대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.1, 119-139. Mar. 2007

이차곡선 학습에서 고등학생들의 오개념 분석[1)]

홍 성 관*·박 철 호**

이차곡선은 고등학교 기하 내용의 중요한 개념의 하나이다. 그러나 교수-학습 상황에서 학생들은 단순히 대수적인 접근과 해석기하적인 접근만 시도하므로 그 본질적인 기하학적 의미를 파악하지 못하며 단순한 기계적인 계산만을 수행하여 문제를 풀어나가려 하기 때문에 여러 가지 오개념(misconception)을 가지게 된다. 이 논문은 효과적인 이차곡선 교수학습 연구의 일부로, 학생들의 오개념을 인지적 관점, 심리학적 관점, 교수학적 관점에서 분석하고 그 원인을 분석하였다. 연구 결과, 학생들의 직접적이고 다양한 작도 경험의 부재가 오개념의 주된 원인이 되었다. 이차곡선에 대한 교수-학습은 기하적인 관점으로 접근 한 후 대수적인 관점으로 연결시켜야 할 필요성과 오개념에 대한 정확한 진단은 효과적인 교수-학습의 기초가 됨을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

역사 발생적 원리의 도입을 생략한 채, 정의로부터 출발하는 기하학의 형식적이고 공리적인 구조의 특징은 그것을 학습하려는 많은 학생들에게 장벽을 느끼게 한다. "타원이란, 두 정점으로부터 거리가 같은 점의 집합이다."에 대하여 학생들의 "도대체, 누가, 왜 이런 정의를 만들게 되었을까?"라는 의문은 당연한 것이다.

> 기하의 연역적인 전개는 기하학적 지식을 탈개인화된 공적인 학문적 지식으로 변환시킨 것인바, 여기서 Freudental(1973)이 지적한 반교수학적인 전도가 일어난다. …학생 개개인이 기성의 기하학적 지식에 대하여 개인화, 배경화 과정을 거쳐 기하화를 경험함으로써 기하학적 지식을 구성하기 위한 기하학의 교수학적 변환에 대한 많은 연구가 요구된다.(우정호, 1998, p307)

이차곡선은 고등학생의 수학Ⅱ 단원에서 다루어진다. 현재 인문계 고등학교 교실 환경은 상당히 변화되었지만 지필 환경을 벗어나기 어렵다. 따라서 이차곡선을 교수-학습하기 위한 교수학적 변환에도 많은 제약이 따른다. 이차곡선의 핵심 개념의 하나는 자취(locus)인데, 자취를 지필환경에서 다루기에는 어려움이 많다. 지필 환경에서 기하 교육의 문제점은 Daniel Scher(2002), Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A.(1998) 등, 이미 많은 사람이 언급하였지만, 주로 중학생 혹은 대학생에 관한 연구였고, 지필 환경이 고등학생의 기하 개념 학습에 미친 영향을 다루는 연구는 부족한 형편이다. 그러므로 현재의 지필환경과 대학입시라는 상황이 만들어내는 극단적인 교수현상인 '형식적 고착'이 상시적으로 발생하는 환경에서 수학적 오개

---

* 부산대학교 사범대학(aromhong@hanafos.com)
** 부산대학교 대학원(pkch510@hanmail.net)
1) 이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음

념이나 오류를 실증적인 자료를 통하여 분석하는 것은 의미 있는 작업이 될 것이다.

구성주의(constructionism[2]) 이론의 핵심은 지식은 전이되는 것이 아니라 학습자의 마음속에서 적극적으로 구성되는 것이다. Kafai & Resnick에 의하면, 이러한 구성은 '물리적 구성'을 통하여 '정신적 구성'과 관계된다. (김화경, 2006, p13에서 재인용) 그런데 현재의 수학 교과서와 이차곡선에 대한 교수-학습 상황은 지식이 전이될 수 있다는 전제 하에, 수학적 정의를 먼저 제시하고 예제풀이를 통한 정신적 구성을 시도하고 있다. 따라서 물리적 구성을 생략하거나 등한시하는 환경에서 발생할 수 있는 학생들의 '인지적 장애'는 무엇인지 혹은 지필 환경의 제한점으로 인하여 대수적 표현을 중요하게 생각하는 이차곡선에 대한 교수-학습 상황으로 인하여 발생하는 이차곡선에 대한 오개념이나 오류가 무엇인지에 대한 실증적인 연구가 필요한 상황이다.

수학적 개념을 학습할 때 제한적인 표현 제시로 비롯되는 원형적 표상으로 인한 오개념의 형상을 막고, 원형의 긍정적인 측면을 살릴 수 있는 매체로 컴퓨터의 역할을 강조한다.(장혜원,1999) 이런 관점에서 이차곡선을 효과적으로 다루기 위해서 탐구형 소프트웨어로서 동적기하가 필요하다는 연구는 국내에서도 많이 진척되었다.(황우형 · 차순규, 2002; 정성두, 2002; 박기영 · 강순자, 2004) 그러나 많은 교사들은 여전히 지필환경(혹은 칠판과 분필)을 벗어나지 않는다. 그 배경에는 동적기하의 사용을 단순한 수업방법의 하나로만 인식하는 교사의 신념 또는 수학교육관과 관련이 있을 것이다. 이러한 교사의 신념체계 혹은 수학교육관의 변화를 이끌어내려면 기존의 수학 교수학습 상황이 분명한 문제점을 만들어낸다는 사실을 구체적으로 밝혀내는 것이 중요할 것이다. 왜냐하면 새로운 기자재의 사용, 새로운 교수-학습 방법 적용의 성공여부는 교육과정을 해석하고 실행하는 교사의 지식과 신념에 의하여 영향을 받기 때문이다.(Romberg & Capenter,1986)

한편, 최근의 연구에서 '수학적 오개념'은 학습자의 학습을 지속적으로 방해할 수도 있으나, 적용해야할 새로운 상황에서 변증법적으로 변화 성장할 수 있는 개념으로 인식하기도 한다. 이런 관점에서는 수학적 오개념을 전문가의 정확한 수학적 개념으로 대체되어야할 대상으로만 한정하는 것이 아니라, 정확한 수학적 개념으로 성장하기 위한 발판으로 활용하여, 개념 성장의 발전적이고 점진적인 과정을 경험할 수 있는 기회로 인식하는 경향도 있다.(김부미, 2006) 따라서 이차곡선에 대한 오개념은 학생들이 바른 개념으로 성장하는 과정과 기회가 될 수 있으므로, 이차곡선에 대한 오개념에 대한 실제적이고 구체적인 연구가 필요하다고 말 할 수 있다. 따라서 다음과 같은 연구 문제를 정하였다.

첫째, 지필 환경에서 이차 곡선의 정의, 이차곡선과 직선, 자취로서 이차곡선, 이차곡선의 접선의 성질에 대하여 학생들은 어떤 오개념을 가지고 있는가?

둘째, 이차곡선과 관련한 문제풀이 과정에서 학생들은 어떠한 오류 유형을 나타내는가?

II. 기하 학습에서 오개념 형성에 관한 이론적 배경

수학교육에서 가장 중요한 주제의 하나는

2) constructivism과 constructionism 모두 '구성주의'로 번역되고 있다. 김화경(2006)은 Ackermann(2004)에 근거하여 Piaget의 constructivism은 교육이론보다는 인지이론으로 해석하고 Papert의 constructionism은 보다 실제적이고 교육적인 이론으로 해석한다. 이런 의미에서 constructionism으로 사용한다.

"학생들이 어떻게 몰랐던 사실을 알게 되는가?"일 것이다. 즉 "어떻게 수학적 개념을 형성하는가?"에 대한 질문일 것이다. 이것은 어떻게 인식이 이루어지는가에 대한 질문이다. 여기에 대한 설명은 인간의 사고과정이 복잡하고 다양한 것처럼 몇 가지 이론으로 명쾌하게 설명될 수는 없지만, 최근의 주요한 경향은 구성주의적 인식론이다.

