대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.1, 161-180. Mar. 2007

수학 영재의 추상화 학습에서 기호의 의미 작용 과정 사례 분석[1)]

송 상 헌*, 신 은 주**

본 연구는 한 명의 초등학교 수준의 수학영재가 「Nim 게임의 조건 변경」이라는 주어진 과제의 해법을 추상화할 때 보여주는 기호의 의미 작용 과정을 분석하고 이를 바탕으로 수학영재교육을 위한 적절한 지도방안을 제안하는 것을 목적으로 한다. 관찰과 면담의 질적 연구방법으로 수집한 사례를 분석한 결과, 초등학교 수준의 수학영재는 일반적 수준의 추상화에서 구성한 대상체의 의미를 협상해가면서 해석체와 표현체를 구성하는 능력은 우수함을 확인하였다. 그러나 영재아라도 일반적 수준의 추상화에서 형식적 수준의 추상화로 수준이 상승되는 과정에서는 어려움을 겪고 있었다. 여기에 적절한 지도 조언을 통해 일반적 수준에서 스스로 구성한 표현체의 해석체를 구성할 수 있을 때 비로소 형식적 수준으로 상승하고, 또 형식적 수준과 일반적 수준이 연결된 관계망을 구성할 수 있음을 확인하였다. 그리고 초등수준의 수학영재들에게 기호의 의미 작용 과정을 돕는 3가지의 지도방안을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

최근 수학교육에서는 기호의 의미에 관한 문제를 수학 학습의 한 가지 핵심 문제로 고려하여, 수학 학습을 자신이 만든 수학적 표현 또는 수학적 기호에 대해 의사소통하는 과정으로 설명하는 이론들이 강조되고 있다(Bakker & Hoffmann, 2005; Otte, 2006: Presmeg, 2006). 또한 기호의 의미작용(signification) 과정에서 기호와 기호의 의미가 동시에 반사적으로 발달된다는 점이 강조된다(Gravemeijer, et al, 2000). 이처럼 수학적 기호를 만들고 기호의 의미를 협상하는 과정은 수학적 대상을 추상화하는 하는 과정과 밀접하게 연관된다.

여러 연구자들(Greeno, 1997; Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Hoyles, Noss & Pozzi, 1999)은 추상화를 탈맥락화 과정으로 고려하는 관점에 대한 비판을 제기하였다. Noss와 Hoyles (1996)는 구체와 추상이 연결되는 과정을 '망(webbing)'으로 정의하였다. Hoyles, Noss와 Pozzi (1999)에 의하면, 구체와 추상은 동전의 양면으로서, 추상화는 탈맥락화를 의미하는 것이 아니라 구조화되지 않은 지식 망에서 시작하여 연결되고 구조화된 지식 망으로 발달되는 과정이다. Hershkowitz, Schwarz와 Dreyfus(2001)는 추상의 발생모델을 '역동적으로 포개어지는(nesting) 인식론적 행동'으로 설명하였다. 추상화와 기호화의 관련성 측면에서 살펴보면, Döfler(1991)는 기호가 과정과 대상의 양면성을 가지면서 추상화 과정에서 객관적 실체가 되는 과정을 '구성적 추상화'로 정의하였다. Bakker & Hoffmann(2005)

* 경인교육대학교(shsong@ginue.ac.kr)
** 경인교육대학교(산학협력단 전임연구원, eunjushin@dreamwiz.com)
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

는 Peirce의 기호학 틀을 기반으로 하여 대상의 어떤 특징이 다시 대상이 되는 과정을 '실재적 추상화(hypo-static abstraction)' 로 설명하였다. Presmeg(2006)은 Peirce의 모델에 기반을 두고 기호화를 서로 포개어지는 관계망의 구성 과정으로 설명하고 있다.

이상에서 알 수 있듯이 추상화 과정을 구체에서 추상으로 선형적인 위계가 존재하는 탈맥락화로 설명하는 관점이 지양되고 구체와 추상이 관계망 모델을 형성하는 과정에서 구성된 기호가 과정과 대상의 양면성을 가지는 실체로서 간주되고 있다. 추상화 과정에서 기호의 의미를 제대로 구성하지 못하는 학생의 사고는 보다 높은 추상화 수준으로 상승하지 못할 수도 있다. 그리고 그 학생은 수학이 실제와 분리된 무의미한 기호를 조작하는 학문으로 인식할 수도 있다. 이러한 점을 고려하여 본 연구에서는 추상화에 대한 관계망 모델에 기반을 두고 추상화 과정에서 과정과 대상의 양면성을 가진 기호가 개발되고 그 의미가 구성되는 과정을 구체적인 사례를 통해 분석하고자 한다.

본 연구의 내용을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 초등수준의 수학영재가 NIM 게임의 조건 변경이라는 주어진 과제의 해법을 추상화할 때 나타나는 기호의 의미 작용 과정을 분석한다.

둘째, 초등수준의 수학영재들이 추상화에서 기호의 의미 작용 과정을 돕는 지도 방안을 제안한다.

II. 이론적 배경

1. 수학 학습에서 추상화

구체에서 추상으로 선형적인 위계가 존재한다고 보는 관점에서 추상화는 한 세계에서 다른 세계로 의미를 사상(mapping)하는 과정으로서, 실세계를 참조하는 것에서 이탈하여 형식적인 세계로 향하는 탈맥락화 과정이다(Noss & Hoyles, 1996). 인지심리학자들은 추상화를 탈맥락화 과정으로 간주하였으므로 추상화 과정에서 한 수준에 있는 대상이 더 높은 수준에 있는 대상으로 위계적으로 발달한다고 설명한다. 인지심리학자들은 추상화에 영향을 주는 맥락을 외적인 요인으로 고려하였으므로 비평을 받아왔다. 수학적 사고는 사회적 맥락과 분리될 수 없고, 구체와 추상은 분리된 실체가 아니라 추상화 과정에서 연결되기 때문이다(Hershkowitz, Schwarz, & Dreyfus, 2001).

추상화를 탈맥락화 과정으로 보는 관점에 대하여 제기된 비판은 탈맥락화 결과 구성된 표현을 의미 없는 구조로 보는 Goldin(2002)의 관점과 같은 맥락에서 논의될 수 있다. Goldin에 의하면, 탈맥락화로 구성된 표현은 의미와 연결되지 않는 형식적인 체계로서 맥락에서 벗어나 수학을 추상화하자는 의도에서 만들어진 것이다. 따라서 이러한 표현은 의미 없는 구조로서, 형식적인 수학표기와 절차나 규칙 또는 맥락이 없는 규칙과 방법을 의미한다. 그러나 추상화는 맥락과 의미론적으로 연결되면서 새로운 체계로 구조적으로 발달되는 과정으로서, 맥락에 있는 추상은 형식적이고 추상적인 수학의 반대가 아니며 추상화와 맥락화는 상호 보완적인 표현 과정이 된다.

여러 연구자들은 추상화를 탈맥락화 과정으로 고려하는 관점에 대한 비판을 제기하고 있다. Greeno(1997)는 환경의 역할을 무시하고 추상화를 정신활동으로만 고려하는 시각을 비판하고, Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus(2001)는 추상화를 도구와의 상호작용이나 사회적 상호작용을 무시하는 정신활동으로 고려하거나 추

상을 참조에서 분리된 것으로 간주하는 관점을 비판한다. 그들에 의하면, 추상화란 이미 구성된 수학을 새로운 수학적 구조로 재조직하는 활동이다. 새로운 구조로 재조직하는 활동에는 새로운 가설을 세우거나 수학적 일반화나 증명을 하는 활동이 포함되며, 경험적 사고와 이론적 사고가 모두 필요하다.

Noss, Hoyles와 Pozzi(2002)에 의하면, 구체와 추상은 동전의 양면으로서, 추상화는 탈맥락화를 의미하는 것이 아니라 구조화되지 않은 지식 망에서 시작하여 연결되고 구조화된 지식 망으로 발달되는 과정이다. 또한 van Oers(1998)에 의하면, 탈맥락화는 사고와 학습의 유의미한 과정을 설명하지 못하므로 탈맥락화 보다는 재맥락화로 설명해야 한다. 이 때, 재맥락화란 새로운 방법으로 어떤 것을 맥락화 하는 능력이다. 추상화를 이상화(idealization)로 정의한 Davis, Hersh와 Marchisotto(1995)에 의하면, 추상화는 물리적 세계에 있는 실제적인 대상을 수학적 세계에 있는 이상적 대상으로 이상화하는 과정, 곧 모델을 세우는 과정이다. 이 때, 복잡한 물리적 조건을 이상화하면서 실제적인 것과 이상적인 것이 연결된다. Heymann(2003)에 의하면, 추상화란 연역적으로 학습될 수 없고 새로 학습될 개념을 다루는 다양한 경험, 개념의 응용, 사전 지식이 서로 연결될 때 학습될 수 있는 것이다.

