

Bayesian Parameter Estimation of the Four-Parameter Gamma Distribution*

Mira Oh¹⁾ Kyungsook Kim²⁾ Wan Hyun Cho³⁾ and Young Sook Son⁴⁾

Abstract

A Bayesian estimation of the four-parameter gamma distribution is considered under the noninformative prior. The Bayesian estimators are obtained by the Gibbs sampling. The generation of the shape/power parameter and the power parameter in the Gibbs sampler is implemented using the adaptive rejection sampling algorithm of Gilks and Wild (1992). Also, the location parameter is generated using the adaptive rejection Metropolis sampling algorithm of Gilks, Best and Tan (1995). Finally, the simulation result is presented.

Keywords: Four-parameter gamma distribution; noninformative prior; Gibbs sampling; adaptive rejection sampling; adaptive rejection Metropolis sampling.

1. 서론

감마분포는 생존분석, 신뢰성공학, 기후학 등의 많은 응용분야에서 널리 유용하게 사용되는 분포이다. 감마분포의 성질은 Johnson과 Kotz (1970)에 잘 설명되어 있다. 감마분포의 가장 포괄적인 형태는 다음과 같이 4개의 모수를 가지는 4모수 감마분포로 정의된다 (Harter, 1967).

$$f(X | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{\delta}{\beta} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{X - \gamma}{\beta} \right)^{\alpha\delta-1} \exp \left[- \left(\frac{X - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right], \quad X \geq \gamma \geq 0, \quad \alpha, \beta, \delta > 0. \quad (1.1)$$

* This work was supported by the Program for the Training of Graduate Students in Regional Innovation which was conducted by the Ministry of Commerce Industry and Energy of the Korean Government.

1) Doctoral course, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea.

E-mail: omr@chonnam.ac.kr

2) Doctoral course, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea.

E-mail: ksook@hanmail.net

3) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea.

E-mail: whcho@chonnam.ac.kr

4) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea.

Correspondence : ysson@chonnam.ac.kr

이때 δ 는 힘 (power) 모수, $\alpha\delta$ 는 형태 (shape) 모수, α 는 형태/힘모수, β 는 척도 (scale) 모수, 그리고 γ 는 위치 (location) 모수이다. 4-모수 감마분포의 특별한 경우로서는 2-모수 지수분포 ($\alpha = \delta = 1$), 2-모수 절반-정규분포 ($\alpha = 1/2, \delta = 2$), 3-모수 와이블분포 ($\alpha = 1$), 2-모수 감마분포 ($\delta = 1, \gamma = 0$), 3-모수 감마분포 ($\delta = 1$), 일반화 감마분포 (generalized gamma distribution) ($\gamma = 0$) 등이 있다.

감마분포의 모수추정에서 최우추정량 (maximum likelihood estimator) 을 얻는 것은 쉽지 않다. 감마분포에서 최우추정은 일반적으로 로그우도함수를 모수에 관해 미분하여 얻어지는 비선형 연립방정식을 수치적으로 반복해서 해를 구하는 문제로 귀착된다. 그러나 이 비선형 방정식을 수치적으로 반복해서 전 모수 공간에서 최적해를 구하는 것은 어렵다. 게다가 유일한 해를 가질 충분조건이 알려지지도 않았으므로 여러 개의 해가 얻어질 수도 있다 (Hager와 Bain, 1970; Prentice, 1974; Lawless, 1980).

Son과 Oh (2006)는 2-모수 감마분포에서 Gilks와 Wild (1992) 의 적응기각 표집 (adaptive rejection sampling: ARS) 알고리즘을 포함하는 깁스샘플링에 의한 베이지안 모수추정량이 Thom (1958), Greenwood와 Durand (1960), Bowman과 Shenton (1988) 등이 제안하였던 근사 최우추정량보다 우수함을 보였다. Pang *et al.* (2004) 는 3-모수 감마분포에서 ARS 알고리즘과 Gilks *et al.* (1995) 의 적응기각 메트로폴리스 표집 (adaptive rejection Metropolis sampling: ARMS) 알고리즘을 포함하는 깁스샘플링에 의한 베이지안 모수추정을 제안하였고, 1회 반복을 갖는 모의실험 자료에 대하여 제안된 추정법을 적용하였다. 3-모수 감마분포의 최우추정에 관해서는 Harter와 Moore (1965), Cohen과 Norgaard (1977), 그리고 Cohen과 Whitten (1982, 1986) 을, 일반화 감마분포의 최우추정에 관해서는 Parr와 Webster (1965), Stacy와 Mihram (1965), Hager와 Bain (1970), Stacy (1973), 그리고 Prentice (1974) 을 참고하기 바란다. Hager와 Bain (1970) 과 Hager *et al.* (1971)은 표본의 크기가 아주 크지 않고, 또한 형태모수도 크지 않다면 최우추정치가 존재하지 않는다고 하였다.

Harter (1967) 는 4-모수 감마분포의 최우추정치를 구하기 위하여 여러 가지 수치반복법을 조합해서 사용하여 모수 값 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (3, 50, 20, 1)$ 을 가지는 크기 40인 반복 1회의 모의실험자료에 대해 최우추정치 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (0.509, 240.9, 18.01, 3.074)$ 를 얻었으나 모수의 참값과 매우 큰 편차를 가짐을 알 수 있다. 반면 본 논문의 3절에서 제안된 베이지안 모수추정 절차에 의해서는 크기 30인 반복 100회의 모의실험자료에 대해 베이지안 추정치 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (2.934, 50.497, 20.153, 1.929)$ 와 각 모수추정치에 대한 표준편차 $(0.608, 1.445, 1.440, 0.893)$ 을 얻었다 (4절의 표 4.2 참조).