구성주의적 관점은 학자들마다 약간씩 차이가 있지만, 피아제의 경우, 수학적 개념 형성과정을 '반영적 추상화'라는 관점으로 설명하고 있다. 쉽게 말하면 학생들이 새로운 지식을 형성하는 것은 자신의 기존의 인지구조에 새로운 개념을 동화시키거나 새로운 개념을 받아들이기에 적절하도록 기존의 인지구조를 조절하여 지식의 관계망을 형성하였음을 의미하는 것이다. (우정호, 2000) 동시에 이러한 관점은 구성주의적 인식론의 출발점을 이루고 있다. 구성주의적 관점의 핵심은 학생이 조작(manipulation)과 구성(construction)이라는 활동을 통하여, 학생 스스로 지식을 구성한다는 것이다.

그러나 이러한 인식발달 과정에서 학생들은 수학 개념들을 정신적으로 조작해서 각자 나름대로 개념이미지를 만들기도 하고, 이 개념 이미지는 '인지적 장애(cognitive obstacle)'를 일으키기도 한다. (David Tall, 1991; 류희찬 · 조완영 · 김인수(역) 2003) '인지적 장애'에 대한 해석은 학자들마다 약간씩 차이가 있지만, Tall (1991)과 Herscovics(1989)의 견해를 종합하면 다음과 같다.어떤 특정한 상황에서는 성공적이고 유용했던 지식으로 학생의 인지구조의 일부가 되었지만, 새로운 상황에서 부적합하게 된 지식을 의미하는 것이다.

한편 Bernard Cornu(1991)는 '인지적 장애'를 개인적 발달 과정에서 생기는 '발생적(심리적) 장애', 교수방법과 교사의 속성 때문에 생기는 '교수학적 장애', 수학 개념 그 자체의 속성 때문에 생기는 '인식론적 장애(epistemological obstacle)'로 구분하였다. 또한 인식론적 장애는 지식을 획득하는 과정에서 불가피하며 필수적인 요소이며, 인식론적 장애는 부분적으로 개념의 역사적 발달과정에서 발달된다고 주장하였다. (Bernard Cornu, 1991; 류희찬 · 조완영 · 김인수 (역) 2003) Herscovics(1989)는 학생들의 장애가 인식론적 측면에서만 기인한 것이 아니라, 개념의 역사 발달적 관점에서 서로 다른 배경지식을 가진 것에서도 기인한다고 하였다. 이런 점에서 학생들이 개인적인 지식의 발달 과정에서 어려움을 겪는 원인이 되는 것을 '인지적 장애'로 구분하였고, 학문적 지식의 역사적 발달 과정에서 드러난 장애를 '인식론적 장애'로 구분하였다.

Cornu(1991)는 기본적으로 수학적 오개념을 개인의 지식 구성과정에서 나타나는 인지적 장애라고 본다. 박선화(1998) 역시, 학생들의 오개념은 새로운 지식을 받아들이거나 기존의 개념을 확장할 때 장애가 된다는 의미에서 오개념을 인지적 장애로 보고 있다. 따라서 구성주의적 관점에서 인지적 장애는 오개념(misconception)이나 오류(error)의 기원이 된다는 것은 부정하기 어려운 사실이다. 즉, 오개념의 형성은 인식의 과정에서 자연스럽게 발생하는 보편적인 현상이고 이것을 회피할 수 있는 것은 아니라고 한다. (Davis & Vinner, 1986) 따라서 교수학습 계획을 세울 때에는 인지적 장애를 고려하여야 한다. 인지적 장애를 극복하는 방안에 대하여는 다양한 견해가 있다.

> 학생들은 개념의 이해 과정에서 인지적 장애를 갖게 되는 것은 불가피한 일이다. 이것은 학생들의 인지능력의 한계라기보다는 모든 인간이 가지는 보편적인 한계이다.…장애의 극복을 통해 학생들은 새롭고 높은 수준의 이해에 도달한다. …장애의 극복은 학생의 내면에서 일어나는

학생 자신의 인지구조의 변화이므로 자발적인 노력에 의해서만 가능하다.(박선화, 2000, p260)

한편, 교사들은 전통적으로 학생들에게 주어진 개념을 거듭해서 반복설명하거나, 많은 예제 문제를 풀게 하였다. 이러한 교수 방법의 이론적 근거는 행동주의적 심리학에 근거하고 있다고 주장한다.(Davis & Vinner, 1986) 그러나 학생들의 오개념이나 오류가 유사한 문제를 반복해서 풀거나 보상을 강화한다고 해서 잘 해결되는 것으로 판단하지 않는다는 것이 일반적인 견해이다.(박선화, 2000)

오개념의 형성은 인식의 과정에서 자연스럽게 발생하는 보편적인 현상이고 이것을 회피할 수 있는 것은 아니라고 한다. (Davis & Vinner, 1986) 오류에 대해서도 예전과는 다른 관점을 취한다.

흔히, 학생들의 오류는 이상한 기능장애이거나, 지식의 결여 탓으로 여겨졌고, 따라서 매우 부정적이었다. 그러나 반복되는 오류들은 개념구성의 결과이며, 우연이 아니라 적극적인 획득물이다. (우정호, 2000, p470)

즉, 구성주의적 관점에서 보면, 오개념의 형성은 자연스럽게 발생하는 보편적인 현상이지만, 한 번 형성된 이후에는 쉽게 다른 것으로 대체되지 않는 특징이 있다. 이를 방지하기 위한 최선의 방법은 교사가 사전에 명확하게 자각하여, 오개념이 일어나지 않도록 예방조치를 하는 것이다. 다음으로 차선은, 학생의 오개념을 진단하고, 오개념을 교정하기 위한 방안을 강구하는 것이다.(김수미,2003)

그러나, 최근에는 오개념을 보다 적극적으로 해석하여 학습의 어려움과 학생들의 현재 상태를 진단하기 위한 기회라는 관점도 주장된다. (김부미, 2006) 우리나라에서는 1970년대 중반부터 초등 분야의 계산영역을 중심으로 오개념에 대한 연구가 이루어졌으나, 2000년대 들어서 중등분야의 수와 식, 미분 및 극한개념을 중심으로 폭넓은 연구가 이루어지고 있다. (정순진, 2002; 김정희, 2005; 김선주, 2004)

수학적 오개념(misconception)에 대한 정의는 다양하지만 김부미(2006)의 '수학적 오개념'을 참조하여 본 연구에서 수학적 오개념을 "학생이 현재 가지고 있는 지식 중 수학적 개념과 일치하지 않거나 제한된 영역에서만 성립하는 지식"으로 정의하고 오류(error)는 사전적 의미인" 바르지 못한 논리적 과정 및 그 결과로 생긴 추리나 판단"으로 한정하여 사용한다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구방법

김수미(2003)의 '수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료개발 연구'에서는 오류의 진단과 처방과정에서 교사에게 도움이 될 만한 8가지 요소로 다음을 제시하였다. 즉, 오류진단지, 오류 유형, 오류 유형별 빈도수, 오류 원인, 지도 아이디어, 연습지, 성취도 검사지, 예방아이디어이다. 또한 이를 각 단계별로 분류하여, 첫째, 오류의 진단과정, 둘째, 처방과정, 셋째, 평가과정의 3단계로 배열하였다.

본 연구는 위의 3단계 중에서 진단과정인 ① 오류의 유형 및 발생빈도 ②오류진단지 ③오류의 원인에 주목하여 2차곡선을 학습할 때 생기는 오개념 형성의 원인에 대한 연구를 주목적으로 삼는다.

