

대수 문장제 해결을 위한 학생들의 풀이 과정 분석 : 일련의 표시(Chain of signification) 관점의 사례연구

박 현 정* 이 종희**

본 연구의 목적은 대수 문장제를 해결하기 위하여 학생들이 이전지식이나 경험을 어떻게 적용하는가를 조사하고자 학생들의 풀이과정에 대한 유사성을 일련의 표시(chain of signification) 관점에서 분석하는 것이다. 이를 위하여 본 연구에서는 중학생 3명을 대상으로 사례 연구를 실시하였다.

연구 결과, 학생A나 학생C는 (반)열린 공식을 해법 원리로 생각하여 구체화하는 과정을 일련의 표시로 구성하였다. 학생A와 학생C는 문제를 읽으면서 숫자 정보와 텍스트를 기반으로 정신적 모델을 구성하였으며, 그 의미(기의)와 기록(기표) 과정을 점진적으로 구성함으로써 일련의 표시 과정을 구성하였다. 학생A의 표시과정은 숫자나 문자, 그리고 그리기가 혼합된 것이었다. 그러나 학생C와 학생B는 단지 숫자나 문자만으로 구성하였다. 특히, 학생B는 특정한 문제정보만을 근거로 그 상황을 생각하지 않고, 자신의 알고리즘을 적용하기 위하여 자신이 구성한 규칙을 적용하고자 하는 시행착오에 대한 유사성을 구성하였다.

I. 서 론

문제해결을 위하여 학생들에게 예제를 제시하고 그 풀이과정을 알려준다고 해도 실제로 예제와 관련된 문제의 해답을 구할 수 있다고 말할 수는 없을 것이다(Novick & Holyoak, 1991). 그 이유들 중의 하나는, 학생 개인이 인식하는 문제나 문제 구조에 대한 유사성이 문제 상황에 대한 개인의 내적인 표상에 따라 달라질 수 있으며, 아주 개인적일 수 있기 때문이다. 관련된 많은 연구자들(예를 들면, Novick & Holyoak, 1991; Reed & Bolstad, 1991; Reed & de la Pena, 1996)은 유사성의 관점에서 문제 해결에 대한 성공 요인들을 조사하였다. Reed

& Bolstad(1991)과 Reed & de la Pena(1996)는 학생들에게 절차나 예제 등에 대한 힌트를 주고 가장 문제해결의 성공 비율이 높았던 경우를 분석한 결과, 미리 주어진 문제의 해법에 대한 규칙이나 절차를 알려준다고 해도 해법을 구하는 과정에 올바르게 적용할 수 없었지만, 예제와 함께 제시하는 경우에는 보다 문제해결의 성공 비율이 높다는 연구결과를 보고하였다. 또한 Novick & Holyoak(1991)의 연구에서는 예제와 검사과제에서 제시하는 숫자들의 대응 관계와 해법을 미리 알려준 경우가 가장 문제 해결의 성공비율이 높았지만, 그 성공 비율이 50%에 불과하다는 연구결과를 발표하였다. Chen(1996)은 해법을 구하는 구체적인 절차에 대한 이전 경험과의 유사성이 해법의 적용과

* 이화여대대학원(hyunjp88@naver.com)

** 이화여자대학교(jonghee@ewha.ac.kr)

정에 가장 많은 영향을 미친다고 제안하였다. 이러한 연구결과들에서는 어떤 요인이 상대적으로 높다는 양적 연구 방법에 의한 결과이외에 그 이면의 의미에 대한 구체적인 서술은 없었다. 따라서 본 연구에서는 학생들이 인식한 이전 해법과의 유사성을 주어진 문제의 해법을 구하기 위한 풀이 과정에 어떻게 적용하는가에 대한 구체적인 서술적 정보를 얻을 수 있는 연구의 필요성을 제안하고자 한다. 또한 그러한 해법의 적용 과정은 절차적 유사성¹⁾과 관련된 것이라고 생각할 수 있을 것이다.

English(1997)와 Gentner(1983)는 학생들이 해법을 구하는 과정에서 주어진 문제의 현저한 세부 특징들과 학생 자신들이 알고 있는 지식들의 구성요소들을 문제 해법에 결정적인 관계를 지어야 성공적으로 문제해결을 할 수 있다고 하였다. 전문가들은 초심자들보다 이러한 관계성을 능숙하게 확립한다. 여기서 결정적 관계라는 것은 주어진 문제에 대한 표면적이거나 구조적인 정보와 학생들이 알고 있는 관련된 지식들 사이의 관계성을 말하는 것이다. 이 때 주어진 문제의 해법을 구하는데 필요한 지식을 적합하게 사용하거나 사용할 수 있는 경우는 활성화 지식(activated knowledge)이 작용되는 것이며, 관련 지식을 가지고 있더라도 사용할 수 없거나 부적합하게 사용하는 것은 불활성화 지식(inert knowledge)의 경우이다(예를 들면, Chinnappan, 1998; Whitehead, 2004). 절차적 유사성에 관련된 연구들(예를 들면, Chen, 1996, 2002; Chen & Mo, 2004; Novick & Holyoak, 1991; Reed & Bolstad, 1991; Reed & de la Pena, 1996)에서 서술하는 주어진 문제 해법에 대한 규칙과 절차를 이미 알고 있는 있으면서

도 실제로 적용할 수 없었던 지식이 ‘불활성화’된 것이라고 볼 수 있을 것이다. 또한 학생들이 해법에 대한 절차와 예제를 함께 제공받아서 문제를 해결할 수 있었던 경우는 지식이 ‘활성화’된 것이라고 볼 수 있을 것이다. 특히, 지식의 활성화를 해법에 관련된 지식들이 적합하게 연결이 되는 것이라고 서술하는 연구들(예를 들면, 이종희, 김부미, 2003; 이종희, 김진화, 김선희, 2003; Carlson & Bloom, 2005; Evans, 1999, 2000; Griffin, 1995; Steele & Johanning, 2004)에서는 학생들의 풀이과정에서 다이어그램과 같은 시각적 표현들의 핵심적인 역할에 대하여 공통적으로 서술하였다.

본 연구에서 강조하는 논점은 주어진 문제를 해결하는데 필요한 지식을 학생들이 가지고 있었는가에 대한 여부가 아니라, 학생들이 예제나 이전 경험을 해당 문제의 풀이 과정에 어떻게 구체적으로 적용하는가에 대한 것이다. 따라서 학생 자신들이 예제나 이전 경험을 근거로 검사과제를 해결하고자 할 때, 그들이 인식한 유사성을 구체적인 풀이과정에 어떻게 적용하는가를 시각적 표현의 관점에서 분석함으로써 학생들의 사고과정에 대한 유의미한 자료를 구성할 수 있을 것이라고 생각한다. 박현정, 이종희(2006)는 사례 연구 방법을 사용하여 연구 대상자들이 문제이해와 계획 수립단계에서 인식하는 유사성의 유형과 그 구성 과정을 조사하는데 목적이 있었다. 그렇지만 본 연구의 목적은 연구 대상자들이 인식한 해법에 대한 유사성을 적용과정에서 어떻게 구체화하는가를 분석하는데 있다. 그러므로 본 연구에서는 박현정 등(2006)의 연구에서 사용한 동일 자료를 근거로 학생들이 해법을 구하기 위하여 기록하

1) 절차적 유사성(procedural similarity)은 주어진 문제의 해법을 구하기 위하여 이전 문제해결에 대한 경험을 근거로 현 문제의 해법을 구하는 경우, 이때 이전과 마찬가지로 유사하게 전개되는 연산이나 그림 등과 같은 구체적인 풀이과정에 대한 유사성을 말한다(Chen, 2002)

는 구체적인 표현에서 추상적인 표현양식에 이르는 시각적인 표현 과정에 대한 유사성을 사회언어학적 분석인 “일련의 표시(chain of signification)”²⁾의 관점으로 재조명해 봄으로써 해법을 구하는 구체적인 기록 과정들의 각 단계에 대한 점진적인 연계성을 찾을 수 있을 것이라고 본다.

