

타원접촉의 탄성유체윤활 : 제2보 - 스핀운동의 영향

박 태 조[†]

경상대학교 기계항공공학부, 공학연구원

An Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts : Part II - The Effect of Spin Motion

Tae-Jo Park[†]

School of Mechanical and Aerospace Engineering, Gyeongsang National University

Abstract – A numerical analysis of elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts with both rolling and spinning has been carried out. A finite difference method with non-uniform grid systems and the Newton-Raphson method are applied to solve the problems. The velocity vectors resulting from combined spinning and rolling/sliding motion lead to asymmetric pressure distributions and film shapes. Pressure distributions, film contours and variations of the minimum and central film thicknesses are compared with various spin-roll ratios. Reduction of the minimum film thickness under spinning is remarkable whereas the central film thickness is relatively less. The spin motion have large effect on variations of the minimum film thickness with load parameter which are small in pure rolling/sliding cases. Therefore present numerical scheme can be used in the analysis of general elliptical contact EHL problems and further studies are required.

Key words – EHL, elliptical contacts, spinning, angular contact ball bearing, numerical analysis, Newton-Raphson method.

1. 서 론

머시닝센터(Machining center)와 같은 공작기계, 섬유기계 및 원심분리기 등의 고속주축용 베어링으로 주로 사용되는 앵글러 컨택트 볼베어링(Angular contact ball bearing)에서는 내·외륜의 한쪽 턱을 상대적으로 낮게 가공하여 볼의 수를 증가시키고, 오일-에어(Oil-air) 윤활방법을 채용하여 고강성과 고속화를 동시에 달성하고 있다[1]. 이때, 축방향 하중을 지지하기 위하여 볼과 내·외륜 사이의 접촉부는 접촉각(Contact angle)이라는 경사진 각도를 갖는 특징적인 구조를 채용하고 있으며, 고속회전이 요구될수록 접촉각은 작게 설계한다. 그러나, 작은 접촉각은 반경방향하중을 증가시켜 접촉타원의 장축방향 길이와 상대곡률을 크게 하므로 이는 구름면에서 미끄럼(Sliding) 운동을 발생시킨다. 더구나,

볼의 자전축과 공전축이 서로 평행하지 않기 때문에 발생하는 자이로스코프 모멘트(Gyroscopic moment)의 작용으로 인하여 볼은 Fig. 1에 나타낸 것과 같이 구름운동과 동시에 스핀운동(Spinning)을 하게 된다.

한편, 1959년에 Dowson & Higginson[2]이 역방법(Inverse method)라는 획기적인 해석방법을 사용하여 무한장 선접촉문제의 수치해석에 성공한 이후의 지난 반세기 동안 EHL분야에 대한 집중적인 연구가 수행되었다. 특히, Hamrock & Dowson[3]은 볼베어링, 구형(Spherical) 로울러 베어링, 대부분의 기어와 캠 기구 등과 같은 타원접촉 EHL상태인 기계부품에서 최소유막의 크기를 쉽게 추정할 수 있는 이론식을 제시하여 이 분야의 실질적인 발전에 크게 기여하였다. 그 이후, Chittenden 등[4]은 참고문헌[3]의 수치해석 방법과 결과를 사용하여 윤활유가 Hertz 접촉타원에 대하여 임의 방향에서 유입되는 경우에도 적용할 수 있는 보다 일반화된 EHL 유막두께식을 발표하였다.

[†]주저자 · 책임저자 : tjpark@gnu.ac.kr

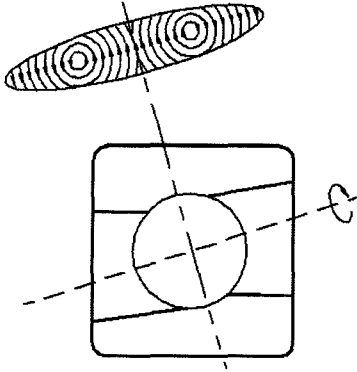


Fig. 1. Sliding lines for ball-raceway contact of an angular contact ball bearing.