오류의 유형을 분류하는 연구로서 Clements (1980)와 Newmann(1981)과 김정희(2005)등이 있는데, 김정희(2005)의 오류 모형과 1차 예비검사를 통하여 다음과 같이 오류모형을 분류하였다: ①기술적 오류: 문제를 푸는 과정에서 계

산 실수 등으로 발생한 오류. ②논리적으로 부적절한 추론: 문제풀이 과정에서 불합리한 추론을 하는 오류. ③잘못 사용된 정의 및 정리: 이차곡선의 성질이나 정의를 잘못 적용하거나 부적절하게 사용한 오류. ④ 풀이과정을 생략한 오류: 답만 적은 경우. ⑤ 시도하지 않은 오류: 답과 풀이과정 모두 적지 않은 경우.

연구 방법으로는 수학 수업에 적극적인 남녀 각 1개 반씩 50명을 선정하여 2절(연구 절차)에 제시된 문제지를 풀도록 한 뒤 나타나는 오류의 유형을 위에 제시한 모형으로 분류하고 그 원인에 대한 분석을 하는 방법을 택하였다. 이 분석은 4장. 결과분석 및 논의에 상세히 밝혀져 있다. 특히 ③모형의 오류를 범한 학생은 면담을 통하여 재차 확인하였다.

2. 연구절차

본 연구를 수행하기 위하여 선정된 학생들은, 2학년 자연반 학생 중 수리영역 '가'형을 선택할 학생으로서 수학수업에 적극적인 남학생 23명 여학생 27명이며 수리영역 11월 모의고사 평균 성적이 1등급: 3명이고, 2-3등급: 16명 정도이며, 4등급 : 13명이며, 5-6등급: 18명이며, 7등급 이하의 성적인 학생은 제외하였다. 연구에 참여한 학생들은 2학년 1학기에 보충수업 시간에 이차곡선을 1주일에 한 시간씩 공부하였으며, 수행평가 과제로 '종이접기를 통한 이차곡선 작도'를 경험한 수학반 동아리 학생은 10여명 정도이고 다수의 학생은 종이접기로 이차곡선을 만들어 본 경험이 없는 학생이다.

본 연구에 사용한 검사 도구는 부산대학교 사범대학 부설고등학교의 수학II 교과서인 (주) 금성사 교과서의 예제와 수행평가 문제를 중심으로 부설고등학교의 교사들과 협의하여 선정하였다. 검사지는 학생들의 이차곡선에 대한 오개념과 오류를 검사하기 위하여 난이도를 상(문항4-1, 문항3-1) 2개, 중(문항1-1,1-2,1-3 문항2-3 문항3-2, 문항5-2 문항5-2) 7개, 하(문항2-1, 2-2 문항4-2, 문항5-1) 3개로 총 12문항으로 이루어졌다.

실제 검사지는 <부록 2>에 제시되어 있다. 위의 12개 문항을 45분 동안 풀되, 풀이 과정

<표 III-1> 문항분석표

문항번호		문제 상황	조사내용
1	1-1	이차곡선의 기하적 정의	동심원 그림이 주어진 상황에서 타원을 발견할 수 있는가?
	1-2		동심원과 직선이 주어진 상황에서 포물선을 발견할 수 있는가?
	1-3		동심원 그림이 주어진 상황에서 쌍곡선을 발견할 수 있는가?
2	2-1	이차곡선의 대수적 표현	식이 주어진 상황에서 타원의 장축을 구할 수 있는가?
	2-2		식이 주어진 상황에서 포물선의 초점을 구할 수 있는가?
	2-3		식이 주어진 상황에서 쌍곡선의 점근선을 구할 수 있는가?
3	3-1	자취로서 원뿔곡선	직사각형종이접기 상황에서 포물선의 초점을 구할 수 있는가?
	3-2		종이접기상황에서 타원의장축의 길이와 초점을 구할 수 있는가?
4	4-1	원뿔곡선과 접선의 성질	포물선에서 접선의 성질을 이해하는가?
	4-2		쌍곡선에서 접선의 방정식을 구할 수 있는가?
5	5-1	원뿔곡선의 활용	타원의 활용에 관한 문제를 풀 수 있는가?
	5-2		·포물선의 활용에 관한 문제를 풀 수 있는가?

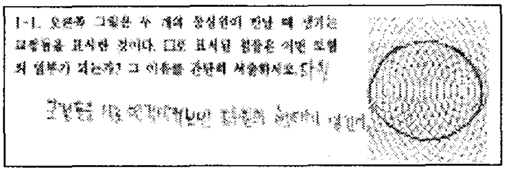
은 모두 적도록 하였으며, 자유로운 분위기에서 편안하게 답을 작성하도록 하였다. 위의 내용은 2006년 10월31일 연구대상 학교 2개 반을 대상으로 예비 검사를 하여, 정답률이 80% 이상인 문항 1개와 3%인 문항 1개를 본 검사에서 제외시켰다. 2006년 12월19일 본 검사를 실시하였다. 검사 후 2006년 12월 30일 검사에 응한 2명의 학생과 간단한 면담을 실시하여 학생들의 개념을 파악하는 자료로 삼았다. 그 내용은 <부록 1>에 요약되어 있다.

IV. 결과 분석 및 논의

1. 이차곡선의 정의 (기하적 표현)에 대한 분석

<부록 2>에 있는 문항 1-1, 1-2, 1-3[3]은 현재 고등학교 수학II 교과서 11종류 가운데 4개 정도의 교과서의 도입부분에서 '다가서기' 혹은 '발견학습' 형태로 소개되고 있는 내용이다. (홍성관 · 박철호, 2006) 아래는 위의 문항에 대한 검사결과 분석표이다.

학생들은 그림의 모양만을 보고 직관적으로 타원이나, 포물선, 쌍곡선이라고 답하였는데 이는 이미 그 그림의 모양을 알고 있기 때문이다. 이차곡선의 기하적 정의에서 풀이과정을 생략한 학생들 대부분이 타원, 포물선, 쌍곡선이라는 답을 적은 학생들이었다.



[그림 IV-1] 문항1-1에 대한 오답의 예

위의 [그림IV-1] 나와 있는 "교점을 서로 연결시키보면 타원"이라는 설명과 <부록 1>에서 학생 B와의 면담 중"직접 그려보니 타원이어서 그게 이유잖아요"라는 진술을 분석하면 모양의 유사성을 현상으로 파악하고 있지만, 만나는 두 원의 반지름의 합이 일정하다는 본질에 대해서는 파악하지 못하고 있다는 증거이다. 타원 모양이므로 타원이라고 주장하는 것은 교과서 도입부문에서 제시된 동심원에서 타원의 모양 찾기나 타원의 작도 등을 실행하지 않았다는 증거이다. 따라서 조작과 구성의 경험이 없으면 학생들의 타원에 대한 정의는 Vinner (1992)가 말한 부정확한 '개념 이미지' 수준에 머물고 있음을 나타내는 것으로 해석할 수 있으며 이는 곧 Freudental

<표 IV-1> 이차곡선의 기하적 정의에 대한 개념조사

문항	정답	오류 유형				
		기술적 오류	부적절한 추론	잘못 사용된 정의 및 정리	풀이과정 생략	시도하지 않은 오류
1-1	26 (52%)		2 (4%)	1 (2%)	17 (34%)	4 (8%)
1-2	30 (60%)		1 (2%)	3 (6%)		16 (32%)
1-3	13 (26%)		2 (4%)	5 (10%)	21 (42%)	9 (18%)

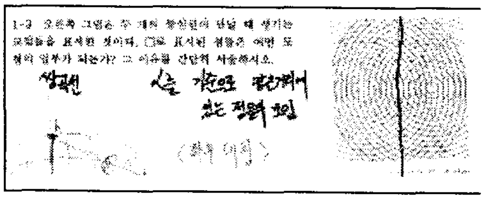
3) 문항 1-1,, 1-3에 나타난 그림의 출처 ; 남호영 외 3인(2006) **원뿔에서 태어난 이차곡선**, 수학사랑

(1991)말한 수학화 능력이 부족하다는 증거이다.