추상화에 관한 선행 연구들에서는 수학 학습-지도 이론에서 인지를 설명하는 기반으로 위계모델을 사용하기보다 관계 망 모델을 사용하고 있다. Hershkowitz, Schwarz와 Dreyfus(2001)는 구성하기(constructing), 구조를 인식하기(recognizing), 구조를 세우기(building with)라는 세 가지 역동적으로 포개어지는(nesting) 인식론적 행동으로 추상의 발생모델을 설명하고 있다. Noss와 Hoyles가 '망(webbing)'이라는 은유를 도입하여 망 사이를 연결하면서 이전에 행한 유사한 활동과 연결하여 새로운 수학적 지식을 구성해 나가는 과정을 설명한 것과 같은 시각이다. 구성하기는 새로운 방법과 전략과 개념을 구성하는 단계로서, 이 단계에서 지식을 재조직하고 새로운 지식을 표현하고 사용하게 된다. 그 후에 상황에 구조가 내재되어 있음을 깨닫게 될 때 수학적 구조를 인식하게 된다. 마지막으로 구조를 세우는 활동에서 유용한 구조적 지식을 사용하여 문제를 해결하게 된다. 이러한 세 가지 인식론적 행동은 분리된 단계에 따라 선형적으로 진행되는 것이 아니라 서로 관계되고 포개어지면서 역동적인 망을 형성하는 과정을 거치면서 발달된다. 이미 존재하는 구조를 인식하고 구조를 세우는 활동이 변증법적으로 포개어지면서 새로운 추상적 실재가 구성된다.

추상화에 대한 이상의 논의는 Noss와 Hoyles(1996)의 추상화에 대한 견해를 검토해보면 구체화 될 수 있다. Noss와 Hoyles에 의하면, 구체에서 추상으로 선형적인 위계가 존재한다고 볼 때, 수학 활동과 일상 경험적인 활동이 분리된 것으로 고려되어 수학적 사고는 추상적인 것인 반면, 일상 경험적 사고는 구체적인 것으로 이분된다. 그러나 추상화란 상황에서 이탈하여 한 의미가 다른 것으로 대치되는 과정이 아니라 상황에서 발생하여 발달하며, 의미가 서로 중첩되고, 관계망을 형성하면서 상황 내에서 구조와 관계를 조직하는 과정이다. 상황적 추상화는 활동에서 발달되는 과정이고 활동의 자원으로서 그 자체가 과정일 뿐 아니라 대상으로 고려된다. 결과적으로 상황적 추상화는 상황의 경계를 넘어선 일반화를 의미하는 것이 아니라 다른 환경, 다른 표기체계, 다른 의미가 관계망을 형성하면서 서로 연결된다는 점을 강조하기 위하여 도입된 것이다.

상황적 추상화는 상황과의 연결성을 강조하여 상황에서 발생한 추상으로서, 상황의 근방에 추상이 위치하게 된다. 상황의 근방이란 탈맥락화는 학생들의 학습 궤도를 이해하는데 있어서 유용하지 않은 관점이므로 상황에서 단절이 아니라 상황을 넓혀야 한다는 점을 함의한다. 상황적 추상화가 발생되기 위한 조건을 확인하고자 할 때, 상황의 근방이 가진 특징을 인식하는 것이 도움이 된다. Noss와 Hoyles가 설명한 상황적 추상화에서는 개념 사이의 연결, 개념들의 관계, 개념이 추상될 수 있는 대상이 중요시된다. 따라서 상황적 추상화는 학습을 사회 문화적 맥락에서 해석하는 것을 가능하게 할 뿐 아니라 인지발달을 설명할 수 있는 틀을 제공한다(Pratt & Noss, 2002).

이상에서 살펴본 바와 같이 추상화 과정은 탈맥락화 과정이 아니라 실세계 맥락에서 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 수학의 세계로 맥락을 재조직하는 과정이다. 또한 구체에서 이탈하여 추상을 향하여 위계가 분명한 절차에 의해서 수행되는 활동이 아니라 맥락과 계속적으로 상호작용 하는 과정에서 상황적 추상화를 거쳐 구체와 추상의 연결된 관계망을 확장해 나가는 활동이라고 볼 수 있다. 이러한 점에 기반을 두고 본 연구에서는 추상화 과정을 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준으로 구분하고 각 수준이 선형적으로 상승하는 것이 아니라 구체와 추상이 서로 포개어지면서 연결된 관계 망을 형성하는 과정에서 추상화가 구성된다고 보고자 한다. 상황적 수준에서 학생들은 실제적인 과제 상황에서 활동하면서 과제를 이해하기 위하여 상황적 지식을 사용한다. 참조적 수준에서 학생들은 실제적인 상황을 기반으로 하여 상황적 지식을 추상화한다. 일반적 수준에서 학생들은 수학적인 전략을 사용하여 일반적인 수학적 표현을 개발한다. 형식적 수준에서 학생들은 형식적인 수학적 표현을 개발한다.

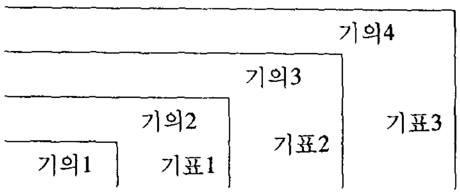
2. 추상화에서 기호의 의미 작용 과정

Dreyfus(1991)에 의하면, 추상화는 수학적 대상들의 성질과 대상 사이의 관계로부터 정신적 구조를 형성하는 구성적 과정이다. 이 과정은 성질과 관계를 추출해냄으로써 가능해지며, 대상 자체로부터 대상 사이의 성질과 관계들의 구조로 관심을 끌어올리는 능력이 필요하다. 기호학적 관점에서 구성적 추상화를 설명한 Döfler(1991)에 의하면, 기호화와 추상화 과정은 상호 연결되고, 구성적 추상화 과정은 기호를 대상인 변수로 고려하는 시점에서 이루어진다. 기호화는 행동 요소를 변형하거나 결합하는데 기호를 도입하는 과정으로서, 기호를 사용하여 불변성을 표현하고 행동의 원형적인 요소를 기호로 대치하는 과정이다. 그 후에 성질과 관계가 대상에서 어느 정도 분리되어 독립성을 갖게 되는 과정인 추상화가 진행된다. 그 후에 기호의 대상화 과정에서 기호는 대표성의 성질을 잃고 행동의 추상적 관계를 수반하는 독립적인 대상이 된다. 마지막으로 변수의 도입 과정에서 기호는 대상인 변수로서 추상적인 관계로 표현되고 참조물을 대표하지 않는다. 관계 체계 전체가 변화 가능한 것이 되고 이 변화 가능성이 대상으로서의 성질을 얻게 된다.

이상에서 알 수 있듯이 기호화 과정에서 기호의 불변성이 표현된 후에 추상화가 이루어지고 나서 기호가 독립적인 대상이 되는 것이다. 따라서 추상화 과정에서 기호는 과정과 대상으로서 양면성을 지니면서 존재성을 얻게 되고, 기호의 의미 작용 과정에서 기호와 기호의 의미가 동시에 반사적으로 발달된다는 점이 강조된다. 이러한 점을 고려하여 다음에는 기호에

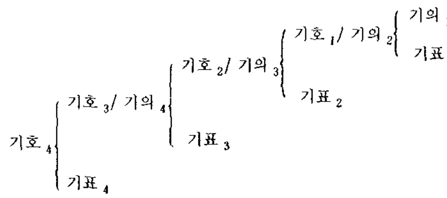
대한 다양한 관점을 살펴보고자 한다. 추상화와 기호화가 서로 연관되며, 특히 본 연구에서는 추상화 과정에서 기호의 의미 작용을 분석하고자 하므로 기호학의 관점을 살펴보는 것이 이론적 기반이 되기 때문이다.

기호학의 두 가지 관점을 살펴보면, Saussure는 기호를 기표(signifier)와 기의(signified)로 구성된 이원적 구조로 설명하고, Peirce는 기호를 대상체(referents), 표현체 (representamen), 해석체(interpretant)라는 삼원적 구조로 구성된다고 보고 있다. Lacan은 Saussure의 기표와 기의라는 이원적 구조로 기호의 의미 작용 체인을 설명한 모델에 기반을 두고 [그림II-1]과 같이 설명하고 있다. 이 모델에서는 앞 체인에서 만들어진 기표가 다음 체인에서 기의가 된다. 이와 같이 기호가 다른 기호를 의미하는 과정을 Lacan은 기호의 의미 작용(signification)이라고 설명하였다(Presmeg, 2006, pp.166-167에서 재인용).



[그림 II-1] 기표와 기의의 의미 작용 체인(Presmeg, 2006)

기표와 기의의 의미 작용 체인에서는 기의와 기표 사이의 의미론적 관계가 고려되며 체인이 구성되면서 기호의 의미가 발달된다는 점을 알 수 있다. Walkerdine(1988)에 의하면 기표와 기의의 조합으로 기호를 만들게 되며, 이 때 기호가 개발되면서 체인이 구성되고 다시 기호의 의미가 계속 개발되어 간다. 한 실행에서 시작하는 기의$_1$은 기표$_1$과의 조합으로 기호$_1$을 만들고, 기호$_1$은 계속되는 다른 실행에서 기표$_2$와의 조합으로 기호$_2$를 만들게 된다. 기호화는 수학적 실제의 발생에서 중요한 역할을 한다는 점을 고려하여 위 모델을 변형하여 Cobb(2002)은 [그림 II-2]와 같은 기표와 기의의 의미 작용 체인을 구성하였다. 이 모델에서 새로 만들어진 기표와 기의로 구성된 새 기호가 이전 체인에서 만들어진 모든 기표와 기호로 구성된다.