따라서 본 연구 목적을 이루기 위하여 “대수 문장제의 해법을 구하는 과정에서 연구 대상자들이 기록하는 구체적인 풀이과정에 대한 절차적 유사성은 어떠한 것인가?”라는 연구문제를 설정하였다. 그리고 사례연구 방법을 사용하여 이전에 풀었던 문제와 유사한 대수 문장제의 해답을 구하는 풀이과정에서 학생들이 구체적으로 적용하는 것이 어떠한 것인가, 즉 각 과제에 대한 절차적 유사성을 심층적으로 고찰함으로써 그 열쇠를 찾고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 해법의 적용과 유사성

Novick & Holyoak(1991)은 예제의 해법을 사용하기 위한 힌트로 현 검사과제와의 숫자대응 관계를 미리 알려준 경우에도 문제해결의 성공 비율이 50%밖에 되지 못한 연구결과를 근거로 이전문제 해법을 사용하기 위한 정보원들 간의 대응과정보다는 적용과정이 문제해결의 성공과 더 관련이 있다고 제안하였다. 이러한 적용과정에서 작용하는 문제해결의 성공 요인에 대한 연구를 수행한 Reed & Bolstad(1991)는 학생들

에게 <일 문제>에 대한 다양한 예제들과 예제와 해법 절차를 함께 제시하는 방법을 다르게 하여 3집단으로 나눠서 각 집단들의 문제해결에 대한 성공비율을 비교하였다. 연구 결과, 예제와 해법 절차를 받은 집단(42%)이 문제해결에 대한 성공 비율이 가장 높았으며, 그 다음으로는 예제만을 제공받은 집단(34%)이었으며, 가장 낮은 비율의 집단(15%)은 해법 절차만을 제공받은 집단이었다. 또한 Reed & de la Pena(1996)는 해법에 대한 규칙보다 예제가 왜 효율적인지를 알아보고자 ‘응용된 해법 절차(applied procedure)’라고 명명한 새로운 조건을 추가하여 비교한 결과, 예제와 해법 절차를 모두 제공받은 집단들은 변형에 대한 모든 수준(0~3)에서 문제해결을 잘 수행하였다고 보고하였다. Chen(1996)도 Novick & Holyoak(1991)처럼 절차 유사성은 대응 이후의 적용 과정을 통해서 유사성을 근거로 하는 문제해결 과정에 영향을 준다고 제안하였다. 그 이후에 Chen(2002)은 학생들이 유사성을 근거로 문제를 해결할 수 있는 능력을 고찰하기 위해서 검사과제와 유사한 이야기나 그림으로 구성된 예제를 학생들에게 제공하거나, 검사과제를 해결하는데 사용할 수 있는 해법을 미리 제공하여 절차적 유사성의 단계들을 연구하였다. 그 결과, 예제와 검사과제 사이에서 구체적인 절차 수준에서 유사한 경우가 문제해결에 대한 수행이 가장 좋았으며, 예제와의 유사성을 인식하도록 하기 위하여 힌트를 제공하여도 수행에 대한 패턴에는 변화가 없는 것으로 나타났다. 결과적으로, 연구 대상자들에게 일반적인 규칙을 제공했다고 해도 구체적인 절차에 대한 정보가

2) 기호학에 관련된 연구들(예를 들면, 김선희, 2003; 김치수, 김성도, 박인철, 박일우, 1998; Trabant, J., 2001)에서는 “chain of signification”을 대부분 “의미작용”으로 서술하지만, 본 연구는 학생들의 문제해결에 대한 시각적인 표현과정에 중점을 두고 설명하기 위하여 “일련의 표시”라는 방정숙(2002)의 연구에서 서술된 용어를 사용하고자 한다.

없는 경우에는 연구 대상자들이 유사성을 바탕으로 문제를 해결할 수 없다는 것이 입증되었다. 그리고 연구 대상자들에게 헌트를 주어도 문제해결 수행에는 영향을 미치지 못한다는 연구 결과는 표면이나 구조적 유사성³⁾과는 다르게 절차적 유사성이 접근이나 대응 과정에 영향을 주는 것이 아니라, 관련된 해법들 중에서 적합한 해법을 선택하는 과정에 영향을 준다는 의미로 해석할 수 있을 것이다. 그것은 학생들이 당면한 문제를 해결하기 위해 적합한 해법을 선택하는 과정에 영향을 미친다는 의미로, 문제해결 수행에서는 결정적 요인이라고 볼 수 있다. 정리하면, 학생들에게 해법 절차를 예제에 어떻게 적용하는가를 알려주는 것은 절차에 대한 적용을 극대화할 수 있다고 볼 수 있다.

결론적으로, 해법에 대한 규칙이나 절차만을 학생들에게 제공하는 경우에는 학생들이 해당 지식을 주어진 문제 상황을 이해하기 위한 지식과 연결시키지 못한 것이라고 볼 수 있다. 대부분 학생들은 문제에서 서술된 텍스트를 통하여 자신이 기억하는 범주의 문제 모델에 대한 예인가를 판단한다고 한다(Kintsch & Greeno, 1985) 이러한 학생들이 기억하는 문제 모델은 Chinnappan(1998)의 정신적 모델(mental model)⁴⁾과 유사한 것이라고 볼 수 있다. Chinnappan은 Harford(1993)의 정신적 모델을 바탕으로, 그의 미를 학생들이 특정한 문제를 해결하려고 할 때, 작용하는 표상이라고 했다. 이러한 관점에서 보면, 정신적 모델은 어떤 지식들의 군집체를 기억하고 해법과정에 적용시킬 것인가에 대

한 결정과 추론을 포함하는 일련의 인지적 행동과, 문제에 대한 해법을 추구하는 과정에서 이러한 지식을 어떻게 배치할 것인가를 포함하는 것이다. 또한 정신적 모델은 학생들이 이전에 학습했던 수학적인 지식과 주어진 문제에서 명백하게 드러난 구성 요인들 사이에서 필수적인 관계를 나타낼 수 있다. 따라서 학생들이 주어진 문제를 해결하는 해법을 구하기 위해서는 해법에 관련된 지식을 구성하는 과정, 즉 상위 개념을 기억하거나 관련된 문제 유형을 기억하는 것만이 중요한 것이 아니라, 그 지식들 가운데 유용한 지식의 선택과 재구성이 필요하다는 것을 알 수 있다. 따라서 해법에 대한 절차만을 제공받은 경우는 이와 같은 정신적 모델 구성과 관련하여 볼 때, 주어진 문제에 대한 이해와 그 해법의 규칙을 연결하지 못한다고 볼 수 있을 것이다. 따라서 본 연구에서는 주어진 문제의 이해와 자신이 기억하는 해법의 규칙에 대한 유사성을 근거로 풀이과정을 구성하는 것이라고 볼 때, 학생들이 이전 문제와의 유사성을 현 문제의 풀이과정에서 어떻게 구체적으로 적용하는가를 사례연구 방법을 사용하여 분석함으로써 그 해답을 찾고자 한다.

2. 지식의 활성화와 적용을 분석하기 위한 표시 과정

문제해결을 위해 관련된 지식들을 연결하기 위한 하나의 방법으로 Catrambone(1996)는 하위 목표에 명칭을 다는 것과 공통된 하위 목표에

3) 표면 유사성은 해당 문제의 해법과는 관련이 없지만, 문제 내용을 구성하는 다양한 대상들(objects)과 대상들의 속성(feature), 그리고 대상이나 속성들을 서술하거나 표현하는 방식과 문제 상황에 대한 서술 내용에 대한 유사성을 말한다. 그리고 구조적 유사성은 문제 해결자가 주어진 문제를 해결할 수 있다고 생각하는 해법 원리나 공식이 이전에 경험하였던 문제의 해법 원리와 유사하다고 생각하는 것을 말한다(Gentner et al., 1993).

4) 정신적 모델(mental model)이라는 것은 다양한 학습상황에서 학생 개인들이 구성하는 인지적 표상을 서술하기 위하여 심리학 문헌들에서 광범위하게 사용되는 용어이다(English, 1997; Harford, 1993).

속하는 단계들을 시각적으로 분리하는 표현과정을 언급하였으며, 그러한 과정이 예제에 대한 해법을 현 문제에 적용할 수 있도록 돋는다고 하였다. 또한 이러한 시각적인 표현과정은 이종희, 김진화, 김선희(2003)의 연구에서 서술된 예제의 문제 구조를 이해한 학생들이 유사한 문제를 해결할 때, 그림이나 도표가 주어진 경우나 참고가 허용된 경우에 문제를 더 잘 해결하였다는 결과를 연관하여 생각해 볼 수 있다. 그 밖에도 관련된 연구들(예를 들면, 이종희, 김진화, 김선희, 2003; 이종희, 김부미, 2003; Evans, 1999, 2001; Steele & Johanning, 2004; Carlson & Bloom, 2005)에서는 문제해결에서의 결정적인 요소로서 다이어그램과 같은 시각적인 표현방법을 언급하였다. Carlson & Bloom(2005)의 연구에서 수학자들은 문제 상황을 표현하기 위한 개념, 사실, 절차에 자발적으로 접근하였으며, 그러한 자발적인 구성은 주어진 문제를 자신들이 이전에 경험했던 문제 유형으로 범주화하는데 도움이 되었다고 하였다. 전문가인 수학자들은 주어진 문제를 이해하기 위한 문제구조에 대한 표현의 구성을 자발적으로 하였으며, 문제들 사이에서 연구 대상자들이 인식한 유사성을 그림으로 표현함으로써 문제 이해에 관련된 도식과 해법에 대한 도식을 잘 연결할 수 있었던 것이다. 이와 같은 다이어그램이나 다른 시각적 표현은 표시(sign)⁵⁾의 사용이라고 볼 수 있다.