하지만 지금까지의 타원접촉 EHL문제에 대한 아주 많은 연구에도 불구하고 앵글러 컨택트 볼베어링이나 최근에 개발되어 CVT용으로 사용되고 있는 토로이드형(Toroidal type) 트랙션 드라이브(Traction drive)에서와 같이 스피운동이 발생하는 경우에 대한 연구는 극소수에 불과한 실정이다[5-10]. Mostofi & Gohar[5]는 스피운동만 하는 타원체에 대한 EHL해석을 처음으로 시도하였으며, Dowson 등[6]은 이에 대한 보다 상세한 해석결과를 제시하였다. 구름운동과 스피운동을 동시에 고려한 연구중에서 Dowson 등[7]과 Zou 등[8]은 저하중인 경우에, Taniguchi 등[9]과 장시열[10]은 상대적으로 고하중인 경우에 대한 수치해석결과를 각각 제시하였다. 특히, Zou 등[8]은 스피운동과 함께 윤활유가 임의방향에서 유입되는 경우까지 포함하는 유막두께식을 제안하였지만 자신들의 해석결과와도 부분적으로 일치하지 않는 등 논문에 많은 오류가 있었다. 이와 같이 앞에서 언급한 앵글러 컨택트 볼베어링 등에서의와 같이 타원체가 스피운동을 하는 경우에는 아직 상세한 해석결과가 제시되지 않고 있기 때문에 추가적인 연구가 요구되고 있는 상태이다.

본 논문에서는 일반적인 타원접촉 EHL문제에 대한 정확한 유막두께식을 제시하기 위한 연구의 일환으로 타원체가 구름운동과 동시에 스피운동을 하는 경우의 EHL특성을 수치해석적으로 조사하고자 한다. 이를 위하여 참고문헌[11-13]에서와 동일하게 수치해석과정의 체계적이고 물리적으로 타당한 결과를 제시한다고 알려진 유한차분법과 뉴우튼-랩슨(Newton-Raphson) 방법을 적용하였으며, 해석결과와 정확성과 수렴성은 참고문헌[7]과 비교하였다.

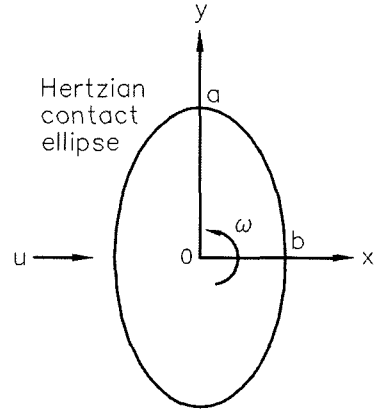


Fig. 2. Contact ellipse and coordinate system.

2. 지배방정식

Fig. 2에 나타난 것과 같이 타원체가 구름운동과 스피운동을 동시에 하는 경우, 유막에서의 발생압력을 지배하는 레이놀즈 방정식은 다음식과 같이 표현된다[7-9].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\bar{\rho} h^3 \partial p}{\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{\rho} h^3 \partial p}{\eta} \right) = 12 \left[\frac{\partial}{\partial x} \{ (u - \omega y) \bar{\rho} h \} + \frac{\partial}{\partial y} (\omega x \bar{\rho} h) \right] \quad (1)$$

여기서, u 는 타원체의 구름방향 평균속도이고, ω 는 평균각속도로서 반시계방향으로 회전하는 경우를 (+)로 정의하였다.

EHL상태에서의 윤활유의 점도와 밀도는 각각 다음의 식 (2), 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다[2].

$$\bar{\eta} = \eta_0 \exp \{ \{ \ln(\eta_0) + 9.67 \} \{ -1 + (1 + 5.1 \times 10^{-9} p)^2 \} \} \quad (2)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 \left[1 + \frac{0.58 \times 10^{-9} p}{1 + 1.68 \times 10^{-9} p} \right] \quad (3)$$

여기서, p 와 η_0 의 단위는 각각 [Pa], [Pa·s]이다.

EHL상태에서 유막의 크기는 다음식과 같이 정의할 수 있다.

$$h = h_0 + h_k + h_d \quad (4)$$

여기서, h_0 는 상수이고, h_k 는 타원체의 형상에 의한 유막으로서 다음식과 같이 나타내어진다.

$$h_g = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad (5)$$

한편, EHL유막내의 발생압력에 의한 유희면의 탄성변형량인 h_d 는 참고문헌[11-13]의 방법으로 구할 수 있다.