[그림 II-2] 기표와 기의의 의미 작용 체인

이 체인에서도 알 수 있듯이 기의와 기표의 절대적인 분리가 아니라 상호 연결되는 과정에서 기호가 만들어지는 과정이 설명된다. Otte (2006)에 의하면, 모든 수학 활동은 수학적 실체를 표현하는 것과 관련된 것으로서, 한 표현을 다른 표현으로 계속적으로 변형하는 과정이다. 그 과정에서 만들어지는 기호와 대상 사이에 절대적인 분리는 존재하지 않으며 기호는 의미를 가지고 대상을 참조하게 된다. 그 후에 기호의 의미를 전달하기위해 지각 가능한 다른 것으로 변형하는 과정이 일어난다. 결과적으로 실제적 존재를 표현하는 대상과 의미를 가지는 기호라는 두 가지 실체의 상호작용으로 수학 활동이 구성된다.

Peirce의 기호론에서 기호는 대상체, 표현체, 해석체의 삼원적 관계로 설명된다. 기호가 지시하는 것이 대상체이며, 감각을 통하여 얻을 수 있는 표현으로 기호를 나타낸 것이 표현체이고, 기호를 만드는 관념이나 기호에 의해 떠오르는 생각이 해석체이다. 하나의 기호는 하나의 대상체와 상관관계를 이루거나 대상체를

표상해야 할 뿐 아니라 하나의 해석체를 규정해야 한다. 해석체는 본래의 기호를 번역하고 발전시키는 기호로서, 하나의 기호는 다른 해석 주체에게 다르거나 더 발달된 기호들을 창조할 수 있는 능력을 갖는다. 기호는 대상체를 지시하기 위해 기호의 해석체를 규정하는 것이고, 이와 동일한 방식으로 해석체는 그것의 대상체를 지시한다. 이와 같이 해석체가 다시 기호가 되고 이 같은 과정이 끊임없이 진행되는 과정이 기호의 의미 작용이다(김성도, 2006).

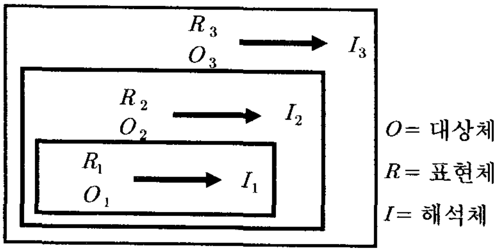
기호의 의미 작용 과정에서 해석체에 의해 기호의 의미가 만들어지는 과정이 강조되고 있다. Whitson(1997)에 의하면, 기호의 의미는 고정된 것이 아니라 해석체에 열려 있는 것이므로 대상체도 다른 기호 즉 표현체로 표현될 수 있고, 기호가 다른 방법으로 표현될 수도 있다. 그러므로 기호화 활동은 기호의 열(series), 망(web), 관계망(network) 내에서 일어나는 것으로서 그 안에서 기호의 중재를 통하여 해석체가 대상체에 반응하게 된다. Bakker & Hoffmann (2005)에 의하면, Peirce의 삼원론은 교실에서 일어나는 의사소통 과정을 비선형 해석인 과정으로 간주하여 표현체와 해석체의 관계망이 구성되는 기호화 공간이 구성되는 과정이 중요시된다. Bakker & Hoffmann은 Peirce의 기호학 틀을 기반으로 하여 대상의 어떤 특징이 다시 대상이 되는 과정을 실재적 추상화(hypostatic abstraction)로 설명하였다. 다이어그램 추론은 실재적 추상화를 형성하는 기반이 되는 것으로서, 예를 들어, 다이어그램의 일부가 새로운 대상으로서 인식될 때 실재적 추상화가 일어나서 점이나 형태라는 용어를 학습할 수 있고, 이들은 또 다른 더 발달된 그림의 수단으로서 사용될 수 있다. 결국, 추상적 개념을 학습한다는 것은 실재적 추상화 과정에서 새로운 대상을 만들어내는 것을 의미한다.

이상에서 논의한 바와 같이 추상화 과정에서 기호가 과정과 대상의 양면성을 지니면서 그 의미가 발달되어 가고, 대상체, 해석체, 표현체의 관계망이 구성되어 간다는 점을 알 수 있다. 기호의 의미가 협상되고 새로운 실체로서의 기호가 구성되는 과정을 관계망 모델로 고려하는 관점은 앞 장에서 추상화를 관계망이나 포개어지는 모델로 설명한 이론과 같은 관점과 같은 맥락이다. 대상체, 해석체, 표현체가 서로의 역동적인 관계에 의해 존재하며 대상체와 표현체를 연결하는 과정이 수학적 추상화이다.

Presmeg(2006)은 기표와 기의의 상호작용으로 기호화가 선형적으로 구성되는 과정에 의해서가 아니라 Peirce의 모델에 기반을 두고 기호화를 서로 포개어지는 관계망의 구성 과정으로 설명하고 있다. 기호의 의미 작용 과정이 한 수준에서 대상체, 표현체, 해석체의 상호작용으로 구성된 기호가 더 높은 수준에서 대상체가 되면서 더 높은 수준의 대상체 아래로 포개어지는 모델(nesting model)로 설명된다. 이 모델은 [그림 II-3]에서와 같이 도식화 될 수 있다.

이 모델에 따르면 대상체와 표현체의 관계를 이해한 결과 의미가 만들어지며 해석체가 이 의미를 만드는 과정을 가능하게 한다. 화살표가 의미를 만드는 과정인 해석체에 해당되는 것으로, 해석체는 담화를 통해 의미를 협상하는 과정을 포함하는 것이다. 이 모델은 의미를 협상하는 과정을 다음 대상체의 실체화에 필수적인 과정으로서 중요시하며, 또한 이 과정이 각 기호에 포함된 관계를 해석하는 과정의 필수 부분으로 보고 있다. Presmeg는 선형적인 기호화 체인은 기호의 의미를 만들어가는 과정의 복잡성을 설명할 수 없다고 지적하면서 해석의 과정을 고려하는 Peirce의 모델을 변형한 포개지는 모델로 기호의 의미 작용 과정을 설명한 것이다. 대상체1, 표현체1, 해석체1이라는 세

가지 요소로 구성된 기호1이 다음 체인에서 대상체2가 된다. 이러한 과정이 반복되면서 기호의 체인이 구성되며 모델에서 각 사각형이 기호1, 기호2, 기호3을 나타낸다. 이 모델은 앞장에서 서로 포개어지는 관계망의 연결로 추상화 과정을 설명하고 있는 이론들과도 일맥상통한 것이다. 따라서 서로 포개어지는 관계망을 형성하는 추상화 과정에서 기호의 의미 작용 과정을 분석함으로써 학생들이 수학 학습에서 기호를 구성하고 해석하는 방법과 과정을 이해할 수 있을 것이다.



[그림 II-3] Pesmeg의 기호의 의미 작용 모델

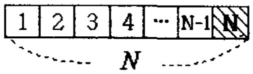
III. 연구의 방법 및 절차

1. 과제의 개발

본 연구를 위한 과제는 송상헌 외 5인(2007)에서 주어진 문제를 수준별로 범주화하기 위해 NIM 게임이라는 도구를 활용하여 개발한 것이다. 이 과제는 추상화의 수준이 상승되면서 해법을 기호화하는 과정을 반영하고 있기에 본 연구문제인 추상화 과정에서 기호의 의미작용 과정을 밝히기에 용이하다. 여기서는 과제로 제시한 활동지 대신에 그 수준별 과제의 해법을 요약하여 소개한다.

가. 문제 수준1인 (N : k) NIM 게임의 필승전략

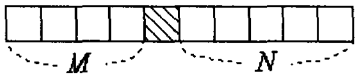
주어진 큐브의 전체 개수가 N, 각 사람이 한 번에 가져갈 수 있는 최대 개수는 k이고 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다고 할 때, $N=(k+1)Q+r$라는 식을 얻는다. 만약 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 진다고 할 때는 $N-1$번째의 큐브를 가져가는 사람이 이기는 경우와 같으므로 $N-1=(k+1)Q+r$라는 식을 얻는다.

	
(1) $r>0$: 先手필승전략 있음. 필승수= r.	(2) $r=0$: 後手필승전략 있음.
先手가 r개만큼 가져가고, 그 뒤부터는 상대가 가져간 개수(l)와 내가 가져갈 개수(m)에 대하여 $l+m=k+1$을 유지한다.	先手가 가져갈 개수가 없으므로, 먼저 상대방이 가져가도록 하여 $N'=(k+1)Q'+r'$ ($r'>0$)인 상황을 만든 뒤 r'개만큼 가져간다.

나. 문제 수준 2인 (M, N : k) NIM 게임에서의 필승전략

두 방향으로 주어진 큐브의 개수가 M, N, 각 사람이 한 번에 가져갈 수 있는 최대 개수는 k이고 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 진다고 할 때, $|M-N|=(k+1)Q+r$라는 식을 얻는다. 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다면 가운데 검은색 큐브까지 포함하면 된다.[2]

2) 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다면 마지막 큐브를 포함하고, 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 진다 그 마지막 큐브를 빼고 생각하면 되므로 이 둘은 결국 동형이다.