위의 <표 Ⅳ-1>에서 알 수 있듯이 이차곡선의 기하적 정의에 대한 평균 정답률은 48%이다. 절반 정도의 학생들은 정확한 개념의 이해가 되지 않은 상태에서 모양이 비슷하면 동일한 것이라는 '수학적 오개념'을 가질 수 있다는 증거이다.

문항 1-2는 질문에서 단답형 대답을 요구했으므로 풀이과정 생략을 적용하지 않았다. 그러나 시도하지 않은 학생이 많았는데 학생과의 면담에서 학생들은 포물선을 $y^2=4x$의 그래프 형태로만 이해하고 있음이 드러났다. <부록 1 참조> 이것 역시 '인지적 장애'의 한 형태이거나, Hasegawa (1997)가 말한 전형현상(prototype phenomenon)의 한 형태일 것이다. 그리고 문항 1-2에서 기술적 오류가 전혀 나타나지 않은 이유는 이미 포물선이라는 가정 하에서는 계산이 간단하기 때문이다.

아래 그림은 문항 1-3에 대한 학생들의 정답과 예이다.



[그림 Ⅳ-2] 문항 1-3에 대한 오답의 예

위의 [그림Ⅳ-2]과 <표Ⅳ-1>의 정답률을 살펴보면 대부분의 학생들은 특히 쌍곡선에 대한 수학적 오개념을 갖고 있음을 알 수 있다. 그 대표적인 예가 쌍곡선을 포물선 두 개가 그려진 것으로 생각하고 있다. ([그림 Ⅳ-2]) 학생들의 검사지를 보면 좌우 대칭으로 있는 두 개의 곡선을 무조건 쌍곡선이라고 하는 경우도 있었다. 지필 환경에서 제한된 표현을 바로 학생들의 개념이미지로 받아들인 결과이다. 따라서 다양한 쌍곡선의 모양과 쌍곡선과 유사하지만 쌍곡선이 아닌 예를 충분히 관찰할 수 있는 컴퓨터 활동 경험이 필요하다.

전체적으로 이차곡선의 기하적 정의와 관련한 대표적인 오개념은 첫째, [그림 Ⅳ-2]와 같은 부적절한 추론이나 풀이과정을 생략한 학생이 문항1-1(38%), 문항1-3(36%)인 것으로 보아 모양이 타원(또는 포물선)처럼 그려진 것을 수학적 타원(또는 포물선)으로 인식하는 경우이다. 다시 말하면 타원의 수학적 정의인 '평면 위의 두 정점에서 거리의 합이 일정한 점의 집합'으로서 타원을 인식하는 것이 아니라 그 대강의 모양을 보고 타원이나 포물선으로 인식한다는 것이다. 둘째, [그림 Ⅳ-2]의 오답처럼 쌍곡선은 x축(또는 y축)에 대칭된 곡선으로만 인식하는 것이다.

2. 이차곡선의 정의(대수적 표현)에 대한 분석

부록 2에 제시된 문항 2-1, 2-2, 2-3은 교과서 등에서 예제나 문제로 제시되는 것이다.

<표 Ⅳ-2> 이차곡선에 대한 대수적 정의에 대한 개념조사

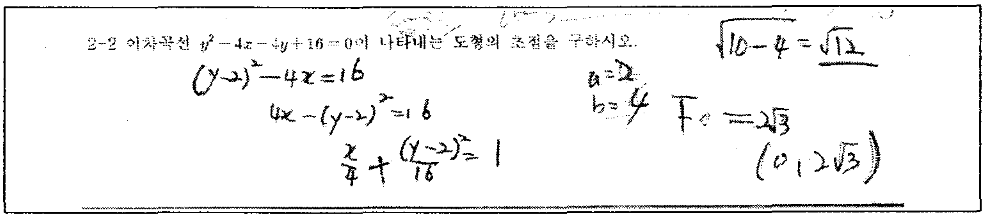
문항	정답	오류				
		기술적 오류	부적절한 추론	잘못 사용된 정의, 정리	풀이과정 생략	시도하지 않은 오류
2-1	29 (58%)	2 (4%)	5 (10%)	6 (12%)		8 (16%)
2-2	17 (34%)	3 (6%)	9 (18%)	9 (18%)		12 (24%)
2-3	8 (16%)	3 (6%)	12 (24%)	13 (26%)		14 (28%)

위 <표Ⅳ-2>에서 기술적 오류는 학생들의 계산 실수이다. 따라서 계산 실수를 제외한다면 정답률은 표보다는 약간 높게 나타날 것으로 예상할 수 있다. 공식을 기억하고 있는 학생들은 모두 답과 함께 계산과정을 적었으므로 풀이과정 생략의 오류는 없었다. 이는 학생들이 기하적 표현보다는 대수적 표현에 더욱 익숙함을 실질적으로 시사한다.

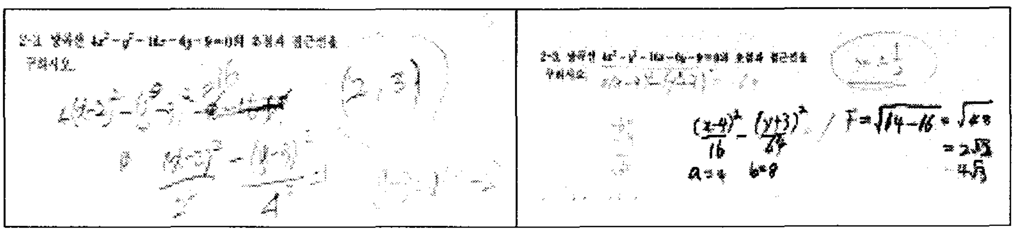
부적절한 추론의 대부분은 평행이동을 고려하지 않고 이차곡선의 표준형에서 초점과 준선을 구했기 때문에 오류가 발생한 것이다. Brousseau (1997)가 말한 극단적인 교수현상인 '형식적 고착'의 전형적인 예이기도 하다. 교과서의 모든 공식이 표준형을 기준으로 하기 때문에 이 표준형에 평행이동이라는 개념을 결합시켰을 때 내적 해결력이 부족한 학생들은 부적절한 추론을 하게 되는 것이다. "식을 외워서 바로 대입해서 푸는 습관이 배어서"라는 학생의 진술(부록2 학생A의 진술 참조)은 하나의 증거가 될 것이다.

구체적인 도형에 대한 관찰과 조작을 생략한 채, 수학적 정의와 대수적인 접근만 강조하면 학생들의 기하적 직관을 빈약하게 만들어 위와 같은 약간의 변화에도 적응하지 못하게 만든다. 그러나 예를 들어, (2,3)와 (6,4)를 초점으로 하는 가능한 타원들의 대수적 방정식을 기하적 정의에 따라 구해본 경험이 있는 학생들은 이차곡선 방정식의 형태로부터 이미 표준형에 대한 초점의 공식을 변형시켜야 한다는 것을 알고 있으므로 위와 같은 부적절한 추론을 행하는 오류를 실수로도 범하지 않을 것이다.

