건으로 인하여 운동방정식 수치 적분의 안정성이 결정적으로 중요한 문제가 된다. 동적인 접촉 문제는 유한요소법 및 다물체 동역학에서 중요한 분야의 하나로서 전통적인 벌칙 법(penalty method), Lagrange multiplier

method 등을 사용한 많은 논문이 오래 전부터 발표되었지만<sup>(2,3)</sup>, 케이블과 접촉하며 고속 주행하는 물체의 동적인 접촉 현상을 완벽하게 해석한 예는 거의 없다. 예로써 급전기와 전력선 사이의 접촉조건을 위하여 Collina와 Bruni<sup>(4)</sup>, Harewell 등<sup>(5)</sup> 처럼 벌칙법(penalty method)을 사용한 경우 그 해는 참고문헌(4)에서 예시된 것처럼 사용된 벌칙 파라미터(penalty parameter)의 값에 좌우 되므로 (즉 인위적으로 접촉점에 부과된 스프링과 댐퍼가 동역학 해에 결정적 영향을 줌) 참고문헌(4,5)처럼 특정 벌칙 파라미터 값을 가정하여 계산된 결과는 신뢰성에 문제를 가진다. 즉 높은 값의 벌칙 파라미터에 의해서는 수치해석의 안정성이 상실되고 낮은 값의 벌칙 파라미터에 의해서는 일반적으로 해의 정확도가 상실되며, 특정 모델의 경우 특정 벌칙 파라미터에 의해서 비교적 좋은 결과가 나왔다 하더라도 다른 모델 적용으로 일반화 시킬 수 없다는 것은 잘 알려진 사실이다. 또 Arnold와 Siemon<sup>(6)</sup>는 Lagrange multiplier method를 사용하여 케이블과 급전기 사이의 접촉조건을 가한 후 일반적인 미분 대수 방정식(DAEs) 해법을 사용하여 운동방정식을 시간 적분하였다. 그러나 이 경우 접촉점이 케이블 위에서 고속으로 미끄러지고 있다는 조건이 방정식에서 고려되지 않았으므로 해의 신뢰성 및 안정성이 의문시 되며, 실제로 대단히 단순한 모델에서 질량이 비교적 저속으로 이동하는 경우의 벤치마크 예제만 풀려 있으며, 드롭퍼를 고려한 복잡한 시스템에서 고속 주행하는 문제에의 적용 가능성은 불분명하다. 위와 같이 유한요소법 또는 유한차분법에 의하여 유도된 전력선 운동방정식을 사용하면 시간적분 시 수치해석상의 문제점이 야기되므로, 고속전철 전력선과 급전기의 동적 거동을 상당히 단순화된 모델을 사용하여 해석한 경우가 많지만, 이 경우에도 일반적으로 접촉조건을 엄격히 적용하지 못하였다. 예로써 Wu<sup>(7)</sup>는 전력선에 작용하는 일정한 크기의 힘이 일정한 속도로 이동하는 경우의 전력선 운동방정식을 풀어서 힘과 변위 사이의 관계식에서 동역학적 스프링 상수를 유도하였으며, 여기에서 유도된 동적 스프링 상수가 고속 주행하는 급전기와 접촉 시에도 유효하다고 가정하여 급전기의 동역학적 운동방정식을 풀었다. 그러나 전력선과 급전기 사이의 접촉력은 2물체의 운동방정식을 접촉조건을 부과하여 동시에 풀어야 결정

되는 것이며, 동적 스프링 상수도 해 이전에는 결정될 수 없다. 더구나 드롭퍼는 Wu<sup>(7)</sup> 등 많은 사람이 사용한 단순 전력선 모델에서는 명시적으로 포함되지도 않았으므로 이러한 방법으로 드롭퍼 영향을 분석하기는 불가능하다.

급전기 및 전력선의 운동방정식은 미분 방정식인데 그 사이의 접촉조건은 대수 부등식이다. 이 경우 일반적인 상미분 방정식 적분 방법을 사용하여 운동 방정식을 수치해석적으로 적분하면 그 해에 spurious oscillation이 포함되어 커다란 오차가 발생하거나 발산해 버린다는 것은 기존 다물체 동역학 등 (예로써 참고문헌 (8, 9))에서 널리 알려진 사실이다. 저자는 고속전철 급전기와 전력선 사이의 접촉에 관한 기존 연구<sup>(10)</sup>에서 이러한 수치 불안정성을 해결하기 위하여 접촉조건에 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 수치 적분 계산의 안정성을 도모하였으며, 특히 고속전철 급전기처럼 접촉점이 고속 이동하는 경우 물체의 경우, 접촉점의 가속도 계산 시 코리올리스 (Coriolis) 가속도 및 구심 가속도가 결정적으로 큰 역할을 함을 설명하였다. 특히 기존 연구<sup>(10)</sup>의 경우 전력선을 한 줄의 케이블로 단순화 하였으나 후속

연구<sup>(11)</sup>에서는 두 줄의 케이블 및 그 사이의 드롭퍼로 구성된 전력선 모델 사용이 가능함을 입증하였다. 또한 이 논문에서는 전력선이 상하 두 줄의 케이블 및 그 사이의 드롭퍼에 의하여 구성되는 경우 드롭퍼 위치에 의하여 급전기와 전력선 사이의 접촉 현상이 완전히 달라지며, 특히 적절한 드롭퍼 위치에 위하여 고속 주행 시에도 전력선과 급전기 사이의 접촉이 유지될 수 있음을 모델 계산을 통하여 설명한다. 전력선은 유효요소법을 이용하여 string-beam 운동방정식을 사용하며, augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉 조건을 정확히 적용시킨다.