유막내에서 발생하는 유체압력의 합은 타원체에 작용하는 하중과 일치하며, 이를 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$w = \iint p \, dx \, dy \quad (6)$$

3. 무차원화

수치해석을 간단하게 하고 결과를 효율적으로 정리하기 위하여 다음과 같은 무차원변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} X &= x/b, Y = y/a, H = h/R_x, P = p/E, \rho = \bar{\rho}/\rho_0 \\ \eta &= \bar{\eta}/\eta_0, k = a/b, U = \eta_0 u/ER_x, \Omega = \eta_0 \omega/E \\ G &= \alpha E, W = w/ER_x^2, B = 2\Omega/U \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, 유효탄성계수 E 의 단위는 [GPa]이고, Hertz 접촉타원의 타원비 k 와 타원체의 곡률반경 R_x, R_y 와의 관계는 다음 식을 사용하였다[4].

$$k = \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{2/3} \quad (8)$$

따라서, 식 (1)~식 (4), 식 (6)을 무차원화하여 순서대로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho H^3 \partial P}{\eta} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\rho H^3 \partial P}{\eta} \right) \\ = 12U \frac{b}{R_x} \left[\left(1 - \frac{kbBY}{2R_x} \right) \frac{\partial(\rho H)}{\partial X} + \frac{bBX}{2kR_x} \frac{\partial(\rho H)}{\partial Y} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta = \exp\{[\ln(\eta_0) + 9.67]\{-1 + (1 + 5.1EP)^2\}\} \quad (10)$$

$$\rho = 1 + \frac{0.58EP}{1 + 1.68EP} \quad (11)$$

$$H = H_0 + \frac{b^2}{2R_x^2} \left\{ X^2 + \frac{R_x}{R_y} k^2 Y^2 \right\} + H_d \quad (12)$$

$$W = \frac{kb^2}{R_x^2} \iint P \, dX \, dY \quad (13)$$

한편, 수치해석과정중에 음(-)의 압력이 발생할 경우에는 다음의 레이놀즈 경계조건식을 적용한다.

$$P = \frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

4. 수치해석

타원체가 구름운동과 스핀운동을 동시에 하는 경우의 EHL문제를 참고문헌[11-13]에서와 같이 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 수치해석하고자 한다. 불균일한 격자계를 사용할 경우, 식 (9)의 유한차분형태는 참고문헌[11-12]과 거의 유사하게 다음식과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j}^3 (P_{i+1,j} - P_{i,j})}{\Delta X_i \eta_{i+1/2,j}} - \frac{\rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}^3 (P_{i,j} - P_{i-1,j})}{\Delta X_{i-1} \eta_{i-1/2,j}} \\ &+ \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{k^2 (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j)} \left\{ \frac{\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2}^3 (P_{i,j+1} - P_{i,j})}{\Delta Y_j \eta_{i,j+1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}^3 (P_{i,j} - P_{i,j-1})}{\Delta Y_{j-1} \eta_{i,j-1/2}} \right\} \\ &- 12U \frac{b}{R_x} \left[\left(1 - \frac{kbBY_j}{2R_x} \right) (\rho_{i+1/2,j} H_{i+1/2,j} - \rho_{i-1/2,j} H_{i-1/2,j}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta X_{i-1} + \Delta X_i}{\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j} \frac{bBX_i}{2kR_x} (\rho_{i,j+1/2} H_{i,j+1/2} - \rho_{i,j-1/2} H_{i,j-1/2}) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$(i = 2, \dots, M_j \quad j = 2, \dots, N-1) \quad (16)$$

여기서, M_j 는 $Y=Y_j$ 에서 식 (14)의 레이놀즈 경계조건을 만족시키는 X방향 격자의 수이고, N 은 Y방향격자의 수이다[11].

식 (15)에서 미지수인 P_{ij} 와 H_0 를 효과적으로 구하기 위하여 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하면 다음식과 같다.

$$\sum_k \sum_l \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial P_{kl}} \right)^n (P_{kl}^{n+1} - P_{kl}^n) + \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial H_0} \right)^n (H_0^{n+1} - H_0^n) + f_{ij}^n = 0 \quad (17)$$

$$(i = 2, \dots, M_j \quad j = 2, \dots, N-1)$$

한편, 식 (13)은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{i=2}^{M_j} \sum_{j=2}^{N-1} P_{ij} \Delta A_{ij} \quad (18)$$

여기서,

$$\Delta A_{ij} = \frac{kb^2}{4R_x^2} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) (\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_j) \quad (19)$$

이다.