Tsionas (2001) 는 4-모수 감마분포에 대하여 무정보적 사전분포 (noninformative prior) 의 가정 하에서 깁스샘플링을 사용한 베이지안 모수추정을 논의하였다. 사용된 깁스샘플러에서 형태/힘 모수인 α 의 생성을 위해서는 Ripley (1988) 의 기각표집 (rejection sampling) 방법을 사용하였고, 힘모수 δ 의 생성을 위해서는 Ritter와 Tanner (1992) 의 역분포함수 (inverse cumulative distribution function) 의 선형근사에 기초하는 griddy Gibbs sampling 방법을 사용하였다. 그러나 Son과 Oh (2006) 는 Tsionas (2001) 에서 사용된 기각표집에 의한 모수의 생성이 근사 최우추정치를 구하기 위한 방정식을 푸

는 것과 동일함을 보였다. 따라서 형태모수의 베이지안 추정치는 근사 최우추정치와 비슷한 정도 (precision) 를 보일 수 밖에 없음을 예측할 수 있다. Tsionas (2001) 는 모수 값 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 1, 0, 0.5)$ 을 가지는 크기 100인 반복 1회의 모의실험자료에 대해 베이지안 추정치 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (2.759, 1.610, -0.0287, 0.502)$ 및 각 모수에 대한 표준편차 $(1.353, 1.046, 0.047, 0.139)$ 를 얻었다. 반면 본 논문의 3절에서 제안된 베이지안 모수 추정절차에 의해서는 크기 100인 반복 100회의 모의실험자료에 대해 베이지안 추정치 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}) = (2.003, 1.080, 0.023, 0.528)$ 와 각 모수추정치에 대한 표준편차 $(0.577, 0.166, 0.036, 0.178)$ 을 얻었다 (4절의 표 4.4 참조).

본 논문에서는 4-모수 감마분포의 모수추정을 위하여 갑스샘플링을 사용한 베이지안 모수추정절차를 제안한다. 형태/멱모수인 α 와 멱모수 δ 의 조건부 사후분포 (conditional posterior distribution) 는 로그-오목 (log-concave) 함수이므로 ARS 알고리즘에 의해, 그리고 위치모수의 조건부 사후분포는 로그-오목 함수가 아니므로 ARMS 알고리즘에 의해 모수생성을 할 수 있도록 갑스샘플러를 구성하였다.

2절에서는 4-모수 감마분포의 우도함수를 정의하고, 최우추정을 위한 연립방정식을 계산한다. 3절에서는 베이지안 모수추정을 위한 사전분포를 정의하고, 완전 조건부 사후분포 (full conditional posterior distribution) 를 계산하여 모수추정을 위한 갑스샘플링 알고리즘을 구성한다. 4절에서는 3절에서 제안한 베이지안 모수 추정법과 2절에서 논의된 최우추정법의 결과를 비교해 보기 위하여 모의실험을 수행하였다.

2. 최우추정

$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 가 4-모수 감마분포 (1.1) 로 부터 추출된 확률표본이라고 하면, 4-모수 감마분포의 우도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \beta^{-n\alpha\delta} \delta^n \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right]^n \cdot \prod_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\alpha\delta-1} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right]. \quad (2.1)$$

4-모수 감마분포의 최우추정법에 의한 모수 추정치는 다음의 로그우도함수

$$\ln L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = -n\alpha\delta \ln \beta + n \ln \delta - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha\delta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \gamma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta$$

를 각 모수에 관해 1차 편미분하여 얻어지는 아래의 비선형 연립방정식을 반복에 의한 수치분석에 의하여 최적치를 구함으로서 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = -n\delta \ln \beta - \frac{n\partial \ln \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} + \delta \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \gamma) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) = -\frac{n\alpha\delta}{\beta} + \frac{\delta}{\beta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \delta} \ln L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) &= -n\alpha \ln \beta + \frac{n}{\delta} + \alpha \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \gamma) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \ln \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) &= -(\alpha\delta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \gamma)^{-1} \\ &\quad + \beta^{-\delta} \delta \sum_{i=1}^n \ln(X_i - \gamma)^{\delta-1} = 0.\end{aligned}$$

3. 베이지안 모수추정

4-모수 감마분포의 모수들이 서로 독립이라는 가정 하에서 식 (3.1) 과 같은 무정보적 사전분포를 가정하기로 한다.