위의 [그림 Ⅳ-4]에서 볼 수 있듯이 대부분의 학생은 대수적인 식의 변환에는 성공하였으나, 쌍곡선의 초점을 구하지 못하고 점근선도 구하지 못했다. 부적절한 추론의 오류를 범한 학생들은 평행이동한 초점의 좌표와 점근선을 구하지 못하고, 평행이동시키는 벡터량 그 자체를 초점으로 착각한 경우이다. ([그림 Ⅳ-4]의 좌측 참조) 쌍곡선의 초점과 타원의 초점 공식을 혼동하여 사용하는 학생이 26%나 되었다. 위의 [그림 Ⅳ-4]의 우측은 타원과 쌍곡선의 초점을 혼동하는 예이다. 특히, 쌍곡선에서 점근선 자체를 이해하지 못하거나 초점을 구하지 못한 이유는 쌍곡선을 포물선의 나열로 생각한 학생들이



[그림 Ⅳ-3] 문항 2-2에 잘못 사용된 정의의 오류(공식을 잘못외운 사례)



[그림 Ⅳ-4] 문항2-3에 대한 부적절한 추론의 두 가지 예

포함되어 있다. 반대로 문제를 정확하게 풀이한 학생은 타원은 초점이 주축(장축)의 안쪽에 있다는 사실 (즉, 장축의 길이보다 초점 사이의 거리가 짧다는 사실)과 쌍곡선은 초점이 주축 바깥에 있어서 초점 사이의 거리가 주축의 길이보다 길다는 사실을 알고 있어서 쌍곡선은 초점이 $\sqrt{a^2+b^2}$이 되고 타원은 $\sqrt{a^2-b^2}$이 된다고 기억하고 있었다.

<표 Ⅳ-2>에서 문항 2-3에 대한 부적절한 추론 및 잘못 사용된 정의 및 정리가 50%로 되는 것과 문항 1-3에 대한 답으로 그림 Ⅳ-2과 같이 대답한 학생이 많은 것을 미루어볼 때, 학생들은 쌍곡선에서 다양한 오개념을 가지고 있음을 알 수 있다.

이상을 종합하여 이차곡선의 대수적 표현과 관련한 대표적인 오개념은 다음과 같다. 첫째, Hasegawa (1997)가 말한 전형현상(prototype phenomenon)의 결과로, 포물선(또는 쌍곡선)은 x축에 대칭인 곡선이라는 오개념을 가졌기 때문에, 포물선(또는 쌍곡선)을 평행이동 하였을 때는 x축에 대한 대칭성이 나타나지 않으므로 당황하여 초점과 준선을 잘 구할 수 없었다. 또한 이것은 y축에 대칭인 곡선 (예를 들면, $x^2=4y$ 꼴의 포물선이나, $x^2-y^2=-1$꼴의 쌍곡선)에 대하여서도 마찬가지의 '인지적 장애'를 유발시킨다고 할 수 있다. 둘째, 쌍곡선과 타원의 초점 공식을 서로 혼동하여 인식한다는 점이다. 이는 그래프의 모양을 떠올리지 않고 기계적으로 공식을 외운 결과로 나타난 오개념이다.

3. 자취로써 이차곡선의 개념에 대한 분석

부록 2에 제시된 문항 3-1과 3-2에 제시된 그림은 5개의 현행 수학Ⅱ 교과서에서 수행평가 형식으로 제시된 문제들이다. 平林一榮(1999)는 좋은 교재 개발이 지녀야 할 특징으로 "손으로 하는 작업을 함께 할 것"과 "계속하여 생겨나는 문제의 전개"를 들었다. 따라서 위의 문제는 좋은 교재라고 할 수 있다. 그러나 대부분의 학생은 위의 문제를 매우 어려워했다.

위의 <표Ⅳ-3>에서 알 수 있듯이 정답률은 매우 낮다. 문제를 풀지 않은 학생과의 면담에서 "종이를 접어본 경험이 없다"라고 대답한 학생도 있었다. 따라서 조작과 구성의 경험이 전혀 없을 때는 수학적 추론에 어려움을 겪음을 알 수 있다. 한편, "종이를 접은 기억은 나지만, 도대체 어떻게 답을 해야 할지 가늠할 수 없었다."라는 대답도 있었다. 이것은 피아제의 이론을 빌려서 말하면, '반영적 추상화'보다는 학생들이 '경험적 추상화'에 빠진 것으로 말할 수 있다. 따라서 대상에 대한 구체적 활동과 함께 그것 이상으로 중요한 것은 행동과 그 결과에 대한 반성이다.(이종영, 1999)

<표 Ⅳ-3. 자취로서 이차곡선의 개념에 대한 조사>

문항	정답	오류				
		기술적 오류	부적절한 추론	잘못 사용된 정의및 정리	풀이과정 생략	시도하지 않은 오류
3-1	6 (12%)			6 (12%)	1 (2%)	37 (74%)
3-2	9 (18%)			4 (8%)	1 (2%)	36 (72%)

[그림 Ⅳ-5]의 좌측처럼 포물선(타원)에서 나타난 잘못 사용한 정리의 오류는 다음과 같다: 학생들은 포물선 상의 한 점을 [그림 Ⅳ-5]에서 $\overline{AB}$의 수직이등분선과 B를 지나며 주어진 직선에 수직인 직선과의 교점이 아니라 점 A와 점 B 사이의 중점으로 이해하고 있다는 점이다. [그림Ⅳ-5]의 오른쪽 정답과 비교하면 오류가 무엇인지 분명해진다. 위의 그림처럼 $\overline{BP}$는 점 P와 그 아래 직선 사이의 거리가 될 수 없다는 사실을 인식하지 못하여 부적절한 추론을 한 것으로 해석할 수 있다.

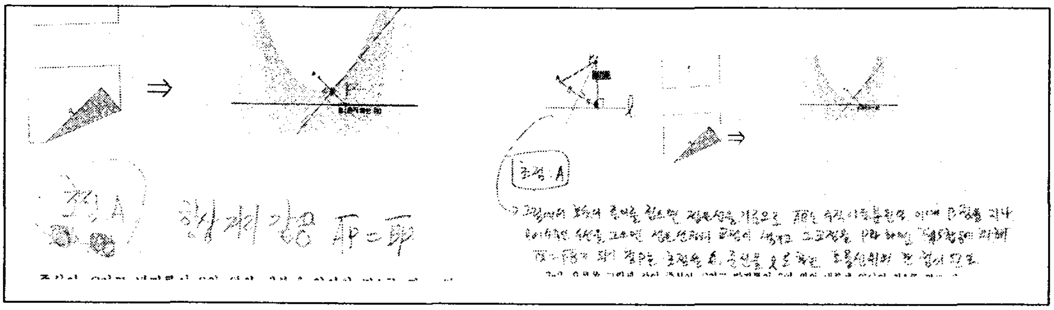
문항 3-2에서 나타난 잘못 사용한 정리의 오류도 $\overline{AA'}$의 중점을 타원 위의 점으로 생각한 유사한 오류이다. 즉 종이접기에서 주름선은 접선이 된다는 사실을 이해하지 못하며, 접선임을 이해하는 학생들 중에도 그 접점의 위치를 정확히 파악하지 못하는 학생들이 있었다. 이는 다음 문항 4-1을 이해하지 못하는 요인이 되고 있다.

반대로, 위의 문항 3-1을 해결한 3명의 학생은 수학반에서 종이접기를 직접 실행해 본 학생이었다. 따라서 구성주의적 인식론인 물리적 구성이 정신적 구성을 만들 수 있다는 가설을 다시 한 번 확인 할 수 있었다.

이상을 종합하면, 종이 접기를 통한 이차곡선의 작도에서 나타나는 부적절한 추론의 오류는 첫째, 종이접기 상황을 '수학화'하지 못하여 나타난 현상이다. 둘째, 움직이는 점에 대한 오개념에서 비롯되었다. 고정점에 대해서는 분명한 판단을 하는데 반하여 움직이는 점에 이름을 붙이거나 대상화하지 못하고 동시에 작도과정에서 정확한 점의 위치를 찾지 못하고 있음이 드러났다. 이것은 자취에 대한 시각적 이해의 부족에서 기인한 것으로 보인다.