## 2. 운동방정식, 구속조건 및 수치 해

이 논문에서 사용되는 방정식 및 해법 자체는 원칙적으로 저자의 기존 연구<sup>(10)</sup>와 동일한 것이므로, 여기에서는 추가되는 사항 및 독립적인 논문으로서 필수적인 사항만을 언급한다. 이 논문에서는 전력선 해석을 위하여 Fig. 1과 같은 모델을 생각한다. 전력선은 상하 두 줄로 되어 있으며 위의 지지선 (suspension wire)은 등간격의 수직 기둥(pole)에

$$\begin{bmatrix} \frac{m_e}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta m_e L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_e}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta m_e L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{y}_{i+1} \\ \ddot{\theta}_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{T_c}{L} & 0 & -\frac{T_c}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{T_c}{L} & 0 & \frac{T_c}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{bmatrix} + \mathbf{k}_{beam} \begin{bmatrix} y_i \\ \theta_i \\ y_{i+1} \\ \theta_{i+1} \end{bmatrix} + \mathbf{f}_{damping} + \mathbf{f}_{dropper} = -\mathbf{p} \begin{bmatrix} \frac{b}{L} \\ 0 \\ \frac{a}{L} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{f}_{gravity} \quad (1)$$

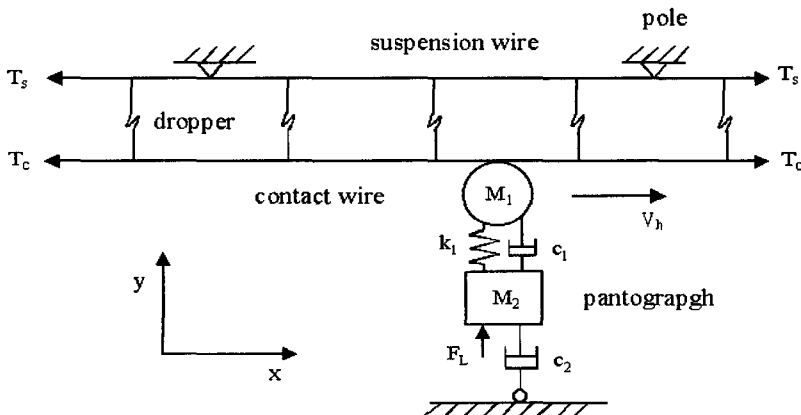


Fig. 1 A model for pantograph-catenary with droppers

의하여 지지되고 있으면 밀의 접촉선(contact wire)은 드롭퍼(dropper)에 의하여 위의 지지선에 매달려 있다.

고속전철에서 지지선은 일반적으로 굽힘 강성도는 아주 작으며 길이 방향으로 일정한 크기의 큰 인장력이 작용하는 케이블로 분류된다. 그런데 밀의 접촉선은 일반적으로 위의 지지선보다 두꺼우므로 약간의 굽힘 강성을 가질 수 있다. 따라서 유한요소법 해석을 위하여 접촉선을 string-beam 요소를 이용하여 여러 개의 유한요소로 나누며, 운동방정식을 효율적으로 시간적분하기 위한 explicit time integration을 위하여 집중 질량 행렬(lumped mass matrix)을 사용하는 경우, 양쪽의 절점이  $i$ 와  $i+1$ 인 요소가 급전기와 접촉하고 있다면 식 (1)과 같은 요소 운동방정식을 쓸 수 있다.

위에서  $y$ 와  $q$ 는 접촉선의 수직 변위와 기울기,  $m_e$ 는 요소 하나의 질량,  $b$ 는 집중 질량 행렬을 만들기 위한 파라미터 (참고문헌 (12)에 의하여 이 계산에서  $b$ 는 1/24의 값을 가짐),  $T_c$ 는 접촉선의 인장력,  $L$ 은 요소 길이,  $a$ 와  $b$ 는 급전기와 접촉점으로부터 절점  $i$ 와  $i+1$ 까지의 거리이다. 또한  $k_{beam}$ 은 오일러 보 요소의 강성도 행렬로서 참고문헌 (12) 등 기본적인 교과서에 나와 있으며,  $f_{damping}$  접촉선의 댐핑에 의한 힘,  $f_{dropper}$ 는 드롭퍼에서 전달되는 힘,  $f_{gravity}$ 는 중력에 의한 힘이다. 그리고  $p$ 는 급전기로부터의 접촉력이다. 드롭퍼는 참고문헌 (4) 등에서 설명된 바와 같이 인장 스프링 상수가 대단히 크고 압축 스프링 상수는 대단히 작은 2 절점 비선형 스프링으로 취급하여 드롭퍼로부터의 힘  $f_{dropper}$ 를 계산한다. 이와 같이 하여 급전기와 접촉하는 하단 접촉선 전체의 운동방정식을 만들 수 있다. 상단 지지선의 경우에도 동일한 유한요소 기법이 적용되지만 일반적으로 굽힘 강성도가 무시될 수준이므로 상단 지지선에서는 string 요소에 의한 운동방정식을 사용한다(즉 요소 운동방정식 (1)에서  $k_{beam}$ 은 삭제함). 이와 같이 하여 모든 유한요소의 운동 방정식을 합하면 지지선, 접촉선 및 그 사이의 드롭퍼로 구성된 전력선 전체의 운동방정식이 다음과 같은 형태로 얻어진다.