Reed(1999)는 주어진 문제를 해결하기 위하여 다이어그램과 같은 시각적인 표현을 특정한 전략이 유효한 것으로 이해한 경우, 문제해결을 성공적으로 수행하는데 더욱 도움이 될 것이라

고 주장하였다. 문제해결 성공에 대한 요인들 중 하나가 지식들 간의 연결을 문제에서 서술된 내용을 이해하기 위한 지식들과 해법에 관련된 지식들을 연결하는 것이라고 볼 때, 그러한 지식들 간의 연결과 구성에서 공통적으로 강조되었던 것은 다이어그램과 같은 시각적인 표현의 사용이었다(예를 들면, 이종희, 김진화, 김선희, 2003; 이종희, 김부미, 2003; Evans, 1999, 2001; Steele & Johanning, 2004; Carlson & Bloom, 2005). 그렇다면 그러한 표현의 사용이 지식들 간의 연결과 어떠한 관련이 있는가를 다음과 같은 맥락과 연결하여 생각해 볼 수 있을 것이다.

어떤 개념적 이해나 문제해결을 위하여 학생들은 구체적인 표현 양식으로부터 수학적으로 추상적인 표현 양식에 이르는 점진적인 방법으로 상황을 이해해간다. 예를 들면, 자리값이나 분수에 대한 개념 학습에서 처음에는 구체물을 사용하고 그 대상을 다시 추상적인 표현 양식으로 사용하는 것이 이에 해당된다고 볼 수 있다. 같은 맥락에서 문제해결 활동을 생각할 때, 이와 같은 문제해결 전략은 일련의 표시를 이용한 사회언어학적인 분석과도 연계될 수 있다(방정숙, 2002). 이러한 점진적인 과정을 본 연구에서는 어떤 수학적 개념이해 과정이 아니라, 문제해결을 위한 풀이과정에서 생각하고자 한다. 학생들은 주어진 문제를 이해하기 위하여 어떤 시각적인 표현 방법을 사용할 것이며, 그 과정은 구체적인 그림이나 다이어그램과 같은 표시로부터 시작하여 추상적인 수학적 표시로 이뤄질 수도 있다. 이러한 해법을 구하는 모든 기록과정을 일련의 표시(chain of signification)에 대한 관점으로 분석해본다면 해법과정을 완성해가는 학

5) 표시(sign)란 것은 학생들이 문제해결을 위하여 유의미하게 기록한 정보라고 볼 수 있을 것이다. 본 연구에서 서술되는 표시의 의미는 학생들이 문제해결 과정에서 기록하는 수학 용어나 문자, 그리고 숫자 등의 상징과 다이어그램 등과 같은 모든 시각적 표현을 포함하는 것이다(예를 들면, Cobb, 2002; Monk, 2000; Hall, 2000).

생들의 첨진적인 사고 과정을 조사할 수 있을 것이다. 기호학적인 관점에서는 일련의 표시과정이 표시되는 것인 기의(signified)와 표시하는 것인 기표(signifier)가 한 쌍을 이루는 것으로 본다. 일련의 표시라는 것은 이와 같은 표시과정이 연쇄적으로 연결되어 있는 것을 뜻하는데, 여기서 이전 단계의 표시의 조합은 후속 단계에서 기의가 되어 새로운 기표를 형성하게 되는 것이다(Evans, 2000). 이러한 표시과정에 대한 관계는 대부분 기표와 기의가 서로 나눠질 수 없는 기표와 기의의 단위가 되어 구성된다. 그것은 심적인 실재고, 머릿속에서의 연상 작용을 통해서 결합된다고 볼 수 있다. 이러한 연상 작용은 기표가 주어졌을 때 그에 대한 기의를 상기하게 되고, 같은 식으로 기의에 대한 기표가 생성되는 것이라고 보는 관점이다. 이에 대한 Saussure (1916/1990)의 모델은 기표와 기의의 관계에 의해서 성립되지만, 프랑스 심리학자 Lacan은 기표와 기의의 경계를 기본 요소로 하여 표시가 계속적으로 다른 표시를 의미하는 과정, 즉 일련의 표시로 설명한다(예를 들면, 김선희, 2003; 방정숙, 2002; Evans, 2000, Hall, 2000). Evans(2000)는 학교수학과 일상생활 사이의 간격을 연결하는 과정을 일련의 표시로 설명하고자 하였다. 처음 단계에서는 어떤 제스처나 숫자와 같은 대상에 대하여 기표가 생성되고, 이러한 이전 단계에 대한 기호의 조합(set)은 다시 다음 단계의 기표와 기의를 생성한다.

본 연구에서는 학생들이 문제해결 과정에서 자신이 해법을 구하는 과정에 유의미하다고 생각하는 모든 기록들, 즉 숫자나 문자, 또는 그리기 식의 표현인 다이어그램 등을 일련의 표시에서의 기호의 조합에 해당되는 기표에 해당된다고 볼 때, 학생들의 문제해결을 위하여 자

신이 구하고자 하는 전략의 구체화, 즉 관련된 공식이 수립되는 과정까지의 수행들을 이러한 관점으로 해석할 수 있을 것이다. 그러므로 이전 문제에 대한 지식과 현 문제해결 과정 사이에서 학생들이 인식한 공통적인 해법 원리를 적용해가는 과정을 일련의 표시로 해석함으로써, 절차적 유사성의 관점에서 학생들의 사고를 해석하고자 하는 것이다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 검사과제와 연구대상

본 연구의 목적은 주어진 문제의 해법을 구하기 위하여 연구 대상자 자신이 알고 있는 것, 믿는 것, 또한 참이라고 생각하는 것과 그러한 정보가 해법을 구하는 과정에서 이전 문제해결에 대한 경험과 관련하여 어떻게 조직화되며 접근하게 되는가를 시각적인 표현에 대한 유사성의 관점에서 이해하고자 하는 것이다. 따라서 학생 개인의 관점에 대한 심층적이고 체계적이며, 내포적인 정보를 이해할 수 있는 사례연구 방법(Patton, 2002)을 적용하여 본 연구를 수행하였다.

본 사례연구를 위하여 유사성을 중심으로 한 학생들의 문제 해결 수행에 대한 연구들(예를 들면, Reed, Dempster, & Ettinger, 1985; Reed, 1987, 1999; Silver, 1981)에서 다뤄진 검사과제들과 우리나라 제7차 수학교육과정의 <7, 8-가 단계>의 ‘일차방정식의 활용’과 ‘연립방정식의 활용’에 수록된 문제⁶⁾를 비교 분석하여 검사과제를 제작하였다. 2006년 11월 중순에 중학교 2학년 학생 2명을 대상으로 예비검사를 실시하

6) 블랙박스, 교학사, 금성, 두산, 디딤돌 출판의 교과서에 해당 단원들에 제시된 문제들을 분석한 결과, <일 문제>에의 수록회수가 가장 적었기에 학생들이 훈련되지 않은 문제라고 볼 수 있는 근거를 마련하였다.

여 다시 수정 및 보완하였다. 우리나라에서 수행된 유사성에 관련된 연구들(예를 들면, 이종희, 김진화, 김선희, 2003; 이종희, 김부미, 2003)의 검사 과제들에서도 공통적으로 일 문제와 혼합물 문제 등을 포함하고 있었다. 따라서 본 연구를 위한 검사과제를 <표 III-1>에서 제시된 바와 같이, <예제> 1문제와 <본 과제> 3문제⁷⁾를 검사 과제로 사용하였다.

본 연구 자료 수집을 위한 연구대상자 선정 방법은 연구자가 연구하고자 하는 사건, 과정 등에 대하여 접근할 수 있는 사례를 선택하는 의도적 표본 추출이다. 따라서 연구자는 목표로 하는 연구의 적절한 사례를 찾기 위해 먼저 사례 선정을 위한 기준을 마련해야 한다. 다시 말해서 누구를 면담하고 무엇을 관찰할 것인지를 결정하기 위해서는 판단을 위한 기준이 필요한 것이다(우정호외, 2006). 이러한 사례 연구를 위한 기준 선정은 해당 연구의 신뢰성과 타당성을 증진시키기 위한 과정이라고 볼 수 있

다. 따라서 사례에 대한 정보를 수집하기 위한 의도적 표본 추출 전략에 대한 구체적인 근거는 첫째, 본 연구는 학습의 효과를 검증하고자 하는 연구가 아니라, 검사과제들(일차 방정식과 연립 일차 방정식의 활용)에 대한 문제해결을 위한 사고과정에 대한 연구이다. 따라서 검사과제에 대한 문제를 해결할 수 있어야 하며, 자신의 문제 해법 과정을 자세하게 설명할 수 있는 학생들이어야 한다. 따라서 수학 성적이 너무 상위권이거나 하위권 학생들보다는 중위권 범위에 속하는 학생들이 보다 풍부한 자료를 제공할 수 있을 것이라고 볼 수 있다. 둘째, 본 연구에서는 문제해법의 풀이과정에 대한 시각적 표현과정의 분석을 목표로 한다. 따라서 문제해법의 풀이과정을 자유롭게 기록할 수 있는 학생들이어야 한다. 그러므로 본 연구자는 적합한 사례를 찾을 수 있는 학생들을 선정해 줄 것을 해당학교(경기도 B중학교) 수학교사들에게 부탁하였다. 수학 교사들은 5명의 중학교