(1) $r>0$: 선수필승전략 있음. 필승수= r.	(2) $r=0$: 후수필승전략 있음.
선수가 r개만큼 가져가고, 후수로부터 넘겨받은 양쪽의 개수의 차이에 대하여 $\lvert M'-N'\rvert=(k+1)Q'+r'$의 r'개씩 가져간다. 어느 한 쪽이 모두 없어지면 1-방향 게임과 동일하게 된다.	먼저 상대방이 가져가도록 하여 $\lvert M'-N'\rvert=(k+1)Q'+r'$ $(r'>0)$인 상황을 만든 뒤 $r>0$인 경우의 해법대로 해결한다.

다. 문제 수준 3인 $(N_1, \cdots, N_p : k)$ NIM 게임의 필승전략

p 방향 이상일 때는 어느 한 방향의 큐브 개수가 $(k+1)$의 배수이면 $p-1$방향 NIM 게임과 같아진다. 각 방향의 개수들의 차를 $(k+1)$로 나눈 나머지들만 생각하면 된다. 이는 결국 $(1, 2, \cdots, k-1 : \infty)$ NIM 게임을 해결하는 것과 동형이 된다. 그러나 초등학생들에게 유한개를 가져가는 경우와 무한개를 가져가는 경우는 해법의 구조가 다르게 느껴질 수밖에 없다. 따라서 대부분의 초등학생들은 이 3수준의 문제를 넘어서지 못한다.

라. 문제 수준 4인 $(L, M, N : \infty)$ NIM 게임의 필승전략

한 사람이 가져갈 수 있는 개수에 제한이 없는 경우 두 방향일 때는 양쪽에 같은 개수가 있도록 먼저 만들어 상대방에게 넘겨주는 사람이 이긴다. 즉, $\lvert M-N\rvert=r$에서 $r\neq 0$ 인 경우는 선수필승(필승수= r)이고, $r=0$ 인 경우는 후수필승이다. 따라서 3방향 이상일 때부터 게임으로서 의미가 있다. 주어진 큐브가 p 방향일 때, 어느 한 방향의 큐브를 모두 가져가면 $p-1$방향의 해법과 동일하다. 또 어느 두 방향에 있는 큐브의 개수가 똑같다면 그 두 방향은 생각할 필요가 없다. 따라서 모든 방향으로 다른 개수를 두면서 어느 한 방향으로는 적어도 1개를 남겨두어야 한다. 예를 들어, $(3,4,5:\infty)$ NIM 게임을 생각하면, 먼저 (1, 2, 3) 또는 (1, 4, 5)를 상대방에게 넘겨주는 사람이 이긴다. 이를 위해서는 두 사람이 번갈아가며 가져갈 수 있어야 하고 또 모든 수를 표현할 수 있어야 하므로 이진법을 생각할 수 있다. 이 중 어떤 수를 변화시키든지 결국은 자신이 마지막의 큐브를 가져가면서 각 방향에 있는 큐브의 개수가 이진법의 각 자리값들의 합이 $000_{(2)}$이 되도록 상대방에게 넘겨주는 사람이 이긴다. 예를 들어, $(3,5,7)$게임에서는 $(2,5,7)$, $(3,4,7)$ 또는 $(3,5,6)$과 같이 상대방에게 넘겨주면 이긴다.[3]

$1=001_{(2)}$
$4=100_{(2)}$
$5=101_{(2)}$ ⇒ 상대방의 선택 ⇒ $1=001_{(2)}$, $2=010_{(2)}$, $3=011_{(2)}$
$\#=000_{(2)}$ $\#=000_{(2)}$

$3=011_{(2)}$
$5=101_{(2)}$
$7=111_{(2)}$ ⇒ $2=010_{(2)}$, $5=101_{(2)}$, $7=111_{(2)}$, / $3=011_{(2)}$, $4=100_{(2)}$, $7=111_{(2)}$, / $3=011_{(2)}$, $5=101_{(2)}$, $6=110_{(2)}$
$\#=001_{(2)}$ $\#=000_{(2)}$ $\#=000_{(2)}$ $\#=000_{(2)}$

2. 연구 대상자

본 연구의 대상자는 경기도에 거주하는 초등학교 학생들 중 학교장의 추천을 받아 해당 학

3) 보다 일반적인 해법은 이향훈(2007)을 참조.

년별 수학문제해결력검사(1차)와 학년 통합의 창의적문제해결력검사(2차), 그리고 지도교수의 구술면접(3차)을 거쳐 선발된 A대학교부설 과학영재교육원의 초등수학 심화반에 속한 가장 우수한 학생 중 한 명이다. 이 심화반은 경기도에 거주하는 학생들 중 가장 우수한 집단으로 볼 수 있으며 또래 연령에서 인원 구성비율로는 상위 0.01%의 수준이다. 이 중 연구대상자(YS)는 중간 이상의 성취도를 보이는 남학생이며, 다음 해에는 동일한 과학영재교육원 소속의 중등수학 과정으로도 진급했다. BH는 그와 함께 게임을 위한 짝 활동을 했던 학생일 뿐 분석의 대상자는 아니다. 전체 수업 진행자로서의 연구자(TR)와 조별관찰자로서의 연구자(INT)가 참여하였다.

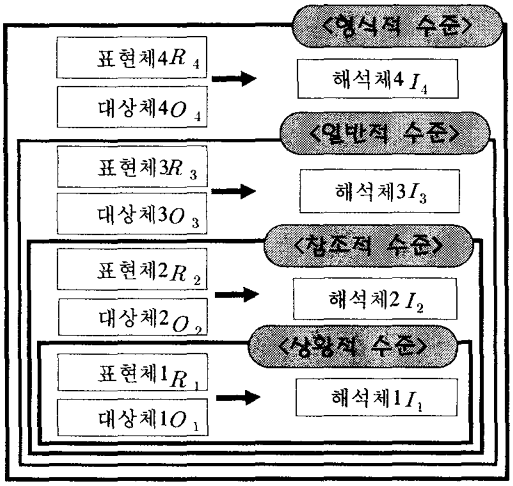
3. 연구절차

본 연구를 위한 과제 개발 후에, 본 수업은 2006년 10월 15일 A대학부설 과학영재교육원의 수학심화반 정규 수업시간에 연구대상자가 속한 반 전체의 학생들이 둘씩 짝을 지어 모둠 활동 및 전체 토론 수업을 6시간 동안 실시하였다. 수업 중에 나타나지 않은 보다 발전적인 반응을 살펴보기 위하여 본 수업 내용의 요약 및 남겨진 과제를 후속 과제 형식으로 온라인 제출하게 하였다.

4. 자료 수집 및 분석

분석을 위한 자료는 관찰자 및 연구자 관찰 기록과 면담 자료, 비디오 녹화 자료, 활동지 자료, 사전 또는 사후의 사이버 과제물 자료를 수집하였다. 본 연구자들은 전체 수업 진행자로서의 연구자(TR)과 전체 수업 관찰자로서의 연구자로 참여하였다.

관찰과 면담 결과에서 얻은 자료를 분석하는 방법으로는 먼저, 사례 별로 비디오 녹취물 자체를 순서와 내용에 집중하여 기술한 파일을 만든 후에 현장 노트, 비디오 녹취물에서 얻은 데이터, 학생들의 노트 등을 서로 비교하면서 파일을 재조직하고 분석틀에 기반을 두어 코딩하였다. Presmeg의 모델에 기반을 두고 구성한 [그림 Ⅲ-1]의 모델을 분석틀로 하여 추상화에서 기호의 의미 작용 과정을 분석한다.



[그림 Ⅲ-1] NIM 게임 해법의 추상화에서 각 수준별 기호의 의미 작용 과정 분석틀

대상체1, 표현체1, 해석체1로 구성된 가장 안쪽의 사각형이 <상황적 수준>의 추상화에 해당되며, 대상체2, 표현체2, 해석체2로 구성된 다음 사각형이 <참조적 수준>의 추상화에 해당되며, 대상체3, 표현체3, 해석체3로 구성된 다음 사각형이 <일반적 수준>의 추상화에 해당되며, 대상체4, 표현체4, 해석체4로 구성된 가장 바깥쪽의 사각형이 <형식적 수준>의 추상화에 해당된다. 상황적 수준의 추상화에서 구성된 대상체1, 표현체1, 해석체1으로 구성된 기호는 다음 참조적 수준의 추상화 안으로 포개어지면서 대상체2가 된다. 이러한 과정이 계속 반복되면서

포개어지는 모델에서 추상화 수준이 상승되고 기호의 의미가 만들어진다.