$$M_c \ddot{U}_c + C_c \dot{U}_c + K_c U_c + F_d(U_d) = p A_c + F_c \quad (2)$$

위에서  $M_c$ ,  $C_c$ ,  $K_c$ 는 각각 전력선 전체의 질량,

점성, 강성도 행렬을 나타내고  $U_c$ 는 전력선 전체의 유한요소 방정식 자유도이며,  $F_d$ 는 드롭퍼 끝 변의  $U_d$ 로부터의 힘,  $p$ 는 급전기의 접촉력,  $A_c$ 는 접촉력을 절점에 작용하는 등가 힘으로 배분하는 벡터,  $F_c$ 는 중력 등 해 이전에 이미 주어진 힘이다. 급전기의 경우 일반적인 다물체 동역학 기법을 사용하거나 또는 Fig. 1과 같이 단순화된 모델을 사용할 수 있다. 이 논문에서 사용하는 해법의 경우 어느 경우에도 해가 가능하지만 여기에서는 설명의 편의를 위하여 위의 식 (1)과 동일한 의미의 행렬 및 벡터를 사용하여 (단 하첨자  $p$ 를 이용하여 급전기 방정식임을 표시) 급전기 운동방정식이 다음과 같이 주어진다고 생각한다.

$$M_p \ddot{U}_p + C_p \dot{U}_p + K_p U_p = p A_p + F_p \quad (3)$$

위에서 접촉력  $p$ 이외의 모든 힘은 해 이전에 주어진 힘이다.

운동방정식을 수치적분 할 때에 시간을  $t$ , 시간 간격을  $\Delta t$ 라고 한다. 계산 시 급전기 접촉점에서 전력선에 수직선을 그어서 케이블 위의 접촉점 위치를 결정하며 위에서 설명하는 바와 같이 전력선은 cubic spline interpolation(참고문헌 (13) 참조)을 사용하여 각 절점 사이의 변위를 결정한다. 그러면 전력선과 급전기 사이에서의 접촉력을  $p$ , 그 사이의 침입된 수직 간격을  $s$ 라고 할 때에 접촉점에서 다음과 같은 형태의 접촉조건이 시간  $t + \Delta t$ 에서 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} p^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ s^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ p^{t+\Delta t} &= 0 \text{ if } s^{t+\Delta t} < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

위의 접촉조건은 접촉점에서 변형된 전력선에 수직인 방향의 힘 및 거리를 이용하여 적용된 것이다. 위의 접촉조건은 물론 이후의 모든 접촉조건에서 미소변형 가정을 적용하여 접촉점에서 변형된 전력선의 기울기가  $\theta$ 인 경우  $\cos\theta$ 는 1로 간주한다(즉  $\cos\theta$ 가 곱해지는 경우  $\cos\theta$ 를 생략한다). 위의 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 augmented Lagrange multiplier method (참고문헌 (14) 참조)를 사용하여 풀기 위하여 다음과 같은 접촉 오차를 정의한다.

$$e^{t+\Delta t} = s^{t+\Delta t} \text{ if } p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} > 0$$

$$= 0 \text{ otherwise} \quad (5)$$

그러면 접촉 조건은 다음 식으로 변환된다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } e^{t+\Delta t} = 0 \quad (6)$$

그런데 운동방정식은 미분방정식이지만 접촉조건은 대수 부등식으로 이루어지므로 접촉점에서 접촉점의 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 부과하여야 한다. 고속전철의 주행 속도를  $V$ , 전력 전력선이 급전기와 접촉점에서 주행 방향과 이루는 기울기를  $q$ 라고 하며 (즉 전력선의 수직 방향 변위로 인하여 접촉점에서 전력선이 지상과 각도  $q$ 를 이루고 있다고 하며), 전력선과 접촉하는 점에서 급전기의 수직 방향 속도를  $v_p$ 라고 하면 접촉점에서 전력선과 급전기 사이의 상대 속도 (변형된 전력선 수직방향 상대 속도)는 다음과 같다.

$$\dot{s} = -\dot{y} - V \sin \theta + v_p \quad (7)$$

위의 속도 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 속도 접촉 오차를 정의한다.

$$\mu^{t+\Delta t} = \dot{s}^{t+\Delta t} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } \dot{s}^{t+\Delta t} > 0)$$

$$\text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0)$$

$$= 0 \text{ otherwise} \quad (8)$$

그러면 속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } \mu^{t+\Delta t} = 0 \quad (9)$$

또한 접촉점에서 전력선의 회전 각속도를  $w$ , 접촉점에서 전력선의 곡률 반경을  $r$ , 전력선과 접촉하는 점에서 급전기의 수직 방향 가속도를  $a_p$ 라고 하면 전력선과 급전기 사이의 상대 가속도는 다음과 같다.

$$\ddot{s} = -\ddot{y} - 2\omega V \cos \theta + \frac{(V \cos \theta)^2}{r} + a_p \quad (10)$$

이 논문에서 전력선 접촉점의 변위  $y$ , 속도  $\dot{y}$ , 가속도  $\ddot{y}$ 는 절점의 해당 변위, 속도, 가속도를 이용하여 cubic spline interpolation에 의하여 계산하고,