4. 이차곡선과 직선의 관계에 대한 개념 분석

<부록 2>의 문항 4-1은 대부분의 교과서에



[그림 Ⅳ-5] 문항3-1에 대한 오답의 예(좌측)와 정답의 예(우측)

<표 Ⅳ-4> 이차곡선에서 접선의 성질에 대한 조사

문항	정답	오류				
		기술적 오류	부적절한 추론	잘못 사용된 정의및 정리	풀이과정 생략	시도하지 않은 오류
4-1	3 (6%)		1 (2%)			46 (92%)
4-2	19 (38%)	1 (2%)		1 (2%)		19 (38%)

수행평가 문제 또는 발전 학습 문제, 연습문제 등으로 제시되는 것이고 문항 4-2는 교과서의 예제로 제시된 문제이다.

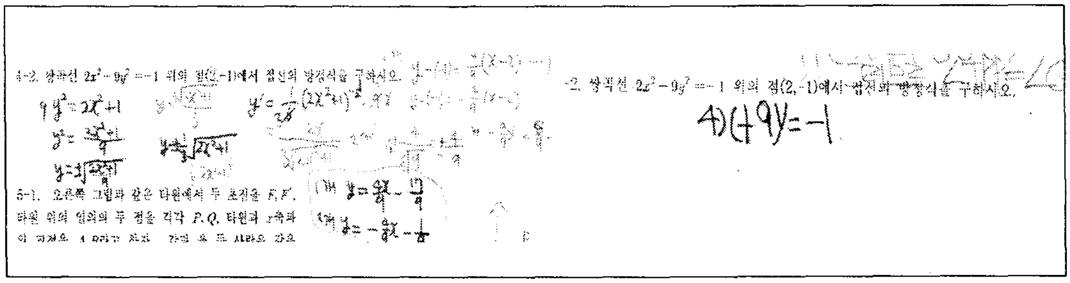
위의 <표 Ⅳ-4>에서 알 수 있듯이 문항 4-1에 대한 정답률은 6%로 매우 낮다. 증명 문제에 익숙하지 못한 이유도 있지만, 대수적 방정식과 관련된 계산은 익숙하지만 그것이 갖고 있는 기하적 성질을 찾아내는 방식에 대해서는 서투르다는 것을 나타내고 있다. 즉 포물선에서 접선의 방정식을 구하는 것은 단순히 직선과 이차곡선의 관계만을 파악하는 것이 아니라 포물선의 물리적 성질을 파악하는 것이라는 사실을 인식하지 못한다는 증거일 뿐 아니라 학생들의 이차곡선에 대한 내적 문제 해결력도 약하다고 할 수 있다. 이는 또한 문항 5-2의 해결을 어렵게 만드는 요인이 된다.

위의 [그림 Ⅳ-6]는 문항 4-2에 대한 정답과 오답의 예이다. 먼저 오답을 한 학생은 미분의 계산까지는 능통했으나 그것의 의미를 파악하지 못한 것으로 보인다. 실제로 함수로 표현했을 때 첫 번째 식은 x축 위쪽의 그래프를 나타내지만 점 (2, -1)은 그 그래프 상에 있지 않은 점이라는 점을 간과하고 있는 것이다. 이것은 시각적 표현의 부재에서 나오는 현상으로 이해할 수 있다.

이상을 종합하면 접선의 기하학적 표현과 대수적 표현 사이를 연결하지 못하기 때문에 발생하는 오개념이 존재하는데 이는 학생들이 이차곡선의 정의로부터 대수적 방정식을 유도하고 그 방정식의 그래프로서 이차곡선을 인식하기 때문이다. 문항 3-1, 3-2와 같은 방식으로 혹은 자와 컴퍼스로 정의에 따라 실제로 원추곡선을 그려 보고 그의 기하학적 성질을 탐구하는 과정을 거쳤다면 이 문제의 경우 그리 어렵지 않게 해결할 수 있었을 것이다.

5. 이차곡선의 활용에 관한 분석

문항 5-1과 5-2는 시중의 참고서에 자주 나



[그림 Ⅳ-6] 문항4-2에 대한 오답의 예(좌측)와 정답의 예(우측)

<표 Ⅳ-5> 이차곡선의 활용에 대한 조사

문항	정답	오류				
		기술적 오류	부적절한 추론	잘못 사용된 정의및 정리	풀이과정 생략	시도하지 않은 오류
5-1	23 (46%)		1 (2%)		3 (6%)	24 (48%)
5-2	4 (8%)	5 (10%)	8 (16%)			33 (66%)

오는 문제 중에서 난이도 중상과 중하의 문제이다.

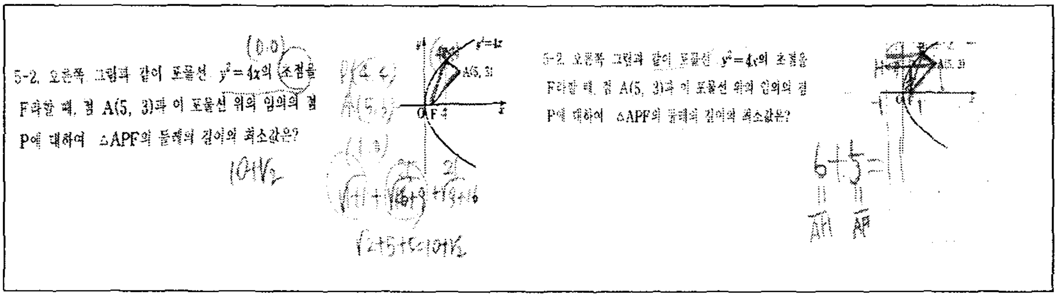
위의 <표 Ⅳ-5>에서 알 수 있듯이 문항 5-1을 푼 학생들은 의외로 많았다. 심지어 문항 1-1을 풀지 못한 학생도 풀었다. 그 학생과의 면담에서 학생은 "개념 하나하나는 몰라도 주로 문제집으로 공부하기에 이런 문제는 잘 푼다."고 답했다.

위의 [그림 Ⅳ-7]에서 문항 5-2를 풀지 못한 학생은 포물선의 기하적 (혹은 물리적) 성질에 대한 이해의 부족 또는 임의의 점 (또는 동점)이라는 표현을 이해하지 못하여 문제를 푸는데 실패한 것으로 보인다. 학생들이 초점에서 출발한 빛이 포물면경에 반사되면 축과 평행하게 진행한다는 물리적 실험을 경험하거나 혹은 초점에서 포물선의 한 점을 거쳐 포물선 내부의 다른 점으로 갈 때의 최단 경로를 동적 기하 소프트웨어를 이용하여 구하는 실험을 경험했다면 이 문제는 무척 쉬운 것이었을 것이다. 위 정답의 예에서 보듯이 이 학생은 이미 그 사실을 기억하고 있음을 알 수 있다. 동점에 대한 이해는 동적기하 소프트웨어(GSP,Cabri) 등을 사용하여 보다 효과적으로 설명할 수 있으나, 문항 5-2에 대한 시도하지 않은 오류가 66%나 된다는 것은 지필 환경에서 학생들이 동점 또는 자취에 대한 이해를 잘 하지 못한다는 증거가 될 수 있다.

Ⅴ. 결론과 제언

이차곡선은 고대 아폴로니우스의 '원뿔곡선론'으로부터 연구된 오랜 역사를 가진 기하학적 소재이다. 최근에는 전자공학, 광학, 암호 등에 응용되어 그 활용 범위도 매우 넓고 학생들이 종이접기, GSP 등을 활용하여 직접 작도하거나 모양을 만들 수 있다. 그래서 구성주의적 학습 소재로 많은 각광을 받고 있는 단원이다. 그러나 고등학교 교육의 현실은 이차곡선을 오로지 대수적인 관점(또는 해석 기하적인)만을 강조하여 학생들은 그 개념의 기원을 무시한 채, 오로지 기계적인 계산으로 해결하는 형식주의에 빠지고 있다. 따라서 본 연구에서는 대수적인 관점을 중요시 하는 지필환경에서 학습하는 학생들이 이차곡선에 학생들의 오개념과 오류를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 이차곡선의 기하학적 정의를 묻는 문제에 대하여 48%정도의 정답률을 보이고 있다. 이는 현행 교과서의 도입단계에서 동심원으로 제시된 이차곡선의 정의와 종이접기 형식으로 제시된 수행평가 문제를 소홀히 다루어지고 있음을 나타낸다. 이것은 구성주의적 관점에서 볼 때, 조작과 구성을 무시한 개념 형성에는 한계가 있음을 나타내는 것이다. 동시에 이차곡선을 기하의 관점으로 접근하지 않고 대수적



[그림 Ⅳ-7] 문항 5-2에 대한 오답의 예(좌측)와 정답의 예(우측)

인 접근만을 강조하는 것은 대수적 계산 과정이 의미하는 기하학적 의미에 대하여 파악할 수 없게 함으로써 이차곡선에 대한 수학적 오개념이 발생하는 원인이 된다.