따라서, 식 (17)과 식 (18)에서 미지수와 식의 수가 같으므로 해석이 가능하다.

수치해석과정은 참고문헌[11-13]과 동일하며, 유막의 크기가 계산영역의 영향을 받지 않도록 가능하면 넓게 하였다. 본 논문에서는 구름방향 입구부와 출구부의 최대경계위치를 $X=-5.0$ 와 $X=1.65$ 에, 측면부의 최대경계 위치는 $Y=\pm 5.0$ 에 각각 두었으며, 사용한 격자의 최대 수는 67×45 개이다.

5. 결과 및 고찰

Fig. 3~Fig. 5에는 스핀/구름 속도비 B 가 다른 3가

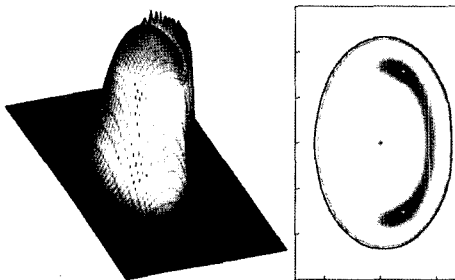


Fig. 3. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=1.8706 \times 10^{-12}$, $W=1.821 \times 10^{-7}$, $B=0$.

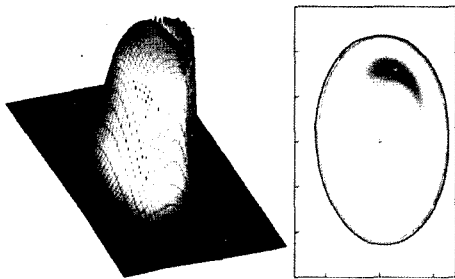


Fig. 4. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=1.8706 \times 10^{-12}$, $W=1.821 \times 10^{-7}$, $B=120$.

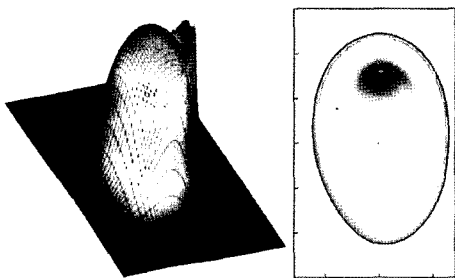


Fig. 5. Pressure distribution and film contours: $k=2.0$, $G=4522$, $U=1.8706 \times 10^{-12}$, $W=1.821 \times 10^{-7}$, $B=240$.

지 조건에 대한 $-1.8 \leq X \leq 1.65$, $|Y| \leq 3.5$ 인 영역에서의 3-D 압력분포와 2-D 유막형상을 서로 비교하여 나타내었다. 유막형상에서 +와 * 기호는 Hertz 접촉타원의 중심위치($X=0, Y=0$)와 최소유막 H_m 이 발생하는 위치를 각각 표시한다.

Fig. 3에 나타낸 순수 구름운동($B=0$)인 경우의 압력 분포와 유막형상은 접촉타원의 단축에 대하여 대칭이며, 타원접촉 EHL의 대표적인 특징들이 모두 발생하고 있다. 즉, 구름방향 출구영역에서는 압력 Spike가 발생하고, 접촉중앙부 영역에서 크기가 일정한 유막이 출구부에서 급격하게 수축하여 전체적으로는 말발굽모양을 이루어 윤활유의 누설을 억제하고 있다. 이때, 크기가 5.55×10^{-6} 인 H_m 은 Side lobe부에서 접촉타원의 단축에 대하여 대칭적으로 발생한다. 만일, 구름운동에 스핀운동이 추가되면 윤활면의 속도는 위치에 따라서 달라지므로 EHL상태도 변화할 것으로 쉽게 예상할 수 있다. Fig. 4와 Fig. 5에는 $B=120$ 와 $B=240$ 인 경우에 대한 EHL 해석결과를 각각 나타내었다. 여기서, 타원체는 반시계방향으로 회전하므로 구름방향속도는 접촉중앙부에서 멀어질수록 +Y영역에서는 느려지고 반대편에서는 빨라진다. 이 결과, 스핀운동이 빠를수록 +Y영역에서는 상대적으로 낮은 압력발생과 이로 인한 작은 탄성변형의 결과로 유막두께는 감소한다. 하지만 -Y영역에서는 결과가 이와는 반대로 되며, 전체적으로는 접촉타원의 단축에 대하여 발생압력과 유막형상이 비대칭적으로 분포하게 된다.