각속도  $w$ 는  $d\dot{y}/dx$ , 반경  $r$ 은  $\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2} / (d^2y/dx^2)$ 에 의하여 계산한다. 위에서 오른쪽 2번째 항은 코리올리스 가속도이고 3번째 항은 구심 가속도이다. 가속도 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 가속도 접촉 오차를 정의한다.

$$v^{t+\Delta t} = \ddot{s}^{t+\Delta t} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } \ddot{s}^{t+\Delta t} > 0)$$

$$\text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0)$$

$$= 0 \text{ otherwise} \quad (11)$$

그러면 가속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } v^{t+\Delta t} = 0 \quad (12)$$

전력선의 운동방정식과 급전기 운동방정식의 해는 전력선과 급전기 사이의 접촉점에서 모든 접촉 조건을 만족시켜야 한다. 즉 전력선과 급전기가 접촉하는 경우 위에서 정의한 상대 변위, 상대 속도, 상대 가속도는 모두 0이 되어야 한다. 이를 위하여 저자의 기존 논문<sup>(15~19)</sup>에서는 이상의 3가지 접촉 구속조건이 부과된 운동방정식의 해를 구하기 위하여 변위 오차, 속도 오차, 가속도 오차를 사용하여 이들을 각각 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 0으로 수렴시키는 방법을 사용하였다. 먼저 변위 접촉 조건(4)을 운동방정식에 적용시키기 위하여, 이 논문에서는 참고문헌(15~19)에서 저자가 제시한 반복계산법을 활용한다. 이 논문의 반복계산법은 augmented Lagrange multiplier method와 유사한 방법으로서, 각 반복 단계는 2 단계로 구성된다. 첫 단계는 앞 반복 단계의 해에서 구해진 접촉 오차를 이용하여 접촉력을 계산하는 것이며, 두 번째 단계에서는 주어진 접촉력을 이용하여 전체 운동 방정식의 해를 구하고 접촉 오차를 계산하는 것이다. 그러면 시간  $t + \Delta t$ 에서의 접촉 오차  $e^{t+\Delta t}$ 는 참고문헌(15~19)와 동일한 방법에 의하여 다음의 반복계산법에 의하여 0으로 감소함이 증명된다.

$$p^{t+\Delta t, m} = \min(p^{t+\Delta t, m-1} - \alpha e^{t+\Delta t, m-1}, 0) \quad (13)$$

위에서  $m$ 은 반복 횟수를 나타내고,  $\alpha$ 는 다음에서 설명되는 스칼라 양이며,  $e^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력

$p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용한 경우에 운동 방정식의 해에 의하여 계산되는  $e^{t+\Delta t}$ 를 나타낸다. 속도 접촉조건 (9) 및 가속도 접촉조건 (12) 역시 동일한 반복 계산법을 사용하여 운동방정식과 연립시켜 해를 구한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 기본적인 계산 과정을 다음에 요약한다:

Step 1. 처음에  $m=0$ 으로 하고, 시간  $t$ 에서의 해를  $p^{t+\Delta t, 0}$ 으로 하여 step 4로 간다.

Step 2.  $m$ 을  $m+1$ 로 하고,  $\alpha = 1/(\delta x / \delta p)^{t+\Delta t}$ 로 한다.

Step 3. 반복계산법 (13)에 의하여  $p^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다.

Step 4. 급전기 접촉점에서 전력선에 수직선을 그어서 전력선 위의 접촉점 위치를 결정한다. 접촉력  $p^{t+\Delta t, m}$ 를 급전기와 전력선의 양쪽 접촉점에 가하고, 전력선 운동방정식 (2)의 해 및 급전기 운동방정식 (3)의 해를 상미분 방정식 수치 적분에 의하여 구한다(예로써 Runge Kutta method 등 사용). 이렇게 구한 전력선 및 급전기 운동방정식 해로부터 식 (5)에 의하여 접촉 오차  $e^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다. 만약  $|e^{t+\Delta t, m}|$ 이 허용 오차보다 작으면 시간  $t+\Delta t$ 에서의 변위는 여기에서 결정하고 step 5로 간다. 그 외의 경우 {만약  $|e^{t+\Delta t, m}| < |e^{t+\Delta t, m-1}|$  또는  $m=0$ 이면 to step 2로 가고}, 그 외의 경우  $\alpha = \alpha/2$ 로 하여 step 3로 다시 가서  $m$ 번째 반복 계산을 다시 수행한다.

Step 5. 속도 접촉 조건 (9)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉 오차 대신 속도 접촉 오차<sup>(8)</sup>을 사용하여, 위의 steps 1~4에 의하여 반복 계산을 수행한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 속도는 여기에서 결정된다.

Step 6. 가속도 접촉 조건 (12)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉 오차 대신 가속도 접촉 오차 (11)을 사용하여, 위의 steps 1~3에 의하여 반복 계산을 수행한다. 가속도 오차 계산 시 필요한 전력선 접촉점의 각속도 및 곡률 반경은 식 (10) 밑에서 설명한 방법에 의한다. 시간  $t+\Delta t$ 에서의 가속도 및 접촉력은 여기에서 결정된다. 계속 다음 시간의 해석이 필요한 경우 시간을  $\Delta t$  만큼 증가시켜 step 1로 가서 다음 시간의 계산을 시작한다.