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \propto \frac{1}{\beta^\delta}. \quad (3.1)$$

결합사후분포는 우도함수 (2.1) 과 사전분포 (3.1) 의 곱에 의하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned}p(\alpha, \beta, \gamma, \delta | \mathbf{X}) &\propto L(\mathbf{X} | \alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot \pi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ &\propto \beta^{-(n\alpha\delta+1)} \delta^{n-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right]^n \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\alpha\delta-1} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right]. \quad (3.2)\end{aligned}$$

결합사후분포 (3.2) 로 부터 완전 조건부 사후분포는 식 (3.3) 에서 식 (3.6) 으로 나타낼 수 있다.

$$p(\alpha | \beta, \gamma, \delta, \mathbf{X}) \propto g_\alpha(\alpha) = \beta^{-n\alpha\delta} \Gamma(\alpha)^{-n} \cdot \prod_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\alpha\delta}, \quad (3.3)$$

$$p(\beta | \alpha, \gamma, \delta, \mathbf{X}) \propto \beta^{-(n\alpha\delta+1)} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right], \quad (3.4)$$

$$p(\gamma | \alpha, \beta, \delta, \mathbf{X}) \propto g_\gamma(\gamma) = \prod_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\alpha\delta-1} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right], \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}p(\delta | \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{X}) &\propto g_\delta(\delta) = \beta^{-n\alpha\delta} \delta^{n-1} \prod_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\alpha\delta-1} \\ &\quad \times \exp \left[-\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \right]. \quad (3.6)\end{aligned}$$

모수 추정은 완전조건부 사후분포들로 구성되는 갑스샘플러 (gibbs sampler) 를 사용한다. 모수 β 의 생성은 가장 간단하다. 확률변수 Y 가 모수 λ 와 θ 를 가지는 역감마분포를 따른다면 $Y \sim IG(\lambda, \theta)$ 라 표시하고 그것의 확률밀도함수를 다음과 같이 정의하자.

$$f_Y(y | \lambda, \theta) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)\theta^\lambda} y^{-(\lambda+1)} \exp\{-1/(\theta y)\}, \quad y > 0, \lambda, \theta > 0.$$

이제 식 (3.4)에서 $\beta' = \beta^\delta$ 로 변수변환하면 β' 는 역감마분포 $IG(n\alpha, 1/\sum_{i=1}^n (X_i - \gamma)^\delta)$ 를 따른다.

확률밀도함수 $f(z)$ 의 정규화 상수 (normalizing constant) 를 알 수 없을 때, 즉 $f(z) \propto g(z)$ 일 때, $g(z)$ 이 로그-오목성 (log-concavity) 을 갖는다면 Gilks와 Wild (1992) 의 ARS 알고리즘을 사용하여 확률분포 $f(z)$ 을 따르는 확률변수를 생성할 수 있다. 즉, Z 의 공간 (support) D_Z 위의 $k+2$ 개의 좌표점들을 $T_k = \{(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) \mid z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_{k+1}\}$ 이라 놓자. 이때 z_0 와 z_{k+1} 은 D_Z 에서 가능한 z 의 하한값 및 상한값에 해당한다. $1 \leq i \leq j \leq k$ 에 대하여 $L_{ij}(z; T_k)$ 를 두 개의 점들 $(z_i, \ln g(z_i))$ 과 $(z_j, \ln g(z_j))$ 를 연결하는 직선이라 놓으면 조각선형덮개 (piecewise linear upper hull) 함수 $u_k(z)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$u_k(z) = \min[L_{i-1,i}(z; T_k), L_{i+1,i+2}(z; T_k)], \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}.$$

ARS 알고리즘에서는 $\exp\{u_k(z)\}$ 가 T_k 에서의 기각덮개함수 (rejection envelop function) 로, 또한 표집확률함수로서는 $S_k(z) = \exp\{u_k(z)\} / \int_{D_Z} \exp\{u_k(z)\} dz$ 가 사용된다.

만약 $g(z)$ 이 로그-오목성을 가지지 않는다면 ARS 알고리즘을 사용할 수 없다. 이 경우에는 $f(z)$ 에 적합한 함수를 찾는 방법을 제공하는 ARS 알고리즘에 Metropolis-Hastings 알고리즘을 더하여 만들어진 Gilks et al. (1995) 의 ARMS 알고리즘을 사용한다. ARMS 알고리즘에서 조각선형덮개 함수 $u_k(z)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$u_k(z) = \max[L_{i,i+1}(z; T_k), \min\{L_{i-1,i}(z; T_k), L_{i+1,i+2}(z; T_k)\}], \quad z_i \leq z \leq z_{i+1}.$$

이제 형태/멱모수 α , 멱모수 δ , 그리고 위치모수 γ 의 조건부 사후분포는 표준형의 분포가 아니므로 이를 분포가 로그-오목함수인지를 검토해보기로 하자. 식 (3.3), 식 (3.5), 그리고 식 (3.6)에 각각 로그를 취한 함수들, $\ln p(\alpha | \beta, \gamma, \delta, \mathbf{X})$, $\ln p(\gamma | \alpha, \beta, \delta, \mathbf{X})$, 그리고 $\ln p(\delta | \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{X})$ 을 각각 α , γ , δ 에 관해 2차 미분한 함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln p(\alpha | \beta, \gamma, \delta, \mathbf{X}) &= -n \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln \Gamma(\alpha) = -n \cdot \Psi_1(\alpha), \\ \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ln p(\gamma | \alpha, \beta, \delta, \mathbf{X}) &= -(\alpha\delta - 1) \sum_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{-2} - \beta^{-\delta} \delta(\delta - 1) \sum_{i=1}^n (X_i - \gamma)^{\delta-2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \ln p(\delta | \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{X}) &= -\frac{(n-1)}{\delta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right)^\delta \left[\ln \left(\frac{X_i - \gamma}{\beta} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Abramowitz와 Stegun (1972) 에 의하면 다항감마 (polygamma) 함수 $\Psi_m(\alpha)$ 는

$$\Psi_m(\alpha) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial \alpha^{m+1}} \ln \Gamma(\alpha) = (-1)^{m+1} m! \sum_{d=0}^{\infty} (\alpha + d)^{-(m+1)}$$