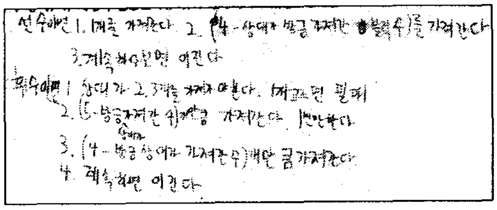
Ⅳ. 연구결과

1. 문제 수준 1인 NIM 게임 풀이의 추상화에서 기호의 의미 작용 과정 분석

YS는 [활동1-1]의 1-방향 문제를 해결하는 과정 초기에는 큐브를 번갈아 제거하면서 규칙을 찾으려고 노력하거나 실패하는 상황적 수준의 반응을 보였다. 이 과정에서 대상체 O_1은 번갈아가며 제거하는 큐브가 된다. 그 후 둘이 번갈아가며 정해진 개수만큼의 큐브를 가져가는 게임이라는 것을 이해하였으며 이 과정에서 구성된 표현체 R_1은 큐브를 가져가는 개수이다. 다음의 담화는 서로 가져가는 개수가 일정한 관계가 있음을 발견한 후, 발견한 패턴을 일상적인 언어로 표현하는 참조적 수준의 해석체 I_2가 구성되는 예이다.

TR: 이 게임에서 승리할 수 있는 비결은 무엇일까요?
YS: (4개씩 묶고 남는 개수만큼 뺀 채로 넘겨준 다음 상대방이) 4에서 가져간 것을 뺀 수만큼 가져가요. …(생략)…
YS: (BH에게 큐브를 빼는 방법을 알려주면서) 자. 네가 몇 개를 가져갔어. 그럼 나는 4에서 뺀 개수를 가져가. 또 네가 몇 개를 가져갔어. 그럼 나는 4에서 뺀 것을 가져가. 네가 3개를 가져가면 나는 4에서 3개를 뺀 것을 가져가고.

[그림Ⅳ-1]은 YS가 참조적 수준에서 필승전략에 대하여 기술한 것이다. 이는 이상의 과정에서 구성된 대상체, 표현체, 해석체를 기반으로 하여 구성된 표현체 R_2에 해당된다.



[그림 Ⅳ-1] 문제 수준 1에서 참조적 수준의 추상화(표현체 R_2)

이와 같이 [활동 1-1]에서는 상황적 수준과 참조적 수준의 추상화가 진행되었으며, [활동 1-2]에서 이를 기반으로 하여 보다 발전된 참조적 수준의 추상화가 진행되었다. 다음 담화에서는 몫과 나머지의 관계를 이용하여 주어진 개수의 필승 전략을 구체적으로 설명하려는 일반적 수준의 추상화에서 구성되는 해석체 I_3를 살펴볼 수 있다.

INT: 필승수가 뭐지?
YS: 처음에 가져가는 수가 필승수라 생각해요.(m-1로 기록)
YS: N을 K+1로 나눈 나머지를 m이라고 하면, K+1만큼의 몫으로 빼주고, N에서 m-1을 빼주면 전체에서 1이 남아요. 이게 검은색이고 그때가 상대편이 이기는 거예요.…(생략)…INT: 무슨 생각하는지 아까부터 계속 2개, 3개, 1개 계속 하고 있는 걸까?
YS: 나머지 0일 때, 1일 때 생각하고 있어요. 잠깐만, m-1이 맞나?

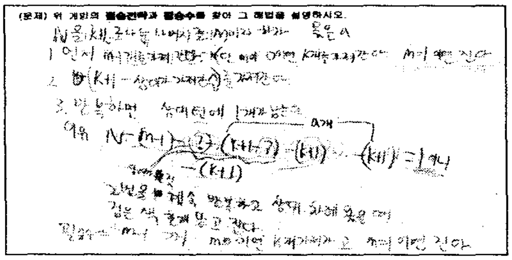
위 담화에서 '(전체 개수)=(가져가는 최대 개수+1)×게임 횟수+나머지' 라는 일반적 수준의 표현체 R_3 가 구성되었음을 알 수 있다.

다음 담화에서는 일반적 수준에서 형식적 수준으로 추상화의 수준이 상승되는 과정에서 해석체 I_4가 구성된다. 주어진 문제를 몫과 나머지의 문제로 구조화하고 대수적 구조를 문자와 식으로 표현하고 설명하는 해석체 I_4가 구성된 것이다.

YS: 처음에 N을 K+1로 나눈 나머지를 m이라

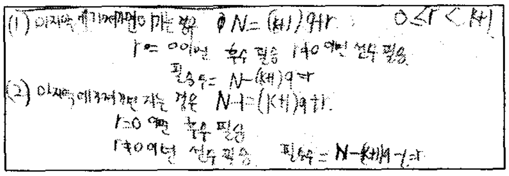
고 하고, 먼저 m-1개를 가져가요. 그런데 m이 0일 경우에는 K개를 가져가야 해요. m이 1이면 처음에 0개를 가져가야 하는데, 0개는 가져갈 수 없으므로 자기가 개수를 맞춰서 가져가게 되면 후자가 져요. 만약 m이 1이라고 하지 않는다면 K+1에서 상대가 가져간 수만큼 빼고 가져가요. 그렇게 되면 상대편에 1개가 남는데, 그 이유는 N에서 m-1을 빼고 또 상대가 가져간 개수를 빼고 여기 K+1에서 상대가 가져간 수를 빼면서 a번 빼주면 1이 남아요. 계속 반복해서 상대 차례가 왔을 때 검은색 하나가 남아서 상대가 져요. 상대가 이기려면 N을 K+1로 나눈 나머지가 1 이어야 돼요.

위의 담화를 토대로 대상체 O_4를 구성한 후에 이를 기반으로 YS가 처음에 스스로 형식적 수준의 추상화에서 구성한 표현체 R_4 는 [그림 Ⅳ-2]와 같다.

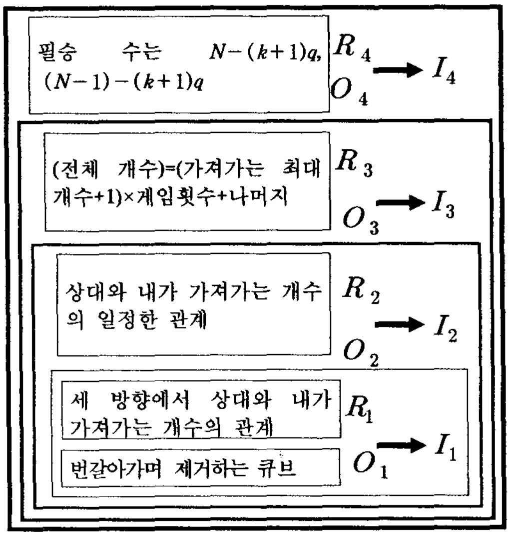


[그림 Ⅳ-2] 문제 수준 1에서 형식적 수준의 추상화(표현체 R_4)

초등수준의 영재라도 이들은 이미 문자를 사용하여 식을 정리한 경험이 많기 때문에 기호화하는 일에 익숙하다. 그러나 이 표현체는 아직 완전한 수학적 형식과 구조를 가진 단계에는 이르지 못한 것이다. 그 후 교사가 전체 수업을 통해 문자를 사용한 경험이 있는지를 확인하고 몫과 나머지의 관계를 수식으로 표현하는 방법을 지도하였을 때 [그림 Ⅳ-3]과 같은 형식적 수준의 추상화가 가능하였다. 이는 [그림 Ⅳ-2]보다 더 형식적인 표현체 R_4에 해당된다.



[그림 Ⅳ-3] 문제 수준 1에서 형식적 수준의 추상화(표현체 R_4)



[그림 Ⅳ-4] 문제 수준 1의 해법 추상화에서 기호의 의미 작용 과정

이상의 분석 결과에 기반을 두고 수준1 문제의 해법을 추상화하면서 기호의 의미를 만들어 가는 과정을 [그림 Ⅳ-4]와 같이 도식화하였다. 가장 안 쪽의 작은 사각형부터 바깥의 큰 사각형으로 추상화의 수준이 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준이 진행되며 이 수준들은 서로 포개어진다. 즉, 상황적 수준에서 O_1, R_1, I_1 의 조합이 참조적 수준에서의 대상체 O_2가 되기 위해 참조적 수준 안으로 포개어지며, 참조적 수준에서 O_2, R_2, I_2 의 조합이 일반적 수준에서의 대상체 O_3가 되기 위해 포개어지며, 일반적 수준에서 O_3, R_3, I_3 의 조합이 형식적 수준에서의 대상체 O_4가 되기 위해 포개어진다.

2. 문제 수준 2인 NIM 게임 풀이의 추상화에서 기호의 의미 작용 과정 분석

1-방향 게임을 마친 후에 부가적으로 실시한 문제 만들기 과제를 통해 NIM게임의 상황을 충분히 이해하였으므로, 문제 수준 2의 2-방향 게임에서는 상황적 수준의 활동을 잠시 거친 후에 참조적 수준의 추상화로 상승하였다. 먼저, [활동 3-1]에서 상대편과 내가 가져가는 개수에 일정한 관계가 있다는 1-방향과의 유추적 사고가 기반이 되어 2-방향에 대한 규칙을 예상하고 확인하는 상황적 수준의 해석체 I_1이 구성되었다.

YS, BH: (첫 게임)(몇 차례의 턴에서 BH가 한 쪽의 색깔을 모두 다 빼내자 YS는 BH가 빼내고 남은 개수를 보고 빼면서 1-방향 게임의 전략으로 이김)

YS: (두 번째 게임에서 주고받으면서 양쪽에서 큐브를 빼내다 노란색 부분을 모두 빼내어 검은색과 빨간색 8개만 남겨주면서) 이러면 네가 졌어!