### 3. 예제 계산

여기에서는 Fig. 1과 같이 상하 두 줄의 전력선 및 드롭퍼가 장착된 모델에서 차량이 고속 주행하는 경우를 생각한다. 이 계산 모델인 Fig. 1에서 전력선 전체 길이는 800 m이고 길이 40 m인 구간 마다 수직 기둥에 의하여 지지되어 있다. 위의 지지선에서 인장력은 30 kN, 선밀도는 0.6 kg/m, 댐핑 계수는 0.03 Ns/m<sup>2</sup>( $y$ 에 비례하는 댐핑 고려)이다. 밑의 접촉선에서 인장력은 30 kN, 굽힘 강성도 EI는 150 Nm<sup>2</sup>, 선밀도는 1.0 kg/m, 댐핑 계수는 0.03 Ns/m<sup>2</sup>이다. 또한 드롭퍼는 인장 스프링 상수가 400 kN/m, 압축 스프링 상수가 0.35 kN/m, 질량은 0.15 kg이다. 전력선은 위의 지지선 양쪽 및 밑의 접촉선 오른쪽 끝은 수직 기둥에 고정되어 있는데, 초기 조건의 편의상 접촉선 왼쪽 끝과 수직 기둥 사이에는 10 kN/m 강성도를 가지는 스프링이 있다고 생각한다. 집전기 모델의 질량  $M_1=9$  kg,  $M_2=17$  kg, 스프링 및 댐핑 상수는  $K_1=7$  kN/m,  $C_1=30$  kNs/m,  $C_2=130$  kNs/m이며, 100 N 크기의 힘  $F_L$ 이 정역학적 평형 상태에서 작용한다(따라서 급전기에 작용하는 중력의 영향은 추가로 고려되지 않음). 위의 지지선은 800개의 string요소, 밑의 지지선은 800개의 string-beam 요소, 드롭퍼는 비선형 스프링 요소로 모델링하여 유한요소법에 의한 운동방정식을 사용하며, 시간적분은  $\Delta t=0.5$  msec인 4차 Runge Kutta method를 사용한다. 또한 초기 조건으로서 중력에 의한 전력선의 정역학적 처짐을 고려하였으며, 전력선의 초기 속도는 0으로 하였다. 차량은 왼쪽 전력선 끝을 접촉하며 오른쪽으로 출발하며 원칙적으로 360 km/h 속도로 주행하는 것으로 하였다. 이 논문의 목적이 드롭퍼 위치에 따른 전력선과 급전기의 접촉 해석이므로 각 수직 기둥 사이의 드롭퍼 개수 및 위치를 변경시켜가며 결과를 점검하기로 한다. 물론 드롭퍼 배치는 40 m 스패의 어떤 수직 기둥 사이에서나 동일하게 적용된다(즉 수직 기둥에 대한 드롭퍼 상대 위치는 40 m 간격의 모든 수직 기둥 사이에서 동일한 패턴이 주기적으로 반복된다).

먼저 Case 1로서 수직 기둥 사이의 40 m 스패에 드롭퍼가 10개 설치되어 있으며 모든 드롭퍼 사이의 간격은 4 m로 동일한 경우(이 경우 수직 기둥과 인

접 드롭퍼 사이의 간격은 2m)를 생각한다. 차량이 360 km/h로 주행하는 경우 급전기와 전력선 사이의 접촉력 변화가 Fig. 2에 표시되어 있으며 심한 진동이 포함되고 접촉이 끊어지는 경우가 발생한다. 단 이 경우에도 만약 전력선의 정역학적 처짐을 고려하지 않으면 (즉 중력에 의한 전력선의 변형을 고려하지 않으면) 접촉력은 거의 일정하며 분리되는 현상은 발생하지 않는다. 결국 중력에 의한 전력선의 초기 처짐이 고속주행 시 급전기와의 접촉에 결정적 영향을 줌을 알 수 있다.

다음으로 Case 2로서 수직 기둥 사이의 40 m 스펠

에 드롭퍼가 10개 설치되어 있으나 수직 기둥과 인접 드롭퍼 사이의 간격이 큰 경우를 생각한다. 수직 기둥으로부터 드롭퍼가 설치된 위치가 오른쪽 방향으로 각각 6 m, 9 m, 11 m, 13 m, 15 m, 20 m, 21 m, 23 m, 25 m, 28 m인 경우의 해가 Fig. 3에 표시되어 있으며 이 경우에는 360 km/h 고속 주행임에도 급전기와 전력선이 분리되지 않음을 알 수 있다.

다음 Case 3으로서 수직 기둥 사이의 40 m 스펠에 드롭퍼가 4개 설치되어 있으며, 모든 드롭퍼 사이의 간격은 10m로 동일한 경우 (이 경우 수직 기둥과 인접 드롭퍼 사이의 간격은 5m)를 생각한다. 차량이 360 km/h로 주행하는 경우 급전기와 전력선

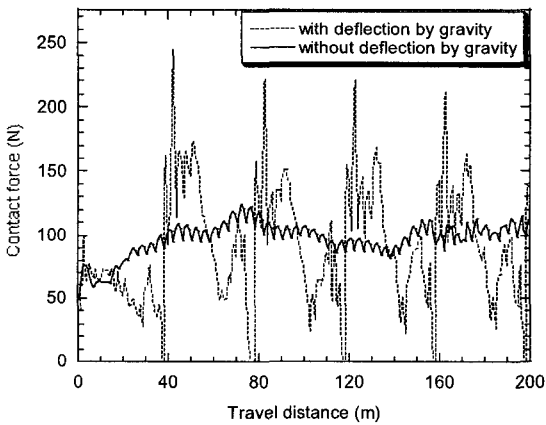


Fig. 2 Contact force variations with and without considering the deflection of the wire by gravity of case 1(10 evenly spaced droppers between the poles, 360 km/h)