둘째, 학생들은 이차곡선의 대수적인 정의를 묻는 문항에 대하여 평균 36% 정도의 성취도를 가지고 있다. 이것은 처음부터 '형식적인 고착'을 강조한 결과로 학생들이 공식을 기계적으로 외웠기 때문에 평행이동한 도형의 초점을 구하는 것을 어려워했고, 이차곡선의 기하적인 성질(작도)과 대수적인 표현(이차곡선의 방정식, 초점의 좌표, 준선의 방정식)등을 연결시키지 못하여 내적 문제해결력이 떨어지는 것으로 분석되었다. 학생들은 원추곡선의 모양을 기하학적 정의에 따라 직접 파악하는 것이 아니라 대수적 방정식으로 바꾸고 그 대수적 방정식의 그래프를 그림으로써 이해하고 있다. 만약 대수적 방정식이 주어지지 않은 도형이 원추곡선과 유사하지만 원추곡선이 아니라면 대수적 기교에만 익숙한 학생들은 그 사실을 인식하기 어려울 것이다. 따라서 이차곡선에 대하여 기하적인 접근 즉 동심원 문제라던가, 종이접기를 통한 기하적 관점으로 충분히 접근한 후 대수적인 접근을 시도하는 것이 Freudental이 말한 '반교수학적 전도'를 막는 방법이 될 것이다

셋째, 자취(locus)로써 이차곡선을 이해하는 능력은 현저히 떨어졌다(정답률15%). 현행 교과서에서 수행평가로 제시된 종이접기에서 접은 선이 이차곡선의 접선으로 연결되지 못한 채, 그 의미를 상실하여 나중에 이차곡선의 활용이나 이차곡선에서 빛의 반사등에 활용하지 못하는 결과가 되고 있다. 만약에, 종이접기 상황이 수학화로 이어지지 못하고 활동 그 자체로만 끝나면 "종이접기는 했지만 기억이 나지 않는다."는 진술처럼 수학 학습의 효과는 미미해질 수 있다. 이는 활동주의적 수업이 현장에 잘 적용되지 않는 한 요인이 된다. 따라서 손으로 하는 활동은 '경험적 추상화'에서 나아가 '반영적 수학화'가 될 수 있도록 지도되어야 한다.

넷째, '수학적 오개념'에 대한 김부미(2006)의 관점을 적용하면 이차곡선에 대한 다양한 오개념은 반드시 제거되어야 대상으로만 인식할 것이 아니라, 학생들 스스로 변증법적인 사고를 통하여 정확한 수학적 개념으로 발전시킬 수 있는 계기로 삼아야 한다는 것이다. 이런 의미에서 오개념의 정확한 진단과 처방은 효과적인 교수학습을 위한 중요한 도구가 될 것이다.

본 연구는 부산대학교 사범대학 부설고등학교 학생만을 대상으로 한 연구이므로 우리나라 전체를 대표하기에는 어려움이 있다. 이에 본 연구자들은 다음과 같은 후속 연구가 필요하다고 생각한다.

첫째, 종이접기, 동적 기하(dynamic geometry) 등을 활용하여 조작과 구성을 강조한 구성주의적 교수-학습이 학생들의 오개념 극복을 위한 현실적인 대안이 될 수 있음을 밝히는 후속연구가 필요할 것이다.

둘째, 부산이 아닌 다른 지역의 학생들을 상대로 한 연구를 진척시켜 본 연구결과를 보다 일반화시킬 필요가 있다.

셋째, 학생들과의 면담에서 밝혀졌듯이 '수학화'하는 문제가 대입수학능력시험이나 논술평가에 포함될 수 있는 연구가 진행되어야 할 것이다. 학생들은 수능유형이 아닌 문제는 관심을 갖지 않는다는 사실도 고려되어야 할 것이다.

참고문헌

김선주(2005). **고등학교 극한 영역에서 오류분석을 통한 교정학습지도 방안**. 이화여자대

학교 석사학위논문.

김수미(2003). 수학과 오류의 진단과 처방에 관한 교사용 자료 개발 연구. **학교수학5**(2), 209. 대한수학교육학회

김부미(2006). **수학적 오개념과 오류에 대한 인지심리학적 고찰.** 이화여자대학교 박사학위논문

김정희(2005). **고등학교 학생들의 미분개념의 이해 및 오류유형 분석.** 충북대학교 석사학위논문

김화경(2006). **'컴퓨터와 수학교육' 학습지도 환경에 관한 연구.** 서울대학교 박사학위논문

박기영 · 강순자(2004). 6회 MATH FESTIVAL 자료집. **수학사랑.**

박선화 (2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. **수학교육학연구 10**(2), 248-249.

우정호(2000). **수학학습지도-원리와 방법.** 서울, 서울대학교 출판부

______(1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울, 서울대학교 출판부

이종영(1999). **컴퓨터 환경에서의 수학 학습-지도에 관한 교수학적 분석.** 서울대학교 박사학위논문

이종희(1999). **이해에 대한 수학교육적 고찰.** 서울대학교 박사학위논문

이재학 · 임성모 · 정상권 · 조태근 · 홍진곤 (2003). **수학Ⅱ.** 서울. (주)금성출판사

정순진 (2002). **'수와 식'단원에서 수학 학습부진아의 오류 분석과 교정에 관한 연구.** 한국교원대학교 석사학위논문

장혜원(1997) **수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로** 서울대학교 박사학위논문

정성두(2002). **GPS를 활용한 고등학교 이차곡선의 지도에 관한 연구.** 석사학위논문, 한국교원대학교 대학원.

홍성관 · 박철호(2006). 고등학교 이차곡선에 대한 교과서 분석과 그 대안. **수학교육논총 29**, 341-362.

황우형 · 차순규(2002). 탐구형소프트웨어를 사용한 해석기하지도에 관한 사례연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41**(3), 341-360.

平林一榮(1999). 수학 교육학의 제반 문제 - 새로운 교재개발을 중심으로. **학교수학 1**(2), 391-400.

Bernard Cornu, (1991). Limit. In D. Tall(ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Clements, M. A. (1980). Analyzing children's erros on Written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics,* 2, 1-21.

Dniel Scher. (2002). *Student's Conception of Geometry in a Dynamic Geometry Software Environment.* doctoral dissertation, New York University, 2002.

David Tall. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* pp vi Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.

Davis, R. B. & Vinner, S.(1986). The notion of limit; Some Seemmingly Unavoidable Misconception Stages. Journal of Mathematical Behavior, 5(3)

Goldenberg, E. P. & Cuoco, A. A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.) *Designing learning environment for developing understanding* *of geometry and space* (pp.351-367). Mahwa, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudental, H. (1991) *Revisiting Mathematics Education,* China Lectures, Kluwer Academic Publishers.

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 157-179

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the learning of Algebra. In S. Wager & C. Kieran(Eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* 4. National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Newmann, M. A. (1981). Compression of the language of mathematics Education Research of Australia.

Romberg, T. A. & Capenter, T. P. (1986) Research on teaching and learning mathematics : Two displines of scientific inquiry. In M. C. Wittrock (Ed), *Handbook of Research on teaching*(pp. 850-873). New York: Macmillan.