Fig. 6에는 스핀/구름 속도비의 변화에 대한 최소유막두께 H_m 과 접촉중앙부 유막두께 H_c 의 변화를 나타

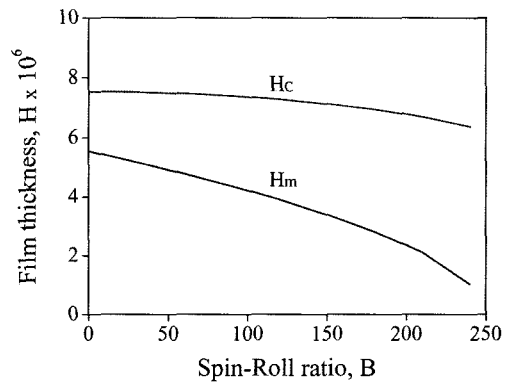


Fig. 6. Variation of central and minimum film thicknesses with spin-roll ratio: $k=2.0$, $G=4522$, $U=1.8706 \times 10^{-12}$, $W=1.821 \times 10^{-7}$.

내었다. 일정한 구름속도에 대하여 스핀속도가 증가할수록 H_c 는 약간 작아지지만 H_m 은 아주 급격하게 감소하고 있다[7-8].

Fig. 7과 Fig. 8에는 지금까지의 스핀운동을 고려한 타원접촉 EHL해석중에서 대표적인 연구로 알려져 있는 Dowson 등[7]의 $k=2$ 와 $k=6$ 인 경우에 대한 결과와 각각 비교하여 나타내었다. 스핀/구름 속도비 B 의 변화에 따른 H_m 과 H_c 의 변화경향은 서로 거의 유사하지만 본 논문의 유막두께가 전체적으로 약간 크게 나타나고 있다. 이는 참고문헌[11-13]에서 고찰한 것과 같이 이들의 수치해석영역이 상대적으로 좁아서 수치해석시에 윤활유 충전조건(Flooded condition)을 충족시키지 못했기 때문인 것으로 추정된다. 한편, 본 논문에서의 해석조건이 참고문헌[7]의 경우보다 가혹한 조건임에도

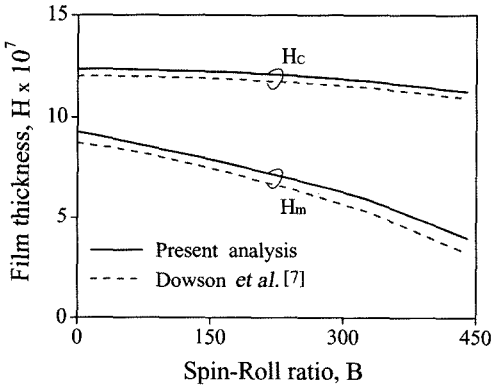


Fig. 7. Variation of central and minimum film thicknesses with spin-roll ratio: $k=2.0$, $G=4522$, $U=9.353 \times 10^{-14}$, $W=1.821 \times 10^{-8}$.

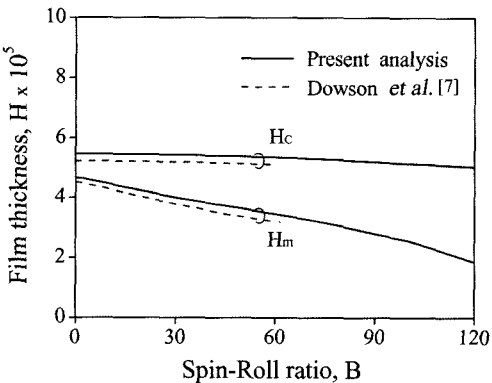


Fig. 8. Variation of central and minimum film thicknesses with spin-roll ratio: $k=6.0$, $G=4522$, $U=3.366 \times 10^{-11}$, $W=7.369 \times 10^{-7}$.