<표 III-1> ‘일하기 문제’에 대한 유사문제인 검사과제

예제	방의 페인트칠을 완성하는데 아버지는 4시간 걸리고 아들은 6시간이 걸린다고 한다. 그렇다면 만약 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?		
	아버지와 아들	형과 동생	어머니와 딸
검 사 문 제	아들이 거실의 페인트칠을 완성하는 시간은 12시간이며, 아버지는 8시간이다. 이 때 먼저 아버지가 전체 거실의 $\frac{1}{4}$ 을 먼저 페인트칠을 하시고 난후에 나머지 거실을 아버지와 아들이 함께 페인트칠을 하려고 할 때, 그 일 마치는데 몇 시간이 걸리겠는가?	형은 그의 집 정원에 있는 문의 페인트칠을 완성하는데 9시간이 걸리고, 동생은 12시간이 걸린다. 형과 동생이 4시간 동안 함께 페인트칠을 한 뒤 동생은 쉬고, 형 혼자서 나머지를 페인트칠하였다. 형이 혼자서 페인트칠을 마치는데 걸린 시간은 얼마인가?	어머니와 딸이 대문을 페인트칠 하려고 한다. 딸이 혼자서 페인트칠을 마치는데 6시간 걸리고 어머니 혼자서 하시면 4시간 걸린다. 그렇다면 쉬지 않고, 어머니와 딸이 둘이서 함께 대문을 페인트칠을 한다고 할 때, 완성하는데 걸린 시간을 얼마인가?(단, 어머니가 혼자서 1시간 먼저 페인트칠을 하신 후에, 나머지를 딸과 함께 페인트칠을 하셨다.)

7) 본 연구의 검사 과제를 작성하는 과정에서 예비 검사를 한 결과, 학생들이 하나의 예제 문제에 대하여 3문제를 초과한 상태부터는 해법에 대한 훈련의 효과가 나타났다. 따라서 본 연구는 어떤 교수 학습 방법에 대한 효과를 검증하는 것이 아니라, 학생들이 문제를 해결하는 그 상황에서 구성하는 유사성을 근거로 문제를 해결하는 현상에 대한 이해가 목적이었기에 훈련의 효과는 의미가 없는 것이다. 따라서 유사 문제 3문제를 검사도구로 선정하여 수행하였다.

2학년 여학생을 선정하여 주었다. 선정된 5명의 여학생들을 대상으로 비형식적 면담을 한 결과, 문제 풀이 과정이 너무나 기계적이거나 적합하지 않은 경우를 제외하고 3명의 여학생들⁸⁾을 본 사례 연구에 대한 연구 대상자로 선정하여 사례 연구를 수행하였다.

본 연구 대상자들은 학교 수학 성적이 중상위권인 중학교 2학년 A, B, C 학생들이었다. 3명의 연구 대상자들은 모두 1또는 2차시⁹⁾에 걸쳐서 면담을 하였으며, 한 차시 당 약 1시간 30분 정도의 시간이 소요되었다. 학생A는 1차시로 면담이 진행되었으며, 연구 대상자 B, C의 경우는 바로 그 다음 날 수행된 2차시로 면담이 진행되었다. 연구 대상자들의 과제 해결 방법은 예제에 대한 해결과정을 보지 않고 자신의 기억을 이용하여 검사과제들을 해결하는 것이었다.

2. 자료 수집과 분석

본 사례연구에서는 연구대상자들에 대한 개별적인 면담을 통하여 지속적인 관찰, 비형식적인 대화 등에 대한 오디오 테이프 녹음과, 연구자와 학생 간의 상호작용을 모두 기록하는 등을 통하여 연구 대상자와 연구자의 의사소통, 비언어적, 언어적인 행동 패턴을 포착하라고 노력하였다. 이러한 방법들을 적용하여 자료 분석을 하기 위하여, 본 연구자는 연구 대상자들을 면담한 모든 면담 내용을 전사하였

고, 그 전사본과 연구 대상자들이 문제해결 과정을 기록한 노트들, 그리고 연구자의 메모나 기록물을 준비하였다.

먼저 각 연구 대상자의 각 검사과제에 대한 사례 별로 순서와 내용대로 녹취하여 기술한 파일을 만든 후에, 현장 노트와 연구 대상자들의 기록들과 문헌 연구 자료들과 비교하면서 파일을 재조직하였다. 다음에는 각 사례 별로 연구 대상자들이 이전 문제해결 경험과 비교하여 주어진 문제를 “비슷하다”거나 “유사하다”라고 언급하는 경우를 유사성의 구성으로 분석하였다. 특히, 본 연구의 논점인 절차적 유사성의 경우는 연구 대상자들이 기록하는 구체적인 풀이 과정에 대하여 분석하였다. 각 연구대상자의 검사과제에 따른 사례들 별로 공통적인 현상과 그렇지 않은 경우를 비교하면서 그 의미를 기록하였고, 그 다음에는 각 연구대상자들 간의 사례들을 비교하였다. 이러한 분석 과정은 각 연구 대상자들의 사례에서 각 검사과제들에 대한 문제 해결 과정에 대한 기록과 면담 자료 등을 근거로 비교하고, 다시 각 연구 대상자들 간의 사례들을 비교 분석하는 사례 내 분석(within-case analysis)과 사례 간 분석(cross-case analysis) 방법들을 사용한 것이다(Creswell, 1998/2006). 특히, 사례 간 분석에서 발견된 범주에 명명하고 발전시키기 위해서는 텍스트 안에 포함되어 있는 생각과 사고 및 의미가 드러나도록 하는 분류 체계인 범주적 집합(categorical aggregation)¹⁰⁾을 사

8) 학생A는 중위권에서도 상위권에 속하는 학생으로 문제해결을 위하여 주어진 정보를 다시 기록하고 특히 그림 등을 사용하여 문제를 해결하는 학생이며, 학생B도 문제해결을 위하여 그리기나 수식을 사용하며 중상위권에서도 중위권에 속하는 학생이다. 그리고 학생C는 문제를 이해하고 해결하는 과정에서 그리기를 사용하지 않고 문제를 읽고 식을 먼저 어떻게 세워야 하는지를 항상 생각하는 학생으로 중위권에서도 상위권에 속하는 학생이었다.

9) 면담 기간이 1차시 혹은 2차시에 걸쳐서 진행된 이유는 문제해결에 대한 시간이 모자라거나 지친 연구 대상자들이 연구자에게 다음 시간에 면담을 할 것을 요청하였기 때문이다.

10) 범주적 집합은 자료 분류 단계에서 사용하는 사례연구 용어이며, 근거이론에서 말하는 개념을 발견하고, 명명하고 발전시키기 위해서는 텍스트를 열어 젖혀서 그 안에 포함되어 있는 생각과 사고 및 의미가 드러나도록 하는 개방형 코딩과 유사하며, 현상학에서 진술을 분류하는 가장 첫 단계와 유사한 분류 단계에서 사용하는 용어이다(Creswell, 2006).

용하여 그 실례를 찾았다. 예를 들면, 사례 내 분석에서 학생들이 해법 원리로 생각하는 공식들을 풀이과정에서 구체화하는 기록들이 자신들의 알고리즘을 적용하는 과정이라는 것과, 사례 간 분석에서 그러한 구체화의 과정이 다르게 범주화된다는 사실을 발견할 수 있었다.

IV. 사례 분석 결과 및 논의

1. 사례연구 분석 결과

학생A는 현 문제의 해법이라고 생각하는 이전 공식을 주어진 문제에 따라 변형하는 과정으로 절차적 유사성을 구성하였으며, 학생C는 처음에는 알고리즘 형식의 공식을 해법으로 생각하여 그대로 대입하였다가 점차적으로 수정해가는 과정을 공통적으로 적용하였다. 그러나 학생B는 변형이 되지 않는 공식과 자신만의 규칙을 적용하여 산술적인 오류만을 수정하는 과정을 공통적으로 구성하였다.

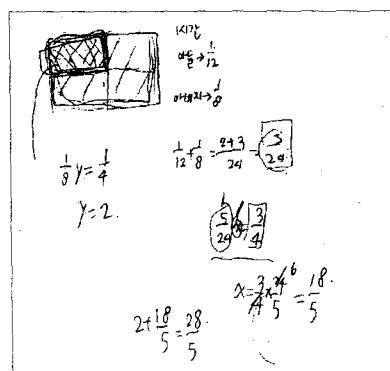
가. 학생A

학생A는 [그림 IV-1, 2]과 같이, 처음에는 문제에서 제시되는 숫자 정보에 명칭을 달고, 다

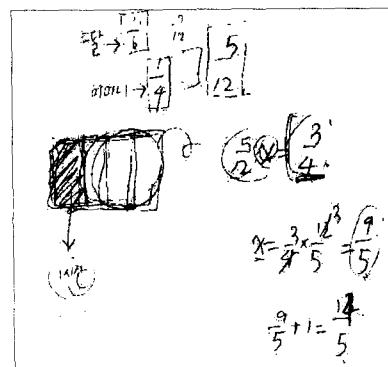
시 그것의 의미를 생각하였다. 그 다음에는 그 의미로 생각한 것을 표시하였다. 학생A의 기록 형태는 그리기나 숫자, 그리고 문자가 혼용되어 있었다. 즉, 학생A는 문제(S-1)을 해결하기 위하여 ‘아들- $\frac{1}{12}$, 아버지- $\frac{1}{8}$ ’과 같이 숫자 정보에 명칭을 붙이는 (기표1)과정을 수행함으로써 문제 정보를 이해하고 그 내용을 이전 경험을 근거로 활성화된 해법에 대한 지식과 연결할 수 있는 토대를 마련한 것이라고 볼 수 있다.