과 같이 표현되므로 $(\partial^2/\partial \alpha^2) \ln p(\alpha | \beta, \gamma, \delta, \mathbf{X}) < 0$ 이고, 또한 $(\partial^2/\partial \delta^2) \ln p(\delta | \alpha, \beta, \gamma, \mathbf{X}) < 0$ 임은 명백하다. 따라서 형태/멱모수 α 및 멱모수 δ 의 조건부 사후분포는 로그-오목 하므로 각 조건부 사후분포로부터 각각 α 및 δ 를 생성하기 위해서 ARS 알고리즘을 적용할 수 있다. 그러나 위치모수 γ 의 조건부 사후분포는 로그-오목 함수가 아니다. 따라서 γ 의 조건부 사후분포로부터 γ 를 생성하기 위해서 ARMS 알고리즘을 적용하기로 한다. 이제 김스샘플링 알고리즘을 다음과 같이 구성한다.

김스샘플링 알고리즘

[단계 1] 초기화 단계 : 형태/멱모수 α , 위치모수 γ , 그리고 멱모수 δ 의 초기화 값을 $(\alpha^{(0)}, \gamma^{(0)}, \delta^{(0)})$ 으로 설정한다.

[단계 2] 반복단계 : $i = 0, 1, 2, \dots$

- (i) $IG\left(n\alpha^{(i)}, 1/\sum_{j=1}^n (X_j - \gamma^{(i)})^{\delta^{(i)}}\right)$ 로부터 생성된 β' 를 사용하여 $\beta^{(i+1)} = (\beta')^{1/\delta^{(i)}}$ 를 계산한다.
- (ii) $p(\alpha | \beta^{(i+1)}, \gamma^{(i)}, \delta^{(i)}, \mathbf{X})$ 에서 $\alpha^{(i+1)}$ 을 생성하기 위하여 ARS 알고리즘을 수행한다.
- (iii) $p(\delta | \alpha^{(i+1)}, \beta^{(i+1)}, \gamma^{(i)}, \mathbf{X})$ 에서 $\delta^{(i+1)}$ 을 생성하기 위하여 ARS 알고리즘을 수행한다.
- (iv) $p(\gamma | \alpha^{(i+1)}, \beta^{(i+1)}, \delta^{(i+1)}, \mathbf{X})$ 에서 $\gamma^{(i+1)}$ 을 생성하기 위하여 ARMS 알고리즘을 수행한다.

< $\alpha^{(i+1)}$ 을 생성하기 위한 ARS 알고리즘 >

[단계 2.1.1] 초기화 단계

- $D_\alpha = \{\alpha | \alpha > 0\}$ 의 공간에서 α 축 좌표점의 수 k 와 좌표점 T_k 을 정하고 T_k 에 서의 조각선형덮개함수 $u_k(\alpha)$ 를 구한다.

[단계 2.1.2] 표집단계

- 표집확률함수 $S_k(\alpha)$ 로부터 α^* 를 생성한다.
- 표준균일분포 $U(0, 1)$ 로부터 난수 u 를 생성한다.
- $u \leq g_\alpha(\alpha^*) / \exp\{u_k(\alpha^*)\}$ 이면 $\alpha^{(i+1)} = \alpha^*$ 으로 채택하고 [단계 2] 의 (iii)으로 가고, 그렇지 않으면 α^* 를 기각하고 [단계 2.1.3] 의 갱신단계로 간다.

[단계 2.1.3] 갱신단계

- 기각된 α^* 를 α 축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{k+1} 을 만들어 [단계 2.1.2] 를 수행한다.

$< \delta^{(i+1)}$ 을 생성하기 위한 ARS 알고리즘 >

[단계 2.2.1] 초기화 단계

- $D_\delta = \{\delta \mid \delta > 0\}$ 의 공간에서 δ 축 좌표점의 수 k 와 좌표점 T_k 을 정하고 T_k 에서의 조각선형덮개함수 $u_k(\delta)$ 를 구한다.

[단계 2.2.2] 표집단계

- 표집확률함수 $S_k(\delta)$ 로부터 δ^* 를 생성한다.
- 표준균일분포 $U(0, 1)$ 로부터 난수 u 를 생성한다.
- $u \leq g_\delta(\delta^*) / \exp\{u_k(\delta^*)\}$ 이면 $\delta^{(i+1)} = \delta^*$ 으로 채택하고 [단계 2] 의 (iv)로 가고, 그렇지 않으면 δ^* 를 기각하고 [단계 2.2.3] 의 갱신단계로 간다.

[단계 2.2.3] 갱신단계

- 기각된 δ^* 를 δ 축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{k+1} 을 만들어 [단계 2.2.2] 를 수행한다.

$< \gamma^{(i+1)}$ 을 생성하기 위한 ARMS 알고리즘 >

[단계 2.3.1] 초기화 단계

- $D_\gamma = \{\gamma \mid \gamma > 0\}$ 의 공간에서 γ 축 좌표점의 수 k 와 좌표점 T_k 을 정하고 T_k 에서의 조각선형덮개함수 $u_k(\gamma)$ 를 구한다.