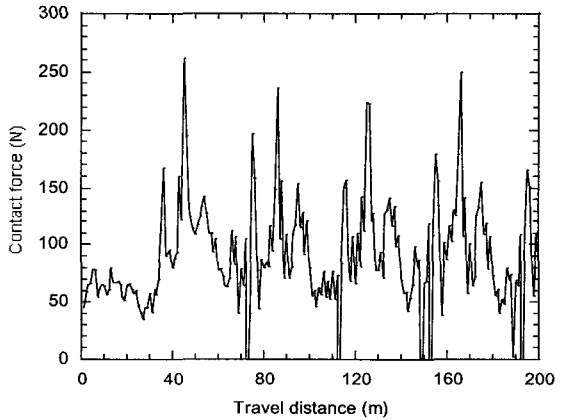


Fig. 4 Contact force variations of case 3(4 evenly spaced droppers between the poles, 360 km/h)

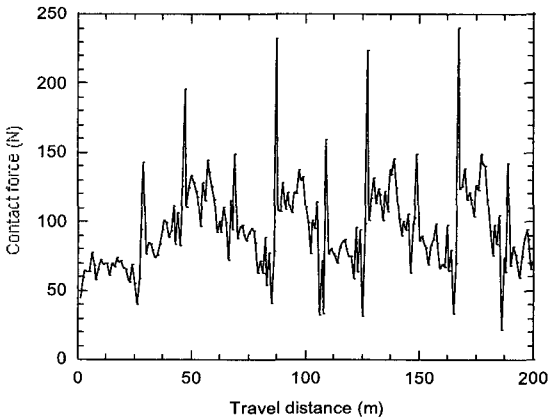


Fig. 3 Contact force variations of case 2(10 droppers between the poles with longer distance between the pole and the adjacent droppers, 360 km/h)

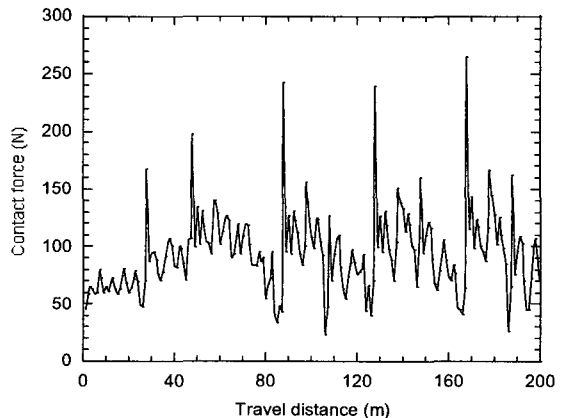


Fig. 5 Contact force variations of case 4(4 droppers between the poles with longer distance between the pole and the adjacent droppers, 360 km/h)

사이의 접촉력 변화가 Fig. 4에 표시되어 있으며 심한 진동이 포함되고 접촉이 끊어지는 경우가 발생한다.

다음 Case 4로서 수직 기둥 사이의 40 m 스펠에 드롭퍼가 4개 설치되어 있으나 수직 기둥과 인접 드롭퍼 사이의 간격이 큰 경우를 생각한다. 수직 기둥으로부터 드롭퍼가 설치된 위치가 오른쪽 방향으로 각각 7 m, 14 m, 21 m, 27 m 인 경우의 해가 Fig. 5에 표시되어 있으며 이 경우에는 360 km/h 고속 주행임에도 급전기와 전력선이 분리되지 않음을 알 수 있다.

다음 Case 5로서 수직 기둥 사이의 40 m 스펠에 드롭퍼가 4개 설치되어 있으나, 드롭퍼의 수직 기둥에 대한 상대 위치가 Case 4와 반대인 경우를 생각한다. 즉 수직 기둥으로부터 드롭퍼가 설치된 위치가 오른쪽 방향으로 각각 13 m, 19 m, 26 m, 33 m인 경우인데, 이 경우는 Case 4의 경우에 차량이 반대 방향으로 주행하는 경우에 해당된다(즉 Case 4에서 차량이 오른쪽에서 왼쪽으로 주행). 이 경우 Case 4와는 달리 Fig. 6에 표시되어 있는 바와 같이 급전기와 전력선이 분리된다. Case 4의 경우 수직 기둥과 왼쪽 드롭퍼의 거리는 13 m이고 수직 기둥과 오른쪽 드롭퍼의 거리는 7 m인데 반하여, Case 5의 경우 수직 기둥과 왼쪽 드롭퍼의 거리는 7 m이고 수직 기둥과 오른쪽 드롭퍼의 거리는 13 m인데, 이와 같이 접촉 현상이 다른 것은 주행 시 전력선의 수직 방향 관성 때문이라고 보인다.