다음 담화는 몇 번의 시행을 거친 후에 가운데에 검은색을 두고 양쪽에 각각 1개씩(1:1)만 남겨서 건네주는 사람이 이긴다는 사실을 발견하고 이러한 수들을 변경해 나가는 참조적 수준의 해석체 I_2 가 구성되는 과정의 예이다. 이 과정에서 상대편과 내가 가져가는 개수의 합에 어떤 관계가 있음을 발견하고 이를 표현체 R_2로 구성하였다.

BH: 왼쪽에서 3을 맞추면 지는데. 1이나 2일 때 네가 1을 했다고 쳐보자. 그 때 내가 2를 하면 지는 거잖아.

YS: 잠깐만. 네가 이렇게(1:1)하면 지는 거잖아. 양쪽에 4K+1이 되려면 2개를 빼야 하잖아.

BH: 선수일 때 왼쪽에서 3개 빼면 지는 거야.

YS: 2개 빼.

BH: 2개 빼면 이기는 거야? (생각 중)하나 빼도 같다니깐.

YS: 하나 빼고 해보자.

이 후에는 참조적 수준을 기반으로 하여 일반적 수준의 추상화 초기 과정을 확인할 수 있었다. 나머지를 조절하면서 상대방이 더 이상 벗어날 조치를 할 수 없도록 만들면 이긴다는 것을 이해하고, 한 쪽이 (최대 수+1)의 배수이면 다른 쪽에서는 1-방향일 때와 동일하게 가져가면 된다는 표현체 R_3를 구성하였다. 그 후, 몫과 나머지, 배수와 약수 등으로 문제를 구조화하여 일상 언어로 설명하나 문자를 사용한 일반식으로는 표현하지 못하는 일반적 수준의 해석체 I_3가 구성되었다. 다음 담화에서 해석체 I_3가 구성되는 과정을 살펴볼 수 있다.

YS: 아하! 알겠다. (양쪽이) 4로 나눈 나머지가 같을 때는 선수가 지고, 4로 나눈 나머지가 다를 때는 후수가 져. 여기서 시작할 때 처음에 몇 개씩 없어졌다고 생각하고 시작할 때랑 같잖아. 그런데 이렇게 같으면(3:3) 선수가 이렇게 가져가면(1개), 후수가 이렇게 가져가고(1개), 선수가 2개 가져가고, 후수가 2개 가져가면 선수가 지잖아. 그런데 같으면 선수가 몇 개를 가져감으로써 개수를 맞게 해서 주게 돼. 양쪽의 4K+1이 같으면…….

BH: 적어도 4K+1이 하나라도 있으면?

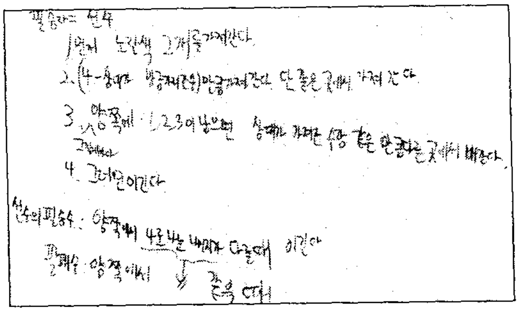
YS: 4K+1은 필요 없어. 나머지가 같으면.

BH: 4로 나눈 나머지가 4K+1과 같으면?

YS: 4K나 4K+1이나 4K+2, 4K+3이 모두 같으면 선수가 져. (중략) 4로 나누면 나머지가 0, 1, 2, 3이 나올 수 있잖아. 그래서 4의 배수를 빼버리고 그럼 네 차례잖아.(1:1) 네가 1개 가져가고, 내가 1개 가져가면 네가 이겨. 같으면 선수가 져.

이 과정에서 YS가 일반적 수준의 추상화에서 구성한 표현체 R_3 는 [그림 Ⅳ-5]와 같다. R_3는

이 전의 추상화 과정에서 구성한 O_2, R_2, I_2가 관계망을 형성하면서 O_3 로 대상화되고 그 의미를 해석하는 I_3 가 구성되면서 가능한 것이었다.



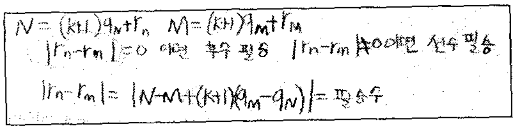
[그림 Ⅳ-5] 문제 수준 2에서 일반적 수준의 추상화(표현체 R_3)

[그림 Ⅳ-5]와 같이 2-방향에 대하여 일반적 수준의 추상화에 해당되는 해법을 작성한 뒤 [활동3-2]를 제시하였다. [활동3-2]에서는 가져갈 수 있는 큐브의 개수 및 주어진 큐브의 개수를 L, M, K와 같은 문자로 제시하여 그 해법을 찾아보도록 한 것이다. 이 과정에서 YS는 절대 값이란 기호를 사용하였으며, 이는 주어진 문제를 몫과 나머지의 문제로 구조화하고 문자를 사용한 수식으로 표현하는 형식적 수준의 추상화에 해당된다. 다음의 예에서 이 때 구성된 해석체 I_4를 일부 확인할 수 있다.

INT: 여기 이 생각은 어떻게 했어요?(절대 값 표시한 것)

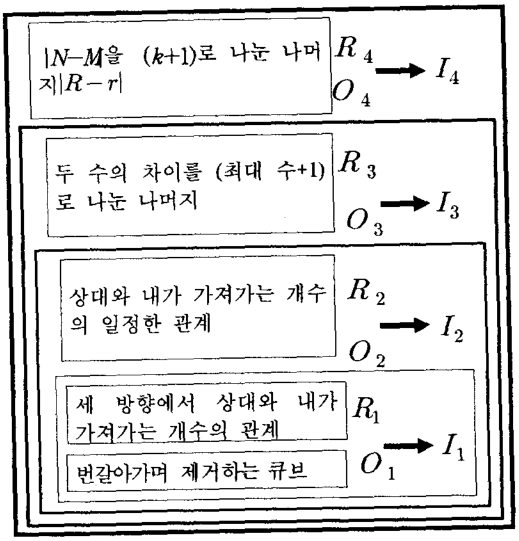
YS: 차례대로 있는 거라서 나머지를 같게 하려면 한쪽에서 이만큼(R_n- R_m)을 가져가줘야 돼요. 이 표시는 보통 처리할 때 절대값으로 하잖아요.

그 후, YS는 게임에 대한 일반적인 성질을 탐구하는 형식적 수준의 추상화 단계에서 구조를 파악하고 이를 일반적 해법으로 표현한 표현체 R_4를 [그림 Ⅳ-6]과 같이 제시하였다.



[그림 Ⅳ-6] 문제 수준 2에서 형식적 수준의 추상화(표현체 R_4)

이상의 분석 결과에 기반을 두고 2-방향 NIM 게임의 해법을 추상화하는 과정에서 나타나는 기호의 의미 작용 과정을 [그림 Ⅳ-7]과 같이 도식화하였다.



[그림 Ⅳ-7] 문제 수준 2에서의 해법 추상화에서 기호의 의미 작용 과정

R_4: 3가지 경우로 구분하여 (1)R=r=0인 경우는 선수필패, (2) R 또는 r이 하나가 0이면 1 방향과 동일, (3) $R\neq 0$, $r\neq 0$ 일 때 $N=(k+1)Q+R$, $M=(K+1)q+r$ 에서 필승 수는 $|R-r|$ 또는 $|N-M|$ 을 $(k+1)$로 나눈 나머지$|R-r|$

3. 문제 수준 3이상인 NIM 게임 풀이의 추상화에서 기호의 의미 작용 과정 분석

YS는 1-방향과 2-방향 해법을 추상화하면서

구성한 기호의 의미 작용 과정을 토대로 3-방향 과제에서 보다 일반적인 접근을 시도하였다. YS는 [활동4-1]의 과제가 1-방향, 2-방향 등을 점차 확장한 것이라는 점을 이해하는 상황적 수준을 보였다. 그 후에 상대방과 수차례의 시행착오를 통해 게임을 하는 과정에서 3-방향 NIM게임의 구조를 만들어 가운데에 목표 큐브를 두고 승리하는 전략을 사용하는 참조적 수준을 확인할 수 있었다. 아직 게임이 끝나지 않은 상황에서 자신이 승리함을 확신하는 참조적 수준의 해석체 I_2를 구성하였다. 다음 담화에서 I_2가 구성되는 과정을 살펴볼 수 있다.

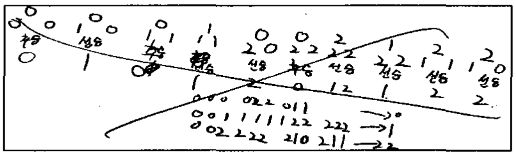
YS: 양쪽이 $k+1$의 배수로 퍼져 있으면 …
YS: 한 개나 두 개, 세 개 가져갈 수 있다.
INT: 3, 4, 5일 때 이기는 방법 찾아냈어?
YS: 여러 번 해보니 처음에 (3개인 파란색에서) 2개 가져가면 돼요… 아무거나 하는 거예요.