[단계 2.3.2] 표집단계

- 표집확률함수 $S_k(\gamma)$ 로부터 γ^* 를 생성한다.
- 표준균일분포 $U(0, 1)$ 로부터 난수 u 를 생성한다.
- $u \leq g_\gamma(\gamma^*) / \exp\{u_k(\gamma^*)\}$ 이면 $\gamma_A = \gamma^*$ 으로 채택하고 [단계 2.3.4] 의 Metropolis-Hastings로 단계로 간다. 그렇지 않으면 γ^* 를 기각하고 [단계 2.3.3] 의 갱신단계로 간다.

[단계 2.3.3] 갱신단계

- 기각된 γ^* 를 γ 축 좌표점에 추가하여 좌표점 T_{k+1} 을 만들어 [단계 2.3.2] 를 수행한다.

[단계 2.3.4] Metropolis-Hastings 단계

- 표준균일분포 $U(0, 1)$ 로부터 난수 u 를 생성한다.
- $u \leq \min \left\{ 1, \frac{g_\gamma(\gamma_A) \cdot \min\{g_\gamma(\gamma^{(i)}), \exp[u_k(\gamma^{(i)})]\}}{g_\gamma(\gamma^{(i)}) \cdot \min\{g_\gamma(\gamma_A), \exp[u_k(\gamma_A)]\}} \right\}$ 이면 $\gamma^{(i+1)} = \gamma_A$ 으로 갱신하고,
그렇지 않으면 $\gamma^{(i+1)} = \gamma^{(i)}$ 으로 한다.

4. 모의실험

앞 절에서 논의된 김스샘플링에 의한 4-모수 감마분포의 베이지안 모수추정 절차의 평가를 위하여 모의실험을 수행하였다. 모수 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0.5, 1, 0, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 2), (2, 1, 0, 0.5), (3, 50, 20, 1)$ 를 가지는 5개의 4-모수 감마확률모형에 대하여 표본의 크기 $n = 15, 30, 50, 100$ 의 자료들이 각각 100회 반복 생성되어 모의실험에서 사용되었다.

모든 계산수행은 MATLAB (The MathWorks Inc., 2002) 을 사용하였다. 최우추정은 MATLAB의 fsolve 함수를, ARS, ARMS에서 난수생성은 unifrnd 함수를 통하여 계산하였다. 김스샘플러의 첫 단계인 [단계 1] 의 α, γ, δ 의 초기값으로는 각 모수의 최우추정치를 사용하였다. ARS 및 ARMS에서 α (혹은 δ, γ)축 좌표점의 초기값으로는 95% 근사 최우구간의 하한과 상한의 두 개 좌표점을 사용하였고, 이후 김스샘플링의 매화 α (혹은 δ, γ)축 좌표점의 초기화 값으로는 직전 반복에서 구해지는 표집확률함수 $S_k(\alpha)$ (혹은 $S_k(\delta), S_k(\gamma)$)의 10% 및 90% 백분위점을 사용하였다.

최우추정의 모의실험에서는 많은 경우 비선형연립방정식의 해로 수렴하지 않아 해가 구해지는 100회 반복자료가 얻어질 때까지 반복을 계속 수행하였다. 따라서 베이지안 추정에 사용된 모의실험자료는 비교를 위해 최우추정의 해가 얻어진 자료로 제한되었다. 김스샘플링에서는 처음 100번까지는 생성된 표본을 버린 후 반복회수를 100회 부터 시작하여 100회씩 증가시킨 각 모수 추정치의 평균제곱오차 (mean squared error: MSE) 의 결과들을 살펴보는 것으로 김스샘플링의 수렴성을 검토하였으며 최종적으로 1,000개의 반복으로 얻어지는 모수 생성값들이 사후분포를 구성하는데 사용되어 사후 분포의 평균값을 모수의 베이지안 추정치로 사용하였다.

표 4.1 – 표 4.4에는 100회 반복한 모의실험의 결과로부터 얻어진 각 추정치의 평균, 표준편차, bias, 그리고 MSE가 제시되었다. 모형과 표본의 크기에 관계없이 최우추정의 결과는 거의 신뢰할 수 없는 수준을 보여주고 있다. 이에 반해 상대적으로 베이지안 모수추정의 결과는 보다 우수하며 표본의 크기가 커짐에 따라 대체로 MSE는 줄어든다.

5. 결론

본 논문은 4-모수 감마분포에서 형태/멱모수 α , 멱모수 δ , 척도모수 β , 그리고 위치모

표 4.1: 4-모수 감마분포의 모수추정에 대한 모의실험 결과 (반복 100회, 표본의 크기 15)