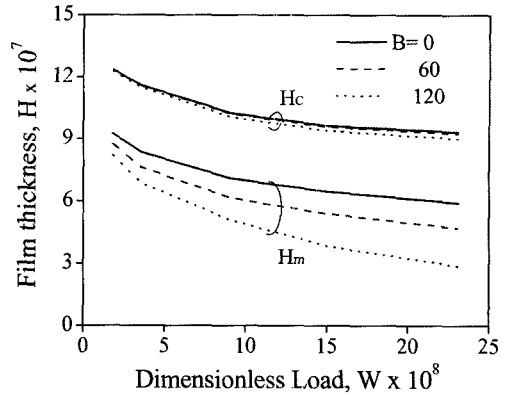


Fig. 9. Variation of central and minimum film thicknesses with dimensionless load parameter: $k=2.0$, $G=4522$, $U=9.353 \times 10^{-14}$.

불구하고 성공적으로 수렴해를 구하였다. 즉, Fig. 3~Fig. 6의 결과는 참고문헌[7]과 동일조건인 Fig. 7에 비하여 무차원 속도 및 하중 변수가 각각 20배와 최대 10배 높은 경우이며, Fig. 8에서 B 에 대한 수렴범위는 2배로 높았다.

Fig. 9에는 무차원 하중변수 W 의 변화에 대한 H_c 와 H_m 의 변화를 스핀/구름 속도비가 다른 경우와 서로 비교하여 나타내었다. 하중이 증가할수록 스핀운동으로 인한 영향이 H_c 에는 작지만 H_m 에는 아주 크게 나타나고 있다. 이는 Fig. 3~Fig. 5에서 고찰한 것과 같이 스핀으로 인한 발생압력과 이로 인한 탄성변형량과의 관계에서 쉽게 이해할 수 있다. 한편, Zou 등[8]은 스핀운동 뿐만 아니라 윤활유가 임의방향에서 유입되는 경우까지 포함하는 가장 일반적인 타원접촉 EHL문제에 대한 유막두께식을 제시하였다. 하지만 그들의 수치해석 결과와 유막식으로 구한 결과의 일부가 불일치하는 것으로 조사되었기에 이를 적용하기가 어려운 실정이다.

이상의 결과에서, 구름속도가 동일한 경우일지라도 스핀속도에 따라서 최소유막두께의 크기는 접촉중앙부 결과와는 달리 아주 크게 감소하였다. 특히, 스핀운동을 하는 경우에는 최소유막두께에 하중의 영향이 아주 크게 작용하므로 기존의 최소유막두께식으로는 이의 크기를 정확하게 예측하기가 어려운 실정이다. 따라서, 고속 앵글러 컨택트 볼베어링 등에서와 같이 타원체가 스핀운동을 하는 경우에 적용할 수 있는 정확한 최소유막두께식을 구하기 위해서는 추가적인 연구가 요구되며, 본 논문에서 사용한 수치해석방법이 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

6. 결 론

본 논문에서는 고속 앵귤러 컨택트 볼 베어링과 토로이드형 트랙션 드라이브 등에서의 같이 타원체가 구름운동과 함께 스핀운동을 하는 경우의 EHL문제를 유한차분법과 뉴우튼-랩슨 방법을 적용하여 기존의 연구에서보다 한층 가혹한 운전조건에 대하여 성공적으로 수치해석하였다. 이 결과, 스핀운동은 최소유막두께를 크게 감소시키지만 접촉중앙부 유막두께의 감소는 상대적으로 작았다. 특히, 스핀속도가 증가할수록 최소유막두께의 감소에 미치는 하중의 영향은 아주 크게 나타났으며, 이는 기존의 유막두께식으로는 예측이 어려운 실정이다. 따라서, 가장 일반적인 타원접촉 EHL문제에 적용할 수 있는 정확한 최소유막두께식을 구하기 위해서는 추가적인 연구가 요구되며, 본 논문에서 사용한 수치해석 방법과 결과가 유용하게 사용될 수 있을 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2006년도 지방대학혁신역량강화사업과 경상대학교 연구년제교수연구과제에 의하여 지원되었음을 밝힙니다.