이러한 학생A의 풀이과정은 다음과 같이 해석할 수 있을 것이다. 먼저 문제의 해법을 구하는 풀이과정에서 처음에는 문제내용에서 서술된 숫자 정보나 수학적 의미의 문구나 단어를 기표로 표시하고, 다시 그 표시를 사고의 대상으로 삼아 그 의미(기의)를 생각하는 점진적인 과정으로 해석할 수 있을 것이다. 이러한 과정은 “일련의 표시”로 해석할 수 있을 것이다.

학생A는 문제(S-2)를 해결하는 과정에서도 제시된 숫자 정보를 중심으로 일을 하는 상황이라고 생각하면서, 그 구체적인 상황에 대하여 주어진 ‘9시간’, ‘12시간’이라는 각각의 숫자 정보를 근거로 일의 비율 개념을 생각하면서 표시(기표1)하였다. 그리고 그 기표를 대상으로 의미(기의2)를 생각하면서 ‘함께 일을 하는 상황’에 대한 일의 비율을 (기표2)로 표기한다.



[그림 IV-1] 학생A: 문제(S-1) 풀이 과정



[그림 IV-2] 학생A: 문제(S-3) 풀이 과정

이러한 점진적인 표시 과정에서 학생A의 명명화과정은 그 숫자 정보의 의미를 생각하면서 다시 그리기와 같은 표시(기표2)를 거치면서 전체 문제 구조를 생각할 수 있는 근거가 된 것이다. [에피소드1]에서 나타난 바와 같이, “ $\frac{1}{8} \times x = \frac{1}{4}$ ”과 “ $(\frac{1}{12} + \frac{1}{8}) \times x = \frac{3}{4}$ ”라는 식을 세울 수 있었다.

[에피소드1: 학생A의 검사과제(S-1) 해결 과정에서]

학생A : 이유는요....그림을 그리면 문제 내용이 정리가 되어. 그리고 습관적으로 그렇게 해요. 기호 같은 것이 있다고 해도 우선은 그림을 그려서 정리를 해요.
그리고 다음에 식을 세워요.

연구자 : 그렇게 해야 정리가 되요?

학생A : 네! 머릿속에 ‘식’하고 $\frac{1}{4}$ 을 모두 생각하다가 기억을 하려하니까..

학생A : $(\frac{1}{12} + \frac{1}{8}) = \frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{5}{24}$,
 $\frac{5}{24}x = \frac{3}{4}$ 라고 쓴다.)

연구자 : 그러면 이렇게 식을 쓴 이유는 아까처럼 생각해서 한 시간 동안 하는 일의 양을 구한 것인가?

학생A : 네! 먼저 $\frac{1}{4}$ 을 했으니까요. $\frac{1}{4}$ 은 1이 아니라 $\frac{3}{4}$ 이잖아요

연구자 : 왜?

학생A : 이 만큼만 하면 되잖아요. $\frac{3}{4}$ 만큼

문제(S-3)에서도, 학생A는 일을 하는 상황에 대하여 서술된 내용으로 각 행위자들이 일을 하는 비율을 먼저 표시하고, 그 표시를 대상으로 다시 사고하여 ‘함께 하는 경우’에 대한 일의 비율을 기록하였다. 하지만 학생B와는 다르

게 학생A는 문제를 해결하기 위하여 텍스트로 이루어진 문장체에서 서술된 대상들이나 활동을 정신적 모델로 표상하였다. 즉, 주어진 숫자 정보와 문제 상황이 연결되어 있다는 것이다. 이와 같은 학생A의 사고에 대한 해석은 정보처리의 관점에서 강조하는 상징적인 표상만이 아니라, 활동을 생각한다는 Greeno 등(1993)의 관점을 포함하는 것이라고 볼 수 있다. 이러한 해법 절차에 대한 학생A의 구체적인 과정은 일련의 표시로 설명될 수 있으며, 그것은 구조적 유사성과 절차적 유사성의 원리 단계에서 생각하였던 열린 공식¹¹⁾을 근거로 전개된 절차적 유사성의 구성이라고 볼 수 있다.

정리하면, 학생A의 문제해결 과정에 대한 표시 과정들은 기표에 대한 생각들의 모임인 기의, 그리고 다시 그 기의에 대한 사고의 표시로써 기표를 나타내는 과정이 점진적으로 구성되는 일련의 표시로 해석이 가능하다. 하지만 학생A가 처음에 해법으로 생각한 것은 알고리즘 형태의 열린 공식이었지만, 그 공식은 주어진 문제에서 서술된 텍스트와 숫자 정보에 대한 의미를 생각하고 그것을 표시하는 과정이 반복적으로 수행함으로써 최종적으로는 답을 구할 수 있는 하나의 등식이 만들어 진 것이며, 학생A의 사례들에서 공통적으로 수행된 풀이과정이다. 그러므로 학생A가 구성한 절차적 유사성은 자신의 해법 지식인 열린 공식인 알고리즘을 “일련의 표시”로 구체화한 것이라고 볼 수 있다.

나. 학생B

학생B의 각 검사과제에 대한 사례들을 분석한 결과, 풀이과정에서 공통적으로 적용하고자

11) 본 사례 연구에서는 연구 대상자가 주어진 문제를 해결하기 위하여 해법으로 문자나 숫자가 하나의 알고리즘 형태로 정해진 완성된 공식의 형태가 아니라 부분으로 구성되는 발견술 개념으로 적용되는 공식을 열린 공식이라고 서술하였다.

한 것은 $\frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} = 1$ 과 같은 닫힌 공식¹²⁾의 알고리즘이었다. 학생B는 문제에서 서술된 숫자 정보를 대입하기 위한 자신만의 규칙을 토대로 해법을 구하고자 하였다. 학생B는 닫힌 공식을 적용하기 위한 자신만의 규칙을 사용하는 과정으로 절차적 유사성을 부분적으로 구성하였다. 이러한 구체적인 절차에 대한 유사성은 학생 관점¹³⁾에 대한 것이다. 학생B가 해법으로 인식하는 알고리즘을 적용하기 위한 규칙을 구체적으로 서술하자면, 문제에서 주어진 숫자 정보들을 순서대로 역수로 취하여 x를 곱해서 각각 더하여 그 합을 1로 놓는 것이다.

[그림 IV-3]은 문제(S-1)에 대한 풀이과정이다. 문제(S-1)은 해법 원리로써 닫힌 공식에 대한 기본 형태를 그대로 적용해도 답을 구할 수 있는 문제이다. 그러나 문제(S-2)의 경우에는 마지막으로 제시한 숫자 정보가 시간으로 제시

한 것이기 때문에 공식에 대한 변형이 요구된다. 따라서 문제(S-1)과 뒤이은 문제(S-2)와 문제(S-3)의 해법을 구하는 풀이과정에 대한 분석을 함으로써, 학생B가 해법을 구하기 위하여 공통적으로 사용하는 알고리즘과 규칙이 있다는 것을 발견할 수 있다. [그림 IV-4]는 문제(S-2)에 대한 학생B의 풀이과정이다. 그리고 [에피소드2]는 닫힌 공식을 학생B 자신의 규칙에 따라 적용하는 과정에서 겪는 혼란을 설명하는 것이다. 학생B는 자신의 마음속에 존재하는 공식에 대한 지식과 문제에서 서술된 양적 정보가 연결할 수 없었던 것이다.

[에피소드2: 학생B의 검사과제(S-2) 해결 과정에서]

학생B : 4시간 동안 함께 칠을 한 게 동생은 쉬고, 형 혼자 페인트칠을 했다. 4시간을 한 시간하면 $\frac{1}{4}$ 이 나오잖아요!

연구자 : $\frac{1}{4}$ 은 뭐야?

[풀이]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} = 1 \\ & \frac{2}{24}x + \frac{3}{24}x + \frac{6}{24} = 1 \\ & \frac{5}{24}x = \frac{13}{24} \end{aligned}$$

[그림 IV-3] 학생B: 문제(S-1) 풀이과정

[풀이]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{3}{4} = 1 \\ & \frac{1}{12}x = \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{12}x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

[그림 IV-4] 학생B: 문제(S-2) 풀이과정

- 12) 본 사례연구에서 서술되는 닫힌 공식의 의미는 문자나 숫자로 이루어진 완성된 형태의 알고리즘 형태의 공식으로서, 그대로 적용되거나 해당 문제의 해법 공식을 변형해야 하는 경우에도 변형이 되지 않는 공식을 말한다.
- 13) 연구자 관점에서 본다면 학생B의 닫힌 공식은 주어진 해법을 구할 수 있는 해법이 아니기 때문에 구조적 유사성으로 언급되지 않을 수 있다. 그러나 본 연구에서는 학생의 관점에서 구성되는 유사성의 분석에 초점을 두었기에 그러한 닫힌 공식을 구조적 유사성으로 언급할 수 있으며, 닫힌 공식을 적용하려는 구체화의 과정인 풀이 과정에 대한 공통적인 사항으로 서술하였다.