다음으로 Case 6으로서 Case 3과 같이 수직 기둥

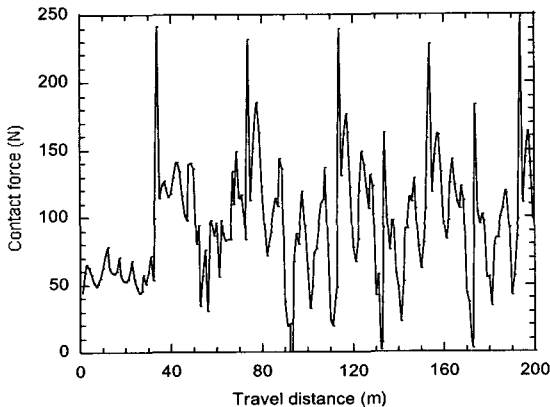


Fig. 6 Contact force variations of case 5(4 droppers between the poles with the reversed dropper positions of case 4, 360 km/h)

사이의 40 m 스펠에 드롭퍼가 등간격으로 4개 설치되어 있으며 차량이 180 km/h 로 비교적 저속 주행하는 경우를 생각한다. 이 경우의 해가 Fig. 7에 표시되어 있으며, 동일한 전력선 모델에서 주행 속도가 360 km/h인 경우의 Fig. 4와 달리 급전기와 전력선이 저속의 경우 분리되지 않음을 알 수 있다.

케이블 인장력에 의한 파동 전파 속도는  $\sqrt{T/\rho}$  ( $T$ 는 인장력,  $\rho$ 는 선밀도)이며 급전기와 접촉에 의하여 전력선에서 발생한 파동은 유한한 길이의 모델 오른쪽 끝에서 반사되어 돌아와서 해에 영향을 줄 수 있다. 그러나 위의 계산에서는 반사된 파동이 돌아오기 전까지의 시간에서만 계산하여 제시한 것이며, 따라서 2번째 기둥 통과 이후 40 m 스펠마다 비교적 유사한 모양이 반복되고 있음은 이 계산의 타당성을 간접적으로 입증한다(첫 번째 스펠의 경우 초기조건 및 경계조건에 영향을 두 번째 이후의 스펠과 다르다). 또 이 예제를 3배 이상의 유한 요소를 사용하여 다시 계산하여도 거의 동일한 결과가 나오며  $\Delta t$ 를 줄이거나 늘려서 계산해도 동일한 결과가 나오므로 이 계산의 타당성이 입증된다. 또한 augmented Lagrange multiplier method를 적용하기 위한 반복계산법에서 변위 접촉오차, 속도 접촉오차, 가속도 접촉오차의 어느 오차에 의한 계산도 동일한 결과가 나오므로 이 계산의 타당성이 입증된다. 그런데 이 논문의 운동방정식 (1)은 전력선 전력선의 절점과 절점 사이 변위를  $x$ 의 1차식으로 가정하여 얻어진 것인데, 접촉조건 적용 시에는 절점과 절점 사이의 전력선 변위를  $x$ 의 3차식으로 가

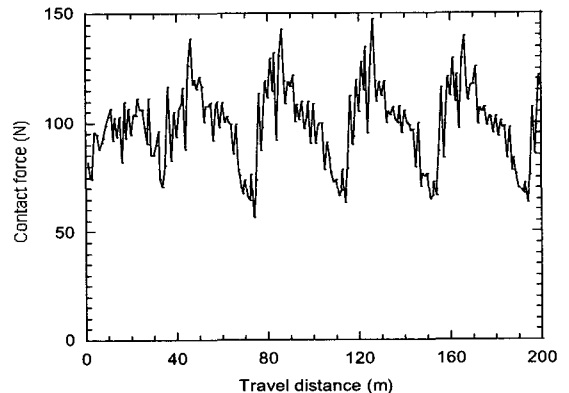


Fig. 7 Contact force variations of case 6(4 evenly spaced droppers between the poles, 180 km/h)



정하여 cubic spline interpolation을 적용하였으므로 전력선 절점과 절점 사이에서 접촉력 계산 시 불필요한 진동이 포함되는데, 이러한 진동을 제거하기 위하여 전력선의 절점과 절점 사이에서 계산된 접촉력의 평균치를 사용하였다. 앞에서 설명된 것처럼 접촉점의 코리올리스 가속도 및 구심 가속도는 계산의 안정성 및 정밀도에 결정적 역할을 하며, 이들 가속도에는 수직 변위를 2번 미분한 항이 포함되므로, 이들 가속도의 연속성을 위하여는 절점과 절점 사이의 전력선 변위를  $x$ 의 3차식인 cubic spline interpolation을 사용하여 표시하는 것이 불가피하다.

#### 4. 결 론

이 논문에서는, 고속 주행 차량 급전기의 운동방정식 및 전력선의 운동방정식을 접촉조건을 부과하여 정확히 풀 수 있는 시간적분 기법에 의하여, 드롭퍼를 포함한 전력선 구조물의 정밀한 모델링 및 접촉조건을 수반한 정밀한 계산이 가능함을 설명하였다. 접촉조건에는 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 대수 부등식이 포함된 미분방정식 수치적분의 안정성을 도모하였으며, 특히 고속 이동하는 접촉점의 가속도 계산 시 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를 고려하였다. 차량이 고속 주행하는 경우에 급전장치가 전력선과 접촉 분리가 반복되는 경우에도 이 논문의 방법에 의하여 운동방정식을 정확하고 안정적으로 풀 수 있음을 설명하였다. 이 논문에서 제시한 방법은 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉조건이 부과된 전력선-급전기 시스템 운동방정식을 시간적분을 사용하여 정확히 안정적으로 풀 수 있다는 것을 설명한 것이며, 따라서 드롭퍼를 포함한 정확한 전력선 모델의 계산이 가능하다.