Vinner, S. (1992). The Function Concept as a Prototype for Problems in Mathematics Learning In E. Dubinsky & G. Harel(Eds), *The Concept of Function: Aspect of Epistemology and Pedagogy.* Notes and Reports series of Mathematical Association of America.

The Study on the Analysis of High School Students' Misconception in the Learning of the Conic Sections

Hong, Seong Kowan (Pusan National University)
Park, Cheol Ho (Graduate School of Pusan National University)

The purpose of this study is to analyze students' misconception in the learning of the conic sections with the cognitive and pedagogical point of view. The conics sections is very important concept in the high school geometry. High school students approach the conic sections only with algebraic perspective or analytic geometry perspective. So they have various misconception in the conic sections.

To achieve the purpose of this study, the research on the following questions is conducted: First, what types of misconceptions do the students have in the learning of conic sections? Second, what types of errors appear in the problem-solving process related to the conic sections?

With the preliminary research, the testing worksheet and the student interviews, the cause of error and the misconception of conic sections were analyzed: First, students lacked the experience in the constructing and manipulating of the conic sections. Second, students didn't link the process of constructing and the application of conic sections with the equation of tangent line of the conic sections.

The conclusion of this study is: First, students should have the experience to manipulate and construct the conic sections to understand mathematical formula instead of rote memorization. Second, as the process of mathematising about the conic sections, students should use the dynamic geometry and the process of constructing in learning conic sections. And the process of constructing should be linked with the equation of tangent line of the conic sections. Third, the mathematical misconception is not the conception to be corrected but the basic conception to be developed toward the precise one.

* key words : mathematical misconception(수학적 오개념), conic sections(이차곡선), mathematising(수학화), constructionism(구성주의)

논문접수 : 2007. 2. 9
심사완료 : 2007. 3. 5

<부록 1> 학생과의 대화록

학생A의 면담(문항1-3의 오답을 적은 학생)

학생에게 이 검사의 목적은 오개념을 조사하기 위한 연구의 일부라는 사실을 알린 후, 검사지를 다시 한 번 읽게 한 후 편안한 마음에서 답하도록 하였다.

교사(연구자): 문항1-3에 왜 이렇게 답 했는지 말 할 수 있니?
학생: 음. 그게. 그냥. 타원은 거리의 차가 일정한 점의 집합이라고 생각해서..그렇게 적었어요.
교사: 점을 서로 완전히 연결해보고 답해보지 그랬니?
학생: 그냥, 타원 같아서 그랬어요. 머리 속으로 연결해보니 타원 같아 보였어요.
교사: 일상적으로 사용하는 타원의 뜻 말고 수학적 정의로서 타원의 뜻을 말해보겠니?
학생: 그냥... 어려운데, 규칙이 있기는 있는데, 음... 어떤 초점이 있고 초점 사이의 거리가 일정한 차이가 있는 점들로 만들어진 곡선인 것 같아요.
교사: 그렇다면, 쌍곡선의 수학적 정의는?
학생: 음...제 생각으로는 한 선을 기준으로 해서 양쪽에 같은 모양의 곡선이 있는 것....
교사: 혼자 공부한 결과로 그렇게 생각하니?
학생: 그렇게 배운 것으로 기억하고 있어요.
교사: 그럼 포물선의 정의는?
학생: 음 ..이렇게 꼭지점을 중심으로 선을 그으면 대칭이 되는 모양의 곡선을 말하는 것...
교사: 그런데 문항2-2에서 포물선의 초점을 왜 (0, $\sqrt{15}$)라고 했지
학생: 음 c가 있는데 $c^2=a^2+b^2$이라서 그런 것...
교사: 포물선의 식을 적어보렴
학생: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이 아닌가요? 배운지 오래 돼서...
교사: 쌍곡선의 식인데..
학생: 아.. 쌍곡선의 정의다. 평소에 기억력이 나빠서..
교사: 문항 4-2가 앞의 문제보다 더 어려운 문제일 수도 있는데 어떻게 풀었니?
학생: 그게 그냥 솔직하게 대답하면.. 이러면 안 되는 줄은 알지만 식을 외워서 바로 대입해서 푸는 습관이 배어서..
교사: 단순한 것은 못 풀고 어려운 것은 잘 풀구나.
학생: 개념 하나 하나를 공부하는 것보다는 어려운 문제 위주로 공부해야 시험도 잘치고...그리고 정의나 이런 것은 시험에 잘 안나오니까.. 그냥 식 외우고 그렇게 공부하죠. 외운다는 것이 나쁘다고 생각하지만. 그래야 시험도 잘 치고.. 그림이라든가 증명문제는 시험에 나오지 않으니 그냥 눈으로 보고 지나가고...
교사: 종이 접기 직접해보았니?
학생: 아니요, 그런 기억이 안나요.
교사: 종이에 직접 증명을 적어보았니?
학생: 아니요. 그냥, 이런 문제는 시험에 나오지 않을 것 같아서
교사: 증명을 할 생각은 했니?
학생: 증명 자체가 어렵다고 생각해서...증명이 나와도 내가 한 증명이 확신이 없고 해서
교사: 문항5-1에서 -라고 했는데 어떻게 풀었니?

학생: 이런 문제는 풀어 본 것같고, -는 잘못 적은 것 같아요.
교사: 수고 했어

학생B의 면담(문항1-1의 오답을 적은 학생)

학생에게 이 검사의 목적은 오개념을 조사하기 위한 연구의 일부라는 사실을 알린 후, 검사지를 다시 한 번 읽게 한 후 편안한 마음에서 답하도록 하였다.

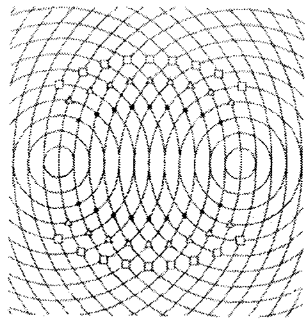
교사: 타원의 수학적 정의가 있는데 왜 그냥 그려보면 된다고 했지?
학생: 직접 그려보니 타원이어서 그게 이유잖아요.
교사: 수업시간에 배운 정의가 생각나지 않니?
학생: 기억이 나지 않아요.
교사: 문항2-1은 문항1-1보다 복잡한 개념인데 잘 기억한 이유는?
학생: 평소 정의보다는 문제를 많이 풀고 풀던대로 한 거예요.
교사: 그런데 문항2-2는 왜 구하지 못했니?
학생: 초점의 공식이 기억나지 않아서..
2-3도 마찬가지고 시간이 지나서 기억이 나지 않았어요.
다른 것도 공부할 것도 많고 해서...수학1도 있고. 보충교재도..
교사: 종이를 접어서 타원을 만들었니?
학생: 그런데 종이를 접었다는 사실만 기억나요.
교사: 그 때 증명을 종이 위에 직접 적어보지 않았니?
학생: 아마 다른 곳에 적었던 것 같은데 기억이 안나요.
교사: 이차곡선이 다른 단원보다 특별히 어려웠던 이유가 있었나?
학생: 계산도 복잡하고 비슷한 공식도 외울게 많고 해서.
교사: 타원의 정의는 생각나지 않았지만 문항5-1은 잘 풀었는데?
학생: 실가지고 타원을 직접 그려본 기억이 나서 풀었어요.
교사: 문항 4-1은 수업시간에 푼 문제인데..
학생: 수업시간에 잘 안들어서.
교사: 증명문제가 특별히 어려웠니?
학생: 아니오.
교사: 그런데 왜 증명문제는 거의 풀지 못했지?
학생: 문제집에 증명문제는 거의 없고 문제 푸는게 많아서 증명은 그냥 읽어보기 때문에 기억이 나지 않아요.
교사: 수고했어

<부록2> 검사지