다음에는 필승수의 상황을 말로 표현하고 나머지의 경우가 다양하게 존재한다는 것을 이해하고 각각에 대한 해결을 시도하려는 참조적 수준의 해석체 I_2 가 구성되었다. [그림Ⅳ-8]은 참조적 수준에서 필승전략에 대하여 기술한 것으로서, 필승수의 상황을 말로 표현한 표현체 R_2 에 해당된다.

1. 파란색 1개를 가져온다
2. (3-상대가 가져간 수)를 상대가 가져간 곳에서 가져온다
3. 반복하면 노랑파 가되고 상대는
© 이때 후자 필패.

[그림 Ⅳ-8] 문제 수준 3에서 참조적 수준의 추상화(표현체 R_2)

또한 [활동4-2]에서 제시하는 3-방향에 대한 해법을 찾기 위해 세 방향의 개수나 나머지를 표로 나타내는 참조적 수준의 표현체 R_2를 [그림 Ⅳ-9]과 같이 나타내었다.



[그림 Ⅳ-9] 문제 수준 3에서 참조적 수준의 추상화(표현체 R_2)

[그림 Ⅳ-9]와 같이 YS는 세 방향의 개수나 나머지를 표로 나타내며 관련지어 보려는 참조적 수준을 보이고 있으나, 사고는 이미 일반적 수준을 다루고 있다. 즉, 세 수의 차들을 (최대 수 +1)로 나눈 나머지와 비교해 나가는 일반적 수준에 해당되는 사고를 전개하고 있는 것이다. 특히, 이 과정의 추측이 틀렸다고 판단한 YS는 주어진 3-방향의 과제를 해결하기 위하여 1-방향 및 2-방향 게임을 n-방향으로 확장하여 접근하고자 하였다. 이는 일반적 수준의 추상화에서 구성된 해석체 I_3에 해당되는 것으로서 3-방향 게임의 세 방향이 모두 (k+1)의 배수이면 후수필승, 두 방향이 모두 (k+1)의 배수이면 1방향 게임과 동일, 한 방향이 (최대 수 +1)의 배수이면 2방향 게임과 동일하지만 세 방향이 모두 (최대 수 +1)의 배수가 아닌 경우는 별도로 해결해야 한다는 것을 발견하고 이를 표현체 R_3 로 구성하였다. 다음은 이 과정에서 구성된 해석체 I_3의 예시이다.

YS: 여기([활동1-2])서도 처음에 r이 0이었을 때 선수가 져요. 여기([활동4-2])에서도 r이 0일 때 선수가 져요. 그래서 어떤 (나머지가) 0일 때는 선수가 진다고 추측할 수가 있을 것 같아요.
INT: 3-방향에서 (k+1)로 나눈 나머지 중의 하나만 0이라도 선수가 질까?
YS: 하나가 0이면 2-방향과 같죠. 그러면 먼저하는 사람이 이길 수도 있겠네요. 아, 알았어요. 세 방향이 0이면 후수필승, 두 방향이 0이면 1-방향 게임과 동일, 한 방향이 0이면

2-방향 게임과 동일해요. 그런데...3-방향이 모두 0이 아닐 때는.... (시행착오로 게임에서 이기는 경우는 몇 차례 있었으나 해법을 구하지는 못함)

그 후, YS에게 [활동4-2]에 대한 일반화된 풀이를 요구하자 이상의 추상화 수준을 기반으로 몫과 나머지의 관계를 구조화하여 [그림 Ⅳ-10]과 같은 형식적 수준의 비완성된 표현체 R_4를 구성하려고는 하였다. 그러나 그것의 해석체가 불완전하였기에 표현채는 미완성으로 남겨두었다.

$L=(k+1)q_L+r_L \quad M=(k+1)q_m+r_m \quad N=(k+1)q_N+r_N$

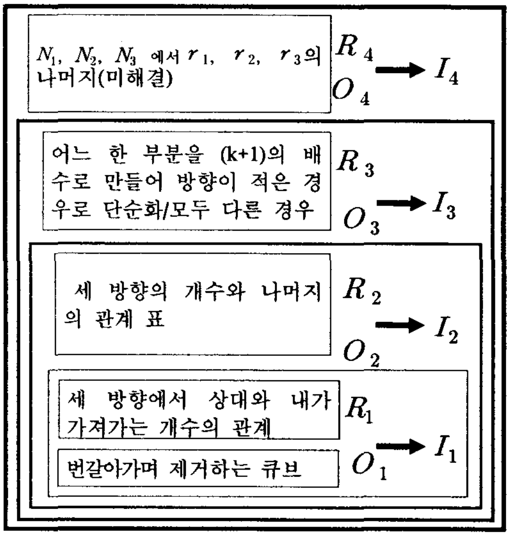
[그림 Ⅳ-10] 문제 수준 3에서 형식적 수준의 추상화(미완성된 표현체 R_4)

YS는 [활동4-2] 이후에 문제를 해결해 나가는 과정에서 n-방향으로 확장하였으며, 3-방향 NIM 게임에서 가져갈 수 있는 개수에 제한을 두지 않는 3-방향 이상의 게임에 해당되는 추상화 과정까지 가능하였다. 이는 본 실험의 후속 사이버 과제에서 YS가 [활동4-2]에 대하여 기술한 [그림 Ⅳ-11]의 내용에서 확인할 수 있으며, 이는 해석체 I_4에 해당된다.

이번에는 필승수를 구하기 어렵다고 생각했다. 난이도가 점점 올라가고 나중에는 방향도 미지수가 될 것 같다. (k+1-상대가 가져간 수)를 가져가면 그냥 날아가니 L, M, N을 k+1로 나눈 나머지만 따져도 된다. 그러면 나머지들을 한 번에 가져갈 수 있다. 그러므로 이것은 3방향 무제한 NIM게임이 된다. 그래서 그 전략을 쓰면 이긴다.

[그림 Ⅳ-11] 문제 수준 4에서의 필승전략(해석체 I_4)

이상의 분석 결과를 토대로 3-방향 NIM 게임의 해법을 추상화하는 과정에서 나타나는 기호의 의미 작용 과정을 [그림 Ⅳ-12]와 같이 도식화하였다.



[그림 Ⅳ-12] 문제 수준 3인 NIM 게임의 해법 추상화에서 기호의 의미 작용 과정

R_3 : 세 쪽이 모두 (k+1)의 배수이면 후수필승, 두 쪽이 모두 (k+1)의 배수이면 1-방향 게임, 한 쪽이 (k+1)의 배수이면 2-방향 게임일 때의 필승전략과 동형, 모두 다른 경우만 재고

R_4 : $N_1=(k+1)q_1+r_1$, $N_2=(k+1)q_2+r_2$, $N_3=(k+1)q_3+r_3$ 에서 각 나머지 r_1, r_2, r_3를 고려하면 됨

4. 문제 수준 4인 NIM 게임 풀이의 추상화에서 기호의 의미 작용 과정 분석

p 방향 이상일 때는 어느 한 방향의 큐브 개수가 $(k+1)$의 배수이면 $p-1$방향 NIM 게임과 같아진다. 각 방향의 개수들의 차를 $(k+1)$로 나눈 나머지들만 생각하면 된다. 따라서 변수를 사용할 수 있는 초등학교 수준의 영재들에게 유한개를 가져가는 경우는 몫과 나머지로 해결이 가능하였다. 그러나 그들에게 무한개를 가져가는 경우는 해법의 구조가 이전

과는 다르게 느껴질 수밖에 없었다. 이때, 교사의 도움에 의해 유한개를 가져가는 경우라도 그 나머지만 생각하면 무한개를 가져가는 $(1,2,\cdots,k-1:\infty)$ NIM 게임을 해결하는 것과 본질적으로는 동형이라는 것을 알게 되었더라도 이를 참조적인 수준으로 대상체를 이해하는 경우는 가능하지만 그것의 일반적인 해법의 표현체는 스스로 구성해 내지 못하였다.[4] 따라서 초등학교 수준의 영재들에게 4수준의 문제에 대한 수학적인 해법의 완벽한 구성은 무리라는 것을 확인하였다.

V. 결 론

본 연구에서는 경기도에 거주하는 가장 우수한 집단에 속한 한 명의 초등 수학영재를 대상으로, NIM 게임이라는 특수한 과제에 대해 주어진 문제를 토대로 새로운 문제를 만들고 또 해법을 추상화하면서 보여주는 수업 장면에서 기호의 의미 작용 과정을 질적인 방법으로 분석하였다. 연구결과는 다음과 같이 3가지로 정리할 수 있다.

첫째, 초등수준의 수학영재는 문제를 구성요소별로 단순화시켜 인식하고 구조화함으로써 상황적 수준의 추상화와 참조적 수준의 추상화에는 쉽게 도달한다. 그러나 수준이 높은 문제에서 일반적 수준의 추상화에서 형식적 수준의 추상화로 상승하는 과정에서는 어려움이 있다. 이때 연구자의 유용한 발문과 담화, 문자식의 지도, 스스로 구성한 표현체의 해석체를 구성하는 과정, 그리고 이전 수준 문제의 해법을 추상화 하는 과정과 유추적 사고가 촉진될 때 추상화 수준이 상승될 수 있었다. 둘째, 초등수준의 수학영재는 일반적 수준의 추상화에서 구성한 표현체의 해석체를 구성할 수 있을 때에 비로소 문자를 사용한 비형식적인 표현체를 스스로 구성할 수 있고 또 거기에 만족한다. 셋째, 초등수준의 수학영재는 비록 형식적 수준의 추상화에 쉽게 도달하지 못하더라도 문제의 해법을 일상어로 추상화하는 일반적 수준의 추상화에는 빠르게 도달하였다. 특히, 그들은 상황적 수준과 참조적 수준을 기반으로 일반적 수준에서 추상화한 대상체의 해석체와 표현체를 구성하는 능력은 뛰어나다. 그리고, 교사나 동료로부터 보다 간단한 형식으로의 표현에 대한 요구나 도전을 받을 때에는 형식적 수준으로 표현체를 구성할 수 있었다. 형식적 수준이 일반적 수준, 참조적 수준, 상황적 수준과 연결되어 포개어지는 관계망을 구성할 수 있었다.