고속전철 전력선의 인장력을 과도하게 증가시키는 등의 경제적 부담없이, 드롭퍼 위치만 조절하여 고속 주행 시에도 전력선과 급전기의 접촉을 유지시킬 수 있음을 설명하였다. 즉 고속전철 고속 주행 시 상하 두 줄의 전력선을 연결하는 드롭퍼 위치에 의하여 급전기와 전력선 사이의 접촉 유지 여부가 완전히 달라질 수 있음을 예제 계산을 통하여 설명하였다. 또한 전력선의 중력에 의한 정역학적 처짐 (즉

급전기와 접촉이 없는 상태에서 전력선의 처짐)이 고속 주행 시 급전기와 접촉 여부를 결정하는데 대단히 중요함을 설명하였다. 일반적으로 상부 지지선이 수직 기둥에 연결되는 부분은 그 처짐이 나머지 부분과 큰 차이가 있으므로 그 부분에는 드롭퍼를 설치하지 않아야 고속주행 시 급전기와 분리를 피할 수 있음을 예제 계산을 통하여 확인할 수 있었다. 또한 동일한 위치에 드롭퍼가 설치된 경우에도 전력선의 관성 때문에 차량의 주행 방향에 따라서 급전기와 접촉 유지 여부가 달라짐을 볼 수 있었다.

이 논문의 경우 고속 주행 차량 급전기의 운동방정식 및 전력선의 운동방정식을 접촉조건을 부과하여 정확히 풀 수 있는 수치해석 기법을 설명한 것이며 추후에 좀더 복잡한 실제의 전력선 및 급전기를 모델로 한 정확한 계산이 요망된다. 예를 들어 고속 주행 시 바람의 영향, 커브 주행 시 전력선의 마찰 및 수평 변형, 전력선이 중복 설치되는 구간, 다물체 동역학 기법에 의한 급전기의 정확한 모델링, 차체의 진동이 급전기와 전력선에 접촉에 미치는 영향 등을 이 논문의 기법을 사용하여 정밀한 모델에 의하여 해석할 수 있을 것이다. 또한 이 논문의 경우 운동방정식에서 전력선의 질량 및 탄성 효과는 실제와 거의 일치하도록 반영되어 있지만 드롭퍼를 포함한 전력선 내부의 뎀핑 현상은 실험을 통하여 좀더 정확히 운동방정식에서 수식화 할 필요가 있다고 보인다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Seo, J. W., et al., 2005, "Dynamic Analysis of a Pantograph-catenary System for High-speed Train I & II, Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 22, pp. 152~166.
- (2) Bathe, K. J. and Chaudhary, A. B., 1986, "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-dimensional Contact Problems with Friction. Comput. Struct., Vol. 24, pp. 855~873.
- (3) Taylor, T. L. and Papadopoulos, P., 1993, "On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems", Int. J. Numer. Method Engng., Vol. 36, pp. 2123~2140.
- (4) Collina, A. and Bruni, S., 2002, "Numerical

Simulation of Pantograph-overhead Equipment Interaction”, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 38, pp. 261~291.

(5) Harewell, P., Drugge, L. and Reijm, M., 2005, “Study of Critical Sections in Catenary Systems During Multiple Pantograph Operation”, *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 215, pp. 203~211.

(6) Arnold, M. and Simeon, B., 2000, “Pantograph and Catenary Dynamics: A Benchmark Problem and Its Numerical Solution”, *Applied Numerical Mathematics: Transactions of IMACS*, Vol. 34, pp. 345~362.

(7) Wu, T. X. and Brennan, M. J., 1999, “Dynamic Stiffness of a Railway Overhead Wire System and Its Effect on Pantograph-catenary System Dynamics”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 483~502.

(8) Petzold, L., 1982, “Differential Algebraic Equations Are Not ODEs”, *SIAM Journal. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 3, pp. 367~384.

(9) Amirouche, F. M., 1992, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

(10) Lee, K. S., 2006, “Dynamic Analysis of the Pantograph of a High-speed Electrical Train Considering Contact and Separation”, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 634~642.

(11) Lee, K., 2007, “Analysis of Dynamic Contact Between Overhead Wire and Pantograph of a High-speed Electric Train”, *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Rail and Rapid Transit*, accepted for publication.

(12) Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. and Witt, R. J., 2001, “*Concepts and Applications of Finite Element Analysis*”, John Wiley & Sons, New York.

(13) Burden, R. and Faires, J. D., 1993, “*Numerical Analysis*”, PWS Publishing Company, Boston.

(14) Crisfield, M. A., 1997, “*Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*”, John Wiley & Sons, Chichester.

(15) Lee, K., 1994, “A Numerical Solution for Dynamic Contact Problems Satisfying the Velocity and Acceleration Compatibilities on the Contact Surface”, *Computational Mechanics*, Vol. 15, pp. 189~200.

(16) Lee, K., 1995, “A Numerical Solution for Dynamic Interaction Between Rigid Wheel and Flexible Beam”, *Commu. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 267~279.

(17) Lee, K., 1997, “A Numerical Method for Dynamic Analysis of Vehicles Moving on Flexible Structures Having Gaps”, *Int. J. Numer. Method Engng.*, Vol. 40, pp. 511~531.

(18) Lee, K., 2001, “Analysis of Dynamic Contact between Rotating Spur Gears by Finite Element and Multi-body Dynamics Techniques”, *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 215, pp. 423~435.

(19) Lee, K., 2004, “Dynamic Contact Analysis for the Valve Train Dynamics of an Internal Combustion Engine by Finite Element Techniques”, *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part D, Journal of Automobile Engineering*, Vol. 218, pp. 353~358.