모수	베이지안 추정				최우추정			
	평균	표준편차	bias	MSE	평균	표준편차	bias	MSE
$\alpha = 0.5$	0.5557	0.3190	0.0557	0.1039	4.6031	4.1609	4.1031	33.9751
$\beta = 1$	1.1409	0.2879	0.1409	0.1019	67.2055	94.7699	66.2055	1.3274e+04
$\gamma = 0$	0.0754	0.0533	0.0754	8.49e - 03	-41.6897	232.0653	-41.6897	5.5053e+04
$\delta = 2$	2.0028	1.1577	0.0028	1.3269	1.0799	0.5074	-0.9201	1.1014
$\alpha = 1$	1.0582	0.6072	0.0582	1.4848	3.7676	7.2959	2.7676	60.3576
$\beta = 1$	1.0444	0.3375	0.0444	0.1147	51013.7936	15291.2556	51012.7936	2.5683e+10
$\gamma = 0$	0.0650	0.0375	0.0650	5.6172e - 03	-12699.4893	37058.4092	-12699.4893	1.5208e+09
$\delta = 1$	1.2449	0.7248	0.2449	0.5801	16.2778	20.4348	15.2778	646.8149
$\alpha = 1$	1.2603	0.3233	0.2603	0.1712	8.8838	6.6864	7.8838	106.4156
$\beta = 1$	1.1375	0.2686	0.1375	0.0903	7.1275	19.1283	6.1275	399.7788
$\gamma = 0$	0.0895	0.0518	0.0895	0.0107	-8.0885	19.4921	-8.0885	441.5670
$\delta = 2$	2.0063	0.9563	0.0063	0.9054	7.8887	14.0022	5.8887	228.7790
$\alpha = 2$	1.9966	0.7503	-0.0044	0.5573	4.6031	4.1609	2.6031	23.9159
$\beta = 1$	1.2686	0.2877	0.2686	0.1541	67.2055	94.7699	66.2055	1.3274e+04
$\gamma = 0$	0.0596	0.0437	0.0596	5.4428e - 03	-41.6897	232.0653	-41.6897	5.5053e+04
$\delta = 0.5$	0.5996	0.3455	0.0996	0.1281	1.0799	0.5074	0.5799	0.5912
$\alpha = 3$	3.1752	0.7038	0.1752	0.5211	0.5264	0.2259	-2.4736	5.7619
$\beta = 50$	51.5395	1.5680	1.5395	4.8041	1.5395	494.2099	400.6685	4.0233e+05
$\gamma = 20$	21.3790	1.6331	1.3790	4.5420	47.7914	11.6368	27.7914	898.7494
$\delta = 1$	2.0613	0.9035	1.0613	1.9345	2.2985	1.4494	1.2985	3.7657

표 4.2: 4-모수 감마분포의 모수추정에 대한 모의실험 결과 (반복 100회, 표본의 크기 30)

모수	베이지안 추정				최우추정			
	평균	표준편차	bias	MSE	평균	표준편차	bias	MSE
$\alpha = 0.5$	0.5506	0.3176	0.0506	0.1024	4.0230	6.1858	3.5230	50.2930
$\beta = 1$	0.9163	0.2550	-0.0837	0.0714	3.4037	6.7222	2.4037	50.5139
$\gamma = 0$	0.0748	0.0438	0.0748	7.4943e - 03	-3.1322	7.4370	-3.1322	64.5666
$\delta = 2$	1.9993	0.0654	-0.0007	0.4237	24.3463	37.3198	22.3463	1878.1969
$\alpha = 1$	1.0542	0.2890	0.0542	0.0856	2.7746	5.0696	1.7746	28.5930
$\beta = 1$	1.0806	0.2116	0.0806	0.0508	2801.4762	27974.0315	2800.4762	7.8256e+08
$\gamma = 0$	0.0502	0.0289	0.0502	3.3469e - 03	-805.8380	8028.1796	-805.8380	6.4457e+07
$\delta = 1$	1.0020	0.2890	0.0020	0.0827	14.1580	20.1618	13.1580	575.5662
$\alpha = 1$	1.1555	0.2310	0.1555	0.0770	5.6687	6.4476	4.6687	62.9526
$\beta = 1$	0.9153	0.2794	-0.0847	0.0845	2.0500	4.7025	1.0500	22.9949
$\gamma = 0$	0.0751	0.0433	0.0751	7.4962e - 03	-2.0247	5.2048	-2.0247	30.9185
$\delta = 2$	2.0024	0.8972	0.0024	0.7898	4.3046	6.5593	2.3046	47.9054
$\alpha = 2$	2.0058	0.6538	0.0058	0.4232	9.5356	9.4929	7.5356	146.8037
$\beta = 1$	1.2695	0.2068	0.2695	0.1149	30.6931	30.6931	29.6931	1.8145e+03
$\gamma = 0$	0.0427	0.0407	0.0427	3.4639e - 03	-13.6883	27.2670	-13.6883	923.4240
$\delta = 0.5$	0.5673	0.2553	0.0673	0.0690	1.2365	1.3775	0.7365	2.4210
$\alpha = 3$	2.9344	0.6082	-0.0656	0.3705	0.5225	0.2708	-2.4775	6.2106
$\beta = 50$	50.4967	1.4445	0.4967	2.3138	215.5682	40.9213	165.5682	2.9071e+04
$\gamma = 20$	20.1530	1.4403	0.1530	2.0771	40.0315	8.5346	20.0315	473.3720
$\delta = 1$	1.9289	0.8932	0.0711	0.7948	2.3247	0.6202	1.3247	2.1356

표 4.3: 4-모수 감마분포의 모수추정에 대한 모의실험결과 (반복 100회, 표본의 크기 50)