이상의 분석결과에 기반을 두고 초등수준의 수학영재들이 추상화에서 기호의 의미 작용 과정을 돕는 지도 방안을 다음과 같이 제안한다.

첫째, 수학 영재라고해서 높은 수준의 독립된 문제를 통해 곧바로 형식적 수준의 추상화를 지도하는 것이 아니라 실세계 문제를 다양한 수준으로 세분하여 관계적으로 제시하여야 한다. 또한 상황적 수준에서 수학적 구조를 추상화하면서 표현체를 개발하고 그 의미를 해석하면서 추상화의 수준이 상승되도록 지도해야

4) 연구를 위한 관찰 이후에 이진법과 XOR연산을 이용한 풀이의 예시를 [활동 5-1]을 통해 제공하고 이 풀이의 근거를 수학적으로 설명해 보도록 하였으며 [활동 6]을 통해 NIM 게임의 해법을 종합하여 정리하도록 요구하였다. 그리고 다음 달의 주말 후속 수업에서 3-방향 이상의 무제한 게임을 확인해보았으나 인터넷이나 책을 통해 그 해법을 이미 알고 있다는 일부 학생들조차도 게임에서 이기는 방법에 대해서는 대부분이 상황적 수준 또는 참조적 수준에서 구성한 표현체를 개발하였지만 이를 기호화하는 데는 실패하였다. 이진법을 알고 있다는 일부 학생들이 일반적 수준에서 구성한 해석체를 구성해내기는 했으나 이를 표현하고 일반화하여 증명하는 데는 실패하였다.

한다. 본 연구에서 연구자들은 학급에서의 지도교사로서 '나머지 산술'이라는 동형의 수학적 구조를 갖는 다양한 문제들을 수준별로 개발하였다. 그리고 기본 수준의 문제를 먼저 제시하고 충분히 탐색할 기회를 주었다. 그 때, 영재들은 기본 문제의 다양한 정보나 구조를 변경하고 문제를 만들고 해법을 개발하면서 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준으로 추상화 수준이 빠르게 상승되고, 추상화한 대수식에 의미를 부여하였다. 또한 실세계 맥락의 상황적·실제적 의미가 보존된 다양한 자신만의 표현체를 개발하고 그 의미를 해석하면서 보다 높은 수준의 추상화가 가능하였다.

둘째, 수학영재들을 위한 지도교사는 형식적 수준의 추상화가 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준의 추상화와 서로 포개어지는 관계망이 형성되어 일반적 수준에서 구성한 표현체의 다양한 해석체가 구성되도록 하는 수업의 목표와 단계, 핵심 등을 이해하면서 학생들이 곤란을 겪는 부분을 의식하면서 지도해야 한다.

영재들은 상황적 추상화 수준에서 참조적 수준과 일반적 수준에는 빠르게 도달한 반면, 문자를 사용한 형식적인 대수식으로 추상화하는 과정에서는 어려워하였고, 가장 높은 수준의 문제에서 형식적 추상화 수준으로 상승하는 과정에서 많이 어려워하였다. 상황적, 참조적, 일반적 수준에서 구성한 표현체와 관계망을 형성하면서 문자의 의미와 대수식의 구조를 이해하여 이를 형식적인 식으로 표현하고 자신이 구성한 표현체의 의미를 이해할 수 있도록 지도할 때 수준이 상승할 수 있었다.

셋째, 영재들이 대상체에 의미를 부여하는 해석 과정이 매우 다양한 담화 패턴으로 나타난 점으로 미루어 볼 때, 형식적 수준의 추상화가 이루어지도록 하기 위해 교사는 영재들의 확산적 사고를 유발하는 담화 패턴을 통해 보다 높은 수준의 표현체가 구성될 수 있도록 해야 한다. 본 연구에서 연구자와 학생들 간의 담화와 짝 활동에서의 토론을 통해 기호의 의미가 협상되는 과정에서 다양한 해석체가 구성되고 이러한 과정은 대상체에서 표현체가 구성되는 과정에 도움이 되었다. 따라서 영재라고 스스로 문제를 해결하도록 하는 것이 아니라 교실의 사회문화적 맥락에서 구성된 담화 패턴이 영재들의 추상화 사고의 수준 상승을 돕는다는 점을 고려하여 유용한 발문이나 담화 패턴을 고려해야 할 것이다.

본 연구에서 발전하여 영재들이 추상화의 한 수준에서 다른 수준으로 상승하는데 영향을 미치는 교수학적 변인을 심층적으로 조사하거나, 더 정교화·세분화된 추상화 수준의 발생 모델을 개발하여 수준 상승 과정에서 보이는 기호의 의미 작용 과정을 연구할 필요가 있다. 또한 수학 영재들의 문제 만들기와 해결과정에서 유추적 사고, 분석적 사고 등을 분석하고 결과를 종합하여 수학 영재들의 대수적 사고를 신장시키는 교수-학습 자료나 지도 방안에 대한 후속연구가 지속되어야 할 것이다. 그리고 3-방향이상의 일반적인 p-방향의 경우에도 이진법과 XOR연산은 동일하게 적용되므로 4-방향이상의 무제한 NIM게임이 중등수준의 학생들에게는 더 높은 수준의 문제로 어떻게 제공될 수 있고 또 실제 수업에서 그들로부터 드러나는 해석체와 표현체의 사례를 더 연구해볼 필요가 있다.

참고문헌

김성도(2006). **퍼스의 기호 사상**. 서울: 민음사.
송상헌 외 5인(2007). 수학영재들이 NIM 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석. **수학**

교육학연구 17(1), 61-76.

이향훈(2007). **NIM게임의 조건변경을 통한 문제만들기와 일반화 과정 분석.** 경인교육대학교 교육대학원 초등수학전공.

Bakker, A., & Hoffmann, M, H, G. (2005). Diagrammatic reasoning as the basis for developing concepts: A semiotic analysis of students' learning about statistical distribution. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 333-358.

Cobb, P. (2002). Modeling, symbolizing, and tool use in statistical data analysis. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel(Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 171-195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Davis, P. J., Hersh. R., & Marchisotto, E. A. (1995). *The mathematical experience.* Study Edition, Boston: Birkhäuser.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking process. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*(pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dörfler, W.(1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J.Bishop (Eds.), *Mathematical knowledge; Its growth through teaching*(pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Gravemeijer, K., Cobb, P., Bowers, J., & Whitenack, J. (2000). Symbolizing, modeling, and instructional Design. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain(Eds.), *Symbolizing and communication in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*(pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 170-218.

Hershkowitz, R., Schwarz, R. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2). 195-222.

Heymann, H. W. (2003). *Why teach mathematics?* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hierbert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: MacMillian.

Noss, R., & Holyes, C. (1996). *Window on mathematical learning culture and computer.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Noss, R., Holyes, C., & Pozzi, S. (2002). Abstraction in expertise: A study of nurses' conceptions of concentration. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 204-229.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 11-38.

Pratt, D., & Noss, R. (2002). The micro-evolution of mathematical knowledge: The case randomness. *The Journal of the Learning Science, 11*(4), 453-488.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standards: Signification of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 163-182.

van Oers, B. (1998). From context to contextualizing. *Learning and Instruction, 8*(6), 473-488.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason: Cognitive development and the production of rationality.* London: Routledge.

Whiston, J. A. (1997). Cognition as a semiosic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. In D. Kirshner & J. A. Whiston(Eds.), Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspective(pp. 97-149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Case Analysis on the Signification Model of Three Signs in a Mathematically Gifted Student's Abstraction Process

Song, Sang Hun · Shin, Eun Ju (Gyeongin National University of Education)

The purpose of this study is to analyse how a mathematically gifted student constructs a nested signification model of three signs, while he abstracts the solution of a given NIM game. The findings of a qualitative case study have led to conclusions as follows. In general, we know that most of mathematically gifted students(within top 0.01%) in the elementary school might be excellent in constructing representamen and interpretant. But it depends on the cases. While a student, one of best, is making the meaning of object in general level of abstraction, he also has a difficulty in rising from general level to formal level. When he made the interpretant in general level with researcher's advice, he was able to rise formal level and constructed a nested signification model of three signs. We suggested 3 considerations to teach the mathematically gifted students in elementary school level.

* key words : NIM game(님게임), the mathematically gifted(수학영재), signification model(의미작용 모델), representamen(표현체), interpretant(해석체), object(대상체), abstraction(추상화)

논문접수 : 2007. 2. 7
심사완료 : 2007. 3. 6