기호설명

a	: Hertz 접촉타원의 장반경
B	: 타원체의 무차원 스핀/구름 속도비, $2\Omega U$
b	: Hertz 접촉타원의 단반경
E	: $2/E=(1-\nu_1^2)/E_1+(1-\nu_2^2)/E_2$
G	: 무차원 재료변수, αE
h	: 유막두께
H	: 무차원 유막두께, h/R_x
H_c	: 접촉중심부에서의 무차원 유막두께
H_m	: 무차원 최소유막두께
k	: Hertz 접촉타원의 타원비, a/b
n	: 반복계산횟수
p	: 압력
P	: 무차원 압력, p/E
R_x	: 등기타원체의 x방향 곡률반경
R_y	: 등기타원체의 y방향 곡률반경
U	: 무차원 속도변수, $\eta_0 u/ER_x$
u	: 타원체의 구름방향 평균속도

X, Y	: 무차원 좌표계, $x/b, y/a$
x, y	: 좌표계
w	: 하중
W	: 무차원 하중변수, $W=w/ER_x^2$
Z	: 윤활유의 Roelands 계수
α	: 윤활유의 압력-점도지수
η	: 무차원 점도, $\bar{\eta}/\eta_0$
η_0	: 대기압 상태에서의 점도
$\bar{\eta}$: 윤활유의 점도
ρ	: 무차원 밀도, $\bar{\rho}/\rho_0$
ρ_0	: 대기압 상태에서의 밀도
$\bar{\rho}$: 윤활유의 밀도
Ω	: 무차원 각속도, $\eta_0\omega/E$
ω	: 타원체의 평균각속도

참고문헌

1. Aramaki, H. *et al.*, "The Performance of Ball Bearings with Silicon Nitride Ceramic Balls in High Speed Spindle for Machine Tools," *Trans. ASME, J. of Tribology*, Vol.110, pp.693-698, 1988.
2. Dowson, D. and Higginson, G. R., *Elastohydrodynamic Lubrication*, 1st ed., Pergamon Press, 1977.
3. Hamrock, B. J. and Dowson, D., "Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, Part 1: Theoretical Formulation," *Trans. ASME, J. of Lub. Tech.*, Vol.98, pp.223-229, 1976, "Part 2: Ellipticity Parameter Results," Vol.98, pp.375-383, 1976, "Part 3: Fully Flooded Results," Vol.99, pp.264-276, 1977.
4. Chittenden, R. J., Dowson, D. and Taylor, C. M., "Elastohydrodynamic Film Thickness in Concentrated Contacts," *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, Vol.200, pp.207-226, 1986.
5. Mostofi, A. and Gohar, R., "Oil Film Thickness and Pressure Distribution in Elastohydrodynamic Point Contacts," *J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol.24, pp.173-182, 1982.
6. Dowson, D., Taylor, C. M. and Xu, H., "Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts with Pure Spin," *Proc. Instn. Mech. Engrs., J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol.207, pp.83-92, 1993.
7. Dowson, D., Taylor, C. M. and Xu, H., "Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts with Spin and Rolling," *Proc. Instn. Mech. Engrs., J. of Mech. Eng. Sci.*, Vol.205, pp.165-174, 1991.
8. Zou, Q., Huang, C. and Wen, S., "Elastohydrodynamic Film Thickness in Elliptical Contacts with Spinning and Rolling," *Trans. ASME, J. of Tribology*, Vol.121, pp.686-692, 1999.

9. Taniguchi, M., Dowson, D. and Taylor, C. M., "The Effect of Spin Motion upon Elastohydrodynamic Elliptical Contacts," *Elastohydrodynamics*, Vol.32, pp.599-610, 1997.
10. 장시열, "무단 변속기의 동력전달 접촉에서 회전운동을 고려한 타원형상의 점접촉 탄성유체윤활연구," 한국윤활학회지, Vol.21, No.6, pp.272-277, 2006.
11. Park, T. J. and Kim, K. K., "A Numerical Analysis of the Elastohydrodynamic Lubrication of Elliptical Contacts," *Wear*, Vol.136, pp.299-312, 1990.
12. 박태조, "Hamrock & Dowson의 EHL 유막두께식에 대한 평가," 한국윤활학회지, Vol.12, No.3, pp.115-122, 1996.
13. 박태조, 현준수, "타원접촉의 탄성유체윤활: 제1보-윤활유의 유입방향이 Hertz 접촉타원의 장축방향인 경우," 한국윤활학회지, Vol.14, No.4, pp.58-63, 1998.