모수	베이지안 추정				최우추정			
	평균	표준편차	bias	MSE	평균	표준편차	bias	MSE
$\alpha = 0.5$	0.5525	0.3481	0.0525	0.1227	2.2564	4.3120	1.7564	21.4922
$\beta = 1$	1.1753	0.1723	0.1753	0.0601	4.3852	7.8467	3.3852	72.4148
$\gamma = 0$	0.0803	0.0448	0.0803	$8.4351e - 03$	-3.5607	8.4778	-3.5607	83.8328
$\delta = 2$	2.1251	0.1193	0.1251	0.0297	37.1999	37.8738	35.1999	2659.1141
$\alpha = 1$	1.0479	0.1796	0.0479	0.0342	3.5553	5.8436	2.5553	40.3350
$\beta = 1$	1.0781	0.1705	0.0781	0.0349	3363.0461	33593.2560	3362.0461	$1.1285e + 09$
$\gamma = 0$	0.0492	0.0138	0.0492	$2.6092e - 03$	-957.8220	9549.4515	-957.8220	$9.1197e + 07$
$\delta = 1$	1.0053	0.2216	0.0053	0.0486	10.8832	16.8976	9.8833	380.3506
$\alpha = 1$	1.0932	0.1945	0.0932	0.0461	6.0028	68107	5.0028	70.9497
$\beta = 1$	1.0728	0.2753	0.0728	0.0803	2.7434	8.2457	1.7434	70.3511
$\gamma = 0$	0.0489	0.0470	0.0489	$4.5781e - 03$	-2.8643	9.1464	-2.8643	91.0251
$\delta = 2$	2.0042	0.7756	0.0042	0.5955	3.6014	6.5761	1.6014	45.3765
$\alpha = 2$	2.0053	0.6187	0.0053	0.3790	7.4960	7.4309	5.4960	84.8722
$\beta = 1$	1.1211	0.1939	0.1211	0.0519	36.5546	222.6209	35.5546	$5.0328e + 04$
$\gamma = 0$	0.0415	0.0463	0.0415	$3.8445e - 03$	-9.7534	22.4133	-9.7534	592.4625
$\delta = 0.5$	0.5315	0.1805	0.0315	0.0332	1.0813	1.1862	0.5813	1.7308
$\alpha = 3$	3.0595	0.4739	0.0595	0.2259	0.6325	0.1783	-2.3675	5.6362
$\beta = 50$	50.2800	1.0379	0.2800	1.1449	134.4235	248.2368	84.4235	$6.8132e + 04$
$\gamma = 20$	20.1277	1.0684	0.1277	1.1464	41.8602	7.0873	21.8602	527.0936
$\delta = 1$	1.5343	0.7379	0.5343	0.8245	1.3620	0.9216	0.3620	0.9719

표 4.4: 4-모수 감마분포의 모수추정에 대한 모의실험결과 (반복 100회, 표본의 크기 100)

모수	베이지안 추정				최우추정			
	평균	표준편차	bias	MSE	평균	표준편차	bias	MSE
$\alpha = 0.5$	0.5409	0.1768	0.0409	0.0326	2.4208	3.4579	1.9208	15.5271
$\beta = 1$	1.1203	0.1368	0.1203	0.0329	1.9316	4.8814	0.9316	24.4580
$\gamma = 0$	0.0769	0.0299	0.0769	$6.7987e - 03$	-1.4019	5.1633	-1.4019	28.3588
$\delta = 2$	2.1198	0.0758	0.1198	0.0200	13.5451	25.2993	11.5451	766.9437
$\alpha = 1$	1.0243	0.1321	0.0243	0.0179	3.6520	5.9347	2.6520	41.9013
$\beta = 1$	1.0155	0.1287	0.0155	0.0166	2.5664	4.2502	1.5664	20.3370
$\gamma = 0$	0.0291	0.0079	0.0291	$0.9086e - 03$	-2.0974	3.5637	-2.0974	16.9722
$\delta = 1$	2.0014	0.1390	0.0014	0.0191	7.3578	14.6988	6.3578	254.3152
$\alpha = 1$	1.0694	0.0981	0.0694	0.0143	3.0643	4.7437	2.0643	26.5392
$\beta = 1$	1.0548	0.1969	0.0548	0.0414	1.5385	4.8811	0.5385	23.8770
$\gamma = 0$	0.0433	0.0351	0.0433	$3.0946e - 03$	-0.9724	5.1112	-0.9724	26.8082
$\delta = 2$	2.0036	0.4693	0.0036	0.2181	2.9551	5.3788	0.9551	29.5542
$\alpha = 2$	2.0028	0.5768	0.0028	0.3294	7.7934	7.6812	5.7934	91.9737
$\beta = 1$	1.0803	0.1663	0.0803	0.0338	73.2996	375.6486	72.2966	144927.5474
$\gamma = 0$	0.0226	0.0356	0.0226	$1.7654e - 03$	-14.0721	40.6657	-14.0721	1835.1834
$\delta = 0.5$	0.5278	0.1778	0.0278	0.0321	0.9843	0.6344	0.4843	0.7956
$\alpha = 3$	3.0545	0.2479	0.0545	0.0638	0.6031	0.1609	-2.3969	5.7708
$\beta = 50$	50.1255	0.8652	0.1255	0.7568	67.2055	94.7699	17.2055	9187.5491
$\gamma = 20$	20.0578	0.9794	0.0578	0.9529	41.6897	7.0653	21.6897	519.8627
$\delta = 1$	1.2754	0.6401	0.2754	0.4815	1.0799	0.5074	0.0799	0.2612

수 γ 에 대해 무정보적 사전분포를 가정한 후, 킁스샘플링에 의해 모수를 추정하는 베이지안 절차를 제시하였다. 이때, 무정보적 사전분포가 부적절한 (improper) 분포이므로 결합 사후분포 (3.2)가 적절한 (proper) 분포임을 증명하는 것이 선결되어야 할 과제이다. 그러나 이에 대한 해석학적인 증명이 아직까지는 불가능하다. 한편, Tsionas (2001) 는 4-모수 감마분포의 경우 킁스샘플링이 사후분포로의 수렴을 보장하는 Roberts와 Smith (1994) 의 조건을 만족한다고 언급하였다.