학생B : 한 시간 동안 한 속력 같은 거요.

연구자 : 한 일의 양?

학생B : 네! 한 일의 양이요! 함께 한 거잖아요! 얘는 근데 일을 한 뒤에 형 혼자 한 시간 동안 페인트칠을 했다고 했잖아요!

아요! 그러니까 나머지는 $\frac{3}{4}$ 이 될 거 아니에요! 그래서 여기다가 $\frac{1}{4}$ 을 더 해야 할지 $\frac{3}{4}$ 을 더해야 할지 헷갈려요!

[에피소드2]와 [그림 IV-4]에서도 나타나듯이, 문제에서 제시된 “형과 동생이 4시간 동안 함께 페인트칠을 한 뒤.”라는 내용 때문에 학생B는 공식의 마지막 항에 적용해야 하는 숫자의 형태가 어떤 것이어야 하는가에 대하여 갈등을 겪는다. 문제(S-1)의 경우에는 분수가 처음부터 제시되었는데, 본 문제에서는 그렇지 않았기 때문이다. 즉, 문제(S-2)에서 제시된 ‘4시간’의 의미를 학생B는 분수 $\frac{1}{4}$ 형태에 맞추어야 하기 때문에 4분의 1로 적용하여야 했다. 그러나 또 다른 서술 내용인 ‘나머지’라는 부분 때문에 4분의 1의 나머지인 4분의 3을 적용하여야 하는지를 갈등하였다.

학생B는 문제(S-1)와 문제(S-2)를 해결할 때와 같이, 문제에서 서술된 숫자 정보를 해법 원리를 근거로 구체화하기 위한 과정은 자신의 규칙으로 표시하는 것이었다. 그러한 과정이 문제(S-1)의 경우에는 학생B의 사고가 참인지 잘못된 것인지를 드러나지 않았지만, 문제(S-3)에서는 ‘어머니가 1시간을 먼저 혼자서 페인트칠을 하신 후에’라고 표현되었다. 따라서 학생B는 자신이 선택한 해법절차에 그대로 적용한, 즉 ‘1시간’의 ‘1’을 역수로 취하여 ‘1/1’을 더하였던 것이다. 그러나 어머니는 그 일을 하는데 4시간 걸리므로, 1시간 동안 일을 했다면 그

일의 $1/4$ 을 한 것이다. 그러므로 $\frac{1}{4}$ 을 더해야 하는데, 학생B는 문제에서 주어진 수의 역수를 더했었던 기억을 해법절차에 그대로 적용하였다.

이와 같이 학생B가 해법의 풀이과정에서 구체화하려는 것은 자신이 기억하는 규칙을 근거로 변형되지 않는 공식의 적용이다. 학생B는 자신이 생각하는 규칙과 문제 정보가 맞지 않는 문제(S-2)나 문제(S-3)의 경우에는 혼란을 겪었다. 학생B는 자신의 알고리즘을 적용하기 위하여 자신의 규칙을 사용하는 과정에서 계산상의 오류가 발견되자 자신의 해법 과정에 문제가 있다는 것을 알게 되었다. 그러나 자신의 오류를 해결하는 방법은 단지 숫자를 바꾸거나 연산 기호를 바꾸었다. 이와 같이 학생B는 자신의 알고리즘과 규칙을 적용하기 위한 산술적인 시도로 절차적 유사성을 부분적으로 구성하였다.

다. 학생C

[에피소드3]에서 서술된 바와 같이, 학생C는 “비율1 × 시간1 + 비율2 × 시간2 = 1(전체 일의 양)”라는 알고리즘을 생각하면서 문제에서 제시된 숫자정보를 그 공식에 적용하기 위하여 계속적인 수정과정으로 절차적 유사성을 구성하였다. 이와 같이 변형이 가능하지만 알고리즘 형태로 시작되었다는 점에서 학생C가 구조적 유사성으로 생각하였던 해법 공식은 ‘반열린 공식’이라고 볼 수 있다.

[에피소드3 : 학생C의 검사과제(S-1) 해결 과정에서]

연구자 : 이 식($\frac{1}{8}x = \frac{1}{4}$)의 의미는 뭐고 그 다음에 이 식($\frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x = \frac{3}{4}$)으로 넘어간 이유는 무엇인가요?

학생C : 여기서는 아버지가 먼저 거실에서 $\frac{1}{4}$ 를 칠했으니까요. 여기서 그냥 $\frac{3}{4}$ 를 한 건 아니고, 아버지 $\frac{1}{4}$ 칠하는 대로 시간이 걸려서, 일단 아버지가 $\frac{1}{4}$ 를 칠하는데 걸리는 시간을 구해야 하구요. 그 다음에 남은 거실 $\frac{3}{4}$ 를 함께 칠할 때 걸리는 시간을 구해야....

연구자 : 왜? $\frac{3}{4}$ 이 되요?

학생C : 어! 전체 거실을 다 칠하는데 걸리는 아, 거실 다 칠 할 때요! 그때 해야 되는 일의 양을 1이라 했으니까요. 여기서 먼저 $\frac{1}{4}$ 를 해두었다고 했으니까 $\frac{3}{4}$ 이 나머지라고 했어요.

연구자 : 앞에서의 1이 여기서는 $\frac{3}{4}$ 으로 바뀐 것인가요?

학생C : 네!

연구자 : 그런데 어떻게 그 식을 머릿속에 두고 그 머릿속에 1이라고 안 쓰고 $\frac{3}{4}$ 이라고 바꿀 수가 있어?

학생C : 일단 아까 가지고 있었던 식은요 어. 함께 같이 했을 때 일이 1이었으니까요. 여기 이 문제는 어보면 일이 1이 아니고요! 아빠가 먼저 해놓았으니까 $\frac{3}{4}$ 이 되 가지구요. 여기 1이 안 나오고 기에 놓았기 때문에. 여기선.....

($\frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x = \frac{3}{4}$ 를 전개하여 $x = \frac{8}{15}$ 라고 기록한다)

[그림 IV-5]에서 나타난 바와 같이, 학생C는 문제(S-2)의 해법을 구하기 위하여 문제에서 제시된 내용을 숫자나 문자로 표시하였지만, 그 과정이 항상 정확하게 구성되지는 않았다. 학생C는 자신의 기록이 잘못된 수식이라는 생각이 들면 수정하였다. 예를 들면 “형과 동생이 함께 4시간 동안 일을 한다.”라는 텍스트를 처음에는 “ $\frac{1}{9}x + \frac{1}{12}x = 4$ ”라고 표시하였다. 그런 다음에는 다시 문제를 읽고 자신의 표시를 보면서 ‘4’를 지워서 ‘1’로 바꾸고, ‘x’를 지우고 ‘4’로 바꾸었다. 결과적으로는, 학생B의 풀이과정은 “ $\frac{4}{9}x + \frac{4}{12}x = 1$ ”으로 수정되었다. 그런 다음 x 를 구하였다.

[그림 IV-6]에서 나타난 바와 같이, 문제(S-3)를 해결하는 과정에서도 학생C의 풀이과정은 그리기식의 다이어그램과 같은 시각적인 표현을 사용하지 않고 단지 문자나 숫자만을 사용하여 자신의 알고리즘을 문제해법에 적합한 형태로 수정하는 과정으로 절차적 유사성을 구성하였다. 이러한 과정도 학생A와 마찬가지로 “일련의 표시”관점으로 해석할 수 있을 것이다. 정리하면, 학생C는 모든 검사과제를 해결하

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\frac{1}{12}} &= \cancel{\frac{3}{4}} 1 \\ \frac{4}{9} + \cancel{\frac{4}{12}} x &= x \\ \frac{1}{9} &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)} &= \frac{3}{4} \\ \cancel{\frac{4}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}} x &= \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3}x + x &= 3 \\ \frac{5}{3}x &= 3 \\ x &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

[그림 IV-5] 학생C: 문제(S-2)' 풀이 과정 [그림 IV-6] 학생C: 문제(S-3)' 풀이 과정

기 위하여 처음에는 알고리즘적인 해법 공식인 “비율1 × 시간1 + 비율2 × 시간2 = 1(전체 일의 양)”을 대입하고자 하였다. 그러나 문제의 서술 내용을 읽고 확인하면서 처음에 기록하였던 공식을 계속적으로 수정하여 문제에 적합한 해법으로 구체화하였으며, 그러한 풀이 과정은 일련의 표시 관점으로 해석이 가능하다. 이러한 구체적인 알고리즘의 수정 과정이 학생C가 구성한 절차적 유사성이다.