각 모수를 추정하기 위한 킁스샘플러에서 척도모수 β 는 역감마 분포로부터 모수 생성을 할 수 있지만, 형태/멱모수 α 와 멱모수 δ 의 조건부 사후분포가 로그-오목함수이므로 ARS 알고리즘을 이용하여 모수를 생성하였고, 위치모수 γ 의 조건부 사후분포는 로그-오목함수가 아니므로 ARMS 알고리즘을 이용하여 모수를 생성하였다.

본 논문에서는 제안한 베이지안 모수추정 절차의 타당성을 검토하기 위하여 5개의 제한된 모형에 대한 모의 실험을 수행하였고 그 결과는 기존의 최우추정 결과보다 우수하였다. 최우추정은 많은 경우에서 해가 구해지지 않았고 구해지더라도 거의 신뢰할 수 없을 정도의 오차를 가지고 있었다.

향후의 심층연구에서는 다양한 조합의 4개 모수를 가지는 4-모수 감마분포에 대한 모의 실험을 통하여 베이지안추정결과를 조명해보고 또한 킁스샘플러의 세부적인 옵션의 변화에 따른 추정결과를 비교분석해 볼 필요가 있다고 생각한다.

참고문헌

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972). *Polygamma Functions*. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graph, and Mathematical Tables, 9th printing, Dover, New York.
- Bowman, K. O. and Shenton, L. R. (1988). *Properties of Estimators for the Gamma Distribution*. Marcel Dekker, New York.
- Cohen, A. C. and Norgaard, N. J. (1977). Progressively censored sampling in the three-parameter gamma distribution. *Technometrics*, **19**, 333–340.
- Cohen, A. C. and Whitten, B. J. (1982). Modified moment and maximum likelihood estimators for parameters of the three-parameter gamma distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **11**, 197–216.
- Cohen, A. C. and Whitten, B. J. (1986). Modified moment estimation for the three-parameter gamma distribution. *Journal of Quality Technology*, **18**, 53–62.
- Gilks, W. R., Best, N. G. and Tan, K. K. C. (1995). Adaptive rejection Metropolis sampling within Gibbs sampling. *Applied Statistics*, **44**, 455–472.
- Gilks, W. R. and Wild, P. (1992). Adaptive rejection sampling for Gibbs sampling. *Applied Statistics*, **41**, 337–348.
- Greenwood, J. A. and Durand, D. (1960). Aids for fitting the gamma distribution by maximum likelihood. *Technometrics*, **2**, 55–65.
- Hager, H. W. and Bain, L. J. (1970). Inferential procedures for the generalized gamma distribution. *Journal of the American Statistical Association*, **65**, 1601–1609.
- Hager, H. W., Bain, L. J. and Antle, C. E. (1971). Reliability estimation for the generalized gamma distribution and robustness of the Weibull model. *Technometrics*,

- 13, 547–557.
- Harter, H. L. (1967). Maximum-likelihood estimation of the parameters of a four-parameter generalized gamma population from complete and censored samples. *Technometrics*, **9**, 159–165.
- Harter, H. L. and Moore, A. H. (1965). Maximum-likelihood estimation of the parameters of gamma and Weibull populations from complete and from censored samples. *Technometrics*, **7**, 639–643.
- Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970). *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1*. John Wiley & Sons, New York.
- Lawless, J. F. (1980). Inference in the generalized gamma and log gamma distributions. *Technometrics*, **22**, 409–419.
- Parr, V. B. and Webster, J. T. (1965). A method for the discriminating between failure density functions used in reliability predictions. *Technometrics*, **7**, 1–10.
- Pang, W. K., Hou, S. H., Yu, B. W. T. and Li, K. W. K. (2004). A simulation based approach to the parameter estimation for the three-parameter gamma distribution. *European Journal of Operational Research*, **155**, 675–682.
- Prentice, R. L. (1974). A log gamma model and its maximum likelihood estimation. *Biometrika*, **61**, 539–544.
- Ripley, B. D. (1988). *Stochastic Simulation*. John Wiley & Sons, New York.
- Ritter, C. and Tanner, M. A. (1992). Facilitating the Gibbs sampler: the Gibbs stopper and the griddy-Gibbs sampler. *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 861–868.
- Roberts, G. O. and Smith, A. F. M. (1994). Simple conditions for the convergence of the Gibbs sampler and Metropolis-Hastings algorithms. *Stochastic Processes and their Applications*, **49**, 207–216.
- Son, Y. S and Oh, M. (2006). Bayesian estimation of the two-parameter gamma distribution. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **35**, 285–293.
- Stacy, E. W. (1973). Quasimaximum likelihood estimators for two-parameter gamma distributions. *IBM Journal of Research and Development*, **17**, 115–124.
- Stacy, E. W. and Mihran, G. A. (1965). Parameter estimation for a generalized gamma distribution. *Technometrics*, **7**, 349–358.
- The MathWorks Inc. (2002). MATLAB/Statistics Toolbox, Version 6.5. Natick, MA.
- Thom, H. C. S. (1958). A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review*, **86**, 117–122.
- Tsionas, E. G. (2001). Exact inference in four-parameter generalized gamma distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **30**, 747–756.

[Received January 2007, Accepted March 2007]