2. 논의

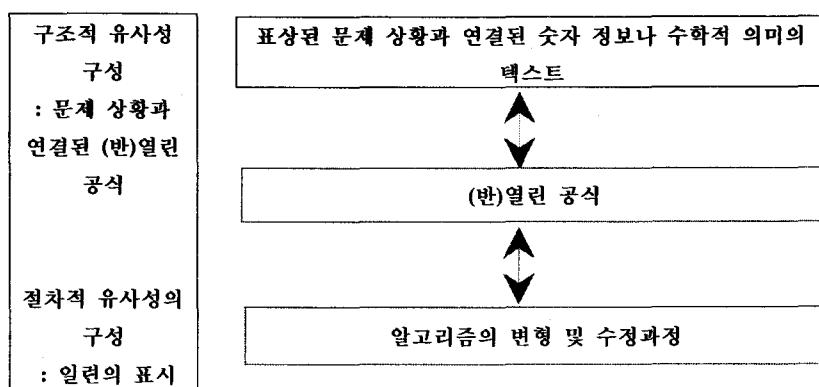
학생들은 대수 문장제의 해법을 구하기 위하여 문제 정보를 기록하고 그 기록을 근거로 다시 새로운 기록을 생성하거나 이전 기록을 수정하여 다른 기록의 과정으로 변화시켰다. 이러한 행위들의 연속을 본 연구에서는 일련의 표시로 해석하였다.

학생A는 [그림 IV-7]에서와 같이, 학생A는 변형이 가능한 열린 공식을 해법으로 인식하는 절차적 유사성의 원리 단계를 구성하였다. 본 연구에서 서술되는 해법에 대한 적용의 과정이라는 것은 학생들이 인식한 해법 원리를 근거로 문제에서 서술된 숫자 정보를 사용하

여 구체적인 연산으로 전개하는 것을 말한다. 학생A는 문제에서 제시된 각각의 숫자 정보들 간의 관계를 파악하기 위하여 숫자나 문자를 사용하여 수식을 부분적으로 기록하거나 그리기 식의 표현 방법을 사용하였다.

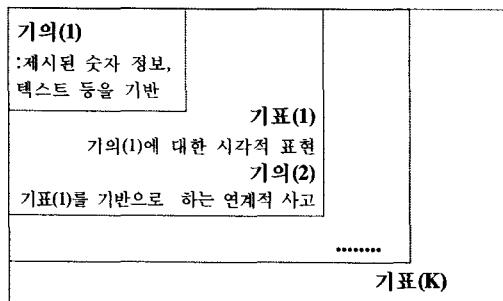
이러한 학생A의 해법 적용을 위한 풀이과정은 “일련의 표시” 관점으로 해석할 수 있을 것이다. 그 과정은 먼저 주어진 문제 정보나 상황에 대한 기의를 구성하여 그것을 기표로 나타내고, 다시 학생A가 기록한 기표와 기의에 대한 조합은 다음 단계의 기의로 작용하여 기표를 생성한다. 이와 같은 일련의 표시는 점진적으로 계속되어 최종적으로 해답을 구할 수 있는 식이 결정된다.

학생C의 해법 과정은 학생A와 본질적인 면은 같다고 볼 수 있지만, 구체적인 풀이과정은 달랐다. 학생C는 현 검사과제를 해결하기 위하여 <예제>를 해결하기 위하여 사용하였던 기본 공식을 그대로 적용하여 해법 공식으로 방정식을 세웠다. 하지만 처음 방정식을 그대로 적용하지 않고 계속적인 문제 정보의 확인 과정에서 문제 상황과 숫자 정보와의 연결을 시도하였다. 이러한 학생C의 방정식에 대한 수정과정도 학생A가 수행하였던 일련의 표시와 유사한



[그림 IV-7] (반)열린 공식에 대한 유사성 적용 과정

맥락에서 생각해 볼 수 있다.



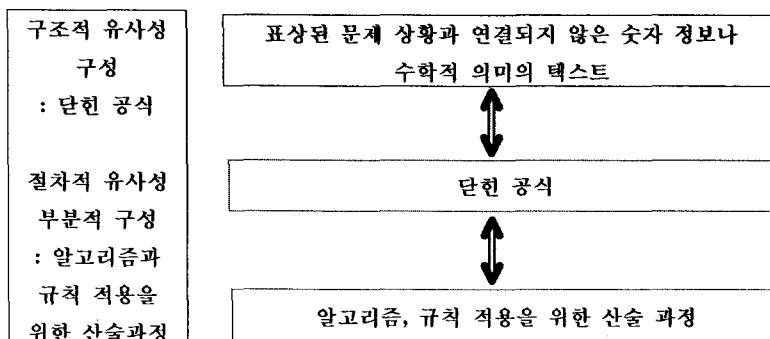
[그림 IV-8] 일련의 표시 과정(학생A, 학생C)

[그림 IV-8]에서와 같이, 학생C는 문제 내용을 사고의 대상(기의1)으로 하여 처음에는 문제에서 제시한 숫자만을 대입하여 이전 공식을 알고리즘으로 대입하여 방정식을 세웠다. 이때 처음 세워진 방정식은 (기표1)으로 서술할 수 있다. 그리고 자신이 기록한 그 방정식(기표1)은 다시 사고의 대상(기의2)이 되어 문제 내용의 확인과 수정을 통하여 또 다른 방정식(기표2)으로 표시되었다. 이와 같이 학생C는 알고리즘적인 공식을 해법 원리로 인식하여 숫자와 문자만으로 구성된 일련의 표시로 풀이과정을 구성하였다.

학생B가 주어진 문제에 대한 해법 공식으로

인식하는 것은 이전 경험을 근거로 구성한 변

형되지 않는 “ $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + (\frac{1}{\Delta}) = 1$ ”과 같은 형태였다. 이와 같은 공식을 구체화하는 학생B 만의 규칙은 다음과 같다. 예를 들면, ‘아들은 12시간, 아버지는 8시간’이라는 정보를 담한 공식에 대입하기 위하여 ‘역수’로 변환하여 대입하였다. 그리고 “어머니가 1시간을 먼저 페인트 칠을 하셨다”는 문제 내용은 전체 일의 일부분을 마쳤다는 것이다. 그러나 학생B는 ‘1시간’을 다른 수에 곱하거나 더하는 식으로 자신이 생각하는 담한 공식의 형태에 맞추고자 하였다. 정리하면, 학생B의 규칙은 문제에서 시간으로 제시되는 숫자 정보는 역수로 취하여 x 을 곱하고, 문제에서 서술된 행위자들의 일을 하는 시간이 아닌 다른 숫자 정보는 세 번째 항에 해당되는 숫자 정보라고 생각하는 것이다. 이와 같이 학생B가 생각하는 해법의 적용 규칙은 문제에서 상황을 설명하는 단어나 문구와 연결된 것이 아니라, 숫자 정보를 중심으로 하는 알고리즘적인 것이다. [그림 IV-9]에서 제시된 바와 같이, 학생B의 규칙은 그냥 일반적인 개념으로 동떨어져 존재하는 것이기에 문제에서 서술되는 내용이 어떤 것인가에 문제에서 서술되는 내용이 어떤 것인가에 자신만의 규칙과 알고리즘의 적용을 위한 산술적인



[그림 IV-9] 닫힌 공식에 대한 유사성 적용 과정

구체화 과정이 풀이과정에 대한 유사성으로 구성되었다. 이때 학생B가 구성하는 절차적 유사성은 일련의 표시과정이 아니라, 단지 학생B가 기억하는 규칙의 적용이라고 볼 수 있다. 이러한 결과는 Reed & Bolstad(1991)와 Reed & de la Pena(1996), 그리고 Novick & Holyoak(1991)의 연구에서 해법 공식을 사용하는 과정에서 해법에 대한 구체적인 절차나 숫자대응에 대한 힌트를 미리 주어도 문제해결에서 완전하게 성공할 수 없었던 이유들의 하나인 경험적 자료라고 볼 수 있다. 이때 연구 대상자들은 제시 받은 숫자 대응에 대한 힌트로 달힌 공식을 연상한 것이라고 볼 수 있으며, 그 힌트를 받은 학생들의 이해는 다양할 수 있을 것이다. 따라서 해법을 구체화하는 문제해결자 자신의 규칙만으로도 문제가 성공적으로 해결될 수 있는 문제가 검사과제로 제시된 경우에는 정답을 할 수 있지만, 그렇지 않은 경우는 할 수 없다.

이와 같이 연구 대상자들은 해법에 대한 인식 과정에서 자신들이 생각한 해법 원리를 구체적으로 전개하는 과정에 대한 유사성을 절차적 유사성으로 구성하였다.

학생A는 인식 과정에서 열린 공식을 해법 공식으로 인식하여 그 공식을 구체적으로 전개하는 과정에서 숫자나 문자, 그리고 그리기 식의 표현을 사용하여 일련의 표시로 풀이과정을 구성하였다. 그리고 학생C는 처음에는 이전 문제에 사용하였던 일에 대한 공식을 알고리즘으로 적용하였지만 문제를 재확인하면서 그 방정식을 주어진 문제에 적합한 형태로 수정해나가는 과정을 문자와 숫자만으로 구성된 일련의 표시로 풀이과정을 구성하였다. 이들과 다르게 학생B는 처음에 인식한 닫힌 공식인 알고리즘과 자신만의 규칙을 적용하기 위하여 문제에서 제시한 숫자 정보를 대입하여 산술적으로 전개하는 절차적 유사성을 부분적으로 구성하였다.

따라서 학생들이 풀이과정에서 공통적으로 구성하는 절차적 유사성은 이전 경험을 근거로 구성한 알고리즘 형식의 공식의 구체화 또는 대입의 과정이라고 볼 수 있다. 그러나 그러한 각 연구대상자들의 풀이과정에 대한 차이는 어떠한 방법으로 알고리즘을 적용하는가에 대한 해법을 위한 풀이의 표시과정과 숫자 정보가 문제 내용과 연결되었는가에 따라 다르게 구성되었다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 해법의 구체화 과정을 학생들의 시각적인 표현과정과 연결하여 “일련의 표시”로 해석함으로써, 주어진 정보에 대한 표상과 그 표상에 대한 기록과, 다시 그 기록에 대한 자신의 사고가 점진적으로 구성되어야 함을 강조할 수 있었다. 특히 그리기 식의 표시 과정을 문제 내용과 자신의 알고리즘을 연결하도록 하는 부가적인 역할이 있었다고 볼 수 있을 것이다.

그렇지만 이러한 연구 결과를 보다 일반화된 관점에서 생각하기 위해서는 검사과제가 일 문제에 한정되어있었다는 점과 중상위권의 수학 성적을 가진 학생들을 대상으로 한 점을 한계로 지적할 수 있을 것이다. 그러나 학생들의 문제해결 활동에서 그와 같이 한정된 문제에 대한 활동이 유사성에 대한 유형이나 구성 과정의 제한점으로 작용했다기보다는, 학생들이 민감하게 반응하는 해당 문제의 표면 정보에 관련된 것이라고 볼 수 있다. 그러므로 다양한 검사과제의 사용은 학생들이 이전에 경험하였던 다양한 문제해결 경험에 대한 자료를 조사할 수 있을 것이라고 본다.

V. 결론 및 제언

본 연구의 목적은 학생들이 이전 문제해결에 대한 경험과의 유사성을 근거로 현 대수 문장

제를 해결할 때, 인식한 유사성을 풀이과정에 어떻게 적용하는가, 즉 어떠한 절차적 유사성을 구성하는가를 조사하고자 하는 것이다. 사례연구 결과, 연구대상자들이 이전에 경험을 근거로 관련된 문제의 해법을 구하기 위하여 실제적인 풀이과정에서 구성하는 절차적 유사성은 알고리즘적인 지식의 구체화과정이라는 것을 발견할 수 있었다. 또한 그러한 알고리즘적인 지식이 구체적인 풀이과정에서 어떻게 표시되는가에 따라 차이점이 있다는 것도 발견할 수 있었다.

정리하면, 학생들은 관련된 대수 문장제를 해결하기 위하여 이전 경험을 근거로 인식한 알고리즘 형태의 지식을 풀이과정에서 사용하고자 한다는 것을 알 수 있었다. 또한 그러한 알고리즘을 어떻게 구체화하는가에 따라 일련의 표시 과정의 구성으로서의 절차적 유사성이 구성되거나, 아니면 자신만의 규칙에 의하여 알고리즘을 사용하는 무의미한 산술적 표현인 절차적 유사성으로 구성되었다. 특히 일련의 표시로 구성되는 절차적 유사성은 다시 두 가지로 구분되는데 그것은 알고리즘을 그대로 적용하여 수정해가는 과정과, 처음부터 문제에서 제시하는 상황과 숫자 정보를 연결하려는 시도에 의해서 변형되는 일련의 표시의 구분이 그것이다. 이러한 절차적 유사성의 차이는 학생들이 주어진 문제 내용에 대한 정신적인 모델을 구성하였는가의 여부에 관련된 것이라고 볼 수 있다. 결국 학생들이 대수 문장제 해결에 대한 경험을 근거로 인식하는 알고리즘이 어떠한 것인가는 매우 중요하며, 또한 관련된 문제 해결에서 자신이 인식하는 알고리즘적 지식을 올바르게 적용하도록 하기 위해서는 풀이 과정에서 기록되는 표시들의 의미를 사고해야 한다고 볼 수 있을 것이다.

따라서 본 연구 결과는 학생들이 대수 문장

제 해결 경험과정에서 습득하는 지식이 어떠한 것인가에 대한 심층적인 연구, 또는 학생들이 가지고 있는 알고리즘적 지식의 옮바른 적용을 위한 방안 모색 연구에 대한 기본 자료로 사용될 수 있을 것이다.

참고문헌

- 김선희(2003). 수학적 지식 접유에 관한 기호학적 고찰. 이화여자대학교 대학원 박사학위논문.
- 김치수·김성도·박인철·박일우(1998). 현대 기호학의 발전. 서울대학교출판부.
- 박현정·이종희(2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석. *수학교육학 연구*, 16(2), 115-138.
- 방정숙(2002). 수학학습에서 도구의 역할에 관한 관점: 수학적 어포던스와 상황적 어포던스의 조정. *수학교육학 연구*, 12(3), 331-351.
- 우정호 (2003). *수학 학습-지도 원리와 방법*. 서울: 서울대학교.
- 우정호·정영옥·박경미·이경화·김남희·나귀수·임재훈(2006). *수학교육학 연구방법론*. 서울: 경문사.
- 이종희·김부미(2003). 문장제 해결에서 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 분석. *학교수학*, 5(3), 361-384.
- 이종희·김진화·김선희(2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. *수학교육*, 42(3), 353-368.
- Catrambone, R. (1996). transferring & modifying terms in equations. *Proceeding of the 18th annual conference of the cognitive science society*, 301-305.

- Catrambone, R. (1996). Transferring & modifying terms in equations. *Proceeding of the 18th annual conference of the cognitive science society*, 301-305.
- Carlson, Marilyn P. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45 - 75.
- Chen, Z. (2002). Analogical problem solving: A hierarchical analysis of procedural similarity. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 28(1), 81-98.
- Chen, Z. & Mo, L. (2004). Schema-induction in problem solving: A multidimensional analysis. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 30(3), 583-600.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental model in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.
- Creswell, J. W. (2006). *질적 연구 방법론; 다섯 가지 전통*. (조홍식, 정선옥, 김진숙, 권지성 역). 서울: 학지사. (영어원작은 1998년 출판).
- English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, & images*. Mahwah New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Evans, J. (1999). Building bridges: Reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 23-44.
- Evans, J. (2000). Adults' mathematical thinking and emotions. London and New York : RoutledgeFalmer.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Kintsch, W. & Greeno, J. C. (1985). Understanding & solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. London & New Delhi: Sage Publication.
- Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 13, 124-139.
- Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. Sternberg(Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp.39-67). Norwood, NJ: Ablex.
- Reed, S. K. (1999). *Word Problems*. Mahwah New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Reed, S. K. & Bolstad, C. A. (1991). Use of examples and procedures in problem solving. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 17, 753-766.
- Reed, S. K., & Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 11, 106-125.
- Reed, S. K., & de la Pena, K. (1996). *Predicting generalization gradients for*

- adapting solutions.* Unpublished manuscript, San Diego State University.
- Steele, D. F. & Johanning, D. I. (2004). A schematic view of problem solving and development of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 65-90.
- Strauss, A. L. & Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln(Eds.), *Handbook of qualitative research*(pp.273-285). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Saussure, F. de. (1990). **일반 언어학 강의.** (최승언 역). 서울: 민음사. (불어원작은 1916년 출판).
- Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향.** (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어원작은 1996년 출판).
- Whitehead, A. N. (2004). **교육의 목적.** (오영환, 역). 서울: 궁리 출판. (영어원작은 1967년 출판).

An Analysis of the Student's Algebra Word Problem Solving Process

Park, Hyun Jeong (Ewha womans university, Graduate schoolr)

Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

The purpose of this paper was to evaluate how students apply prior knowledge or experience in solving algebra word problems from the chain of signification-based perspective. Three middle school students were evaluated in this case study. The results showed that the subjects formed similarities in the process of applying knowledge needed for solving a problem. The student A and C used semi-open-end formulas and closed formulas as solutions. They then formed concrete shape for each solution using the chain of signification that was applied for solution by forming

procedural similarity. At this time, the chain of signification could be the combination of numbers, words, and pictures (such as diagrams or graphs) or just numbers or words. On the other hand, the student C who recognized closed formulas and her own rule as a solution method could not formulate completely procedural similarity due to many errors arising from number information. Nonetheless, all of the subjects showed something in common in the process of coming up with a algorithm that was semi-open-end formula or closed formula.

* key words : chain of signification(일련의 표시), procedural similarity (절차적 유사성), closed formulas(닫힌 공식), semi-open-end formulas(반 열린 공식), open-end formulas(열린 공식)

논문접수 : 2007. 2. 11

심사완료 : 2007. 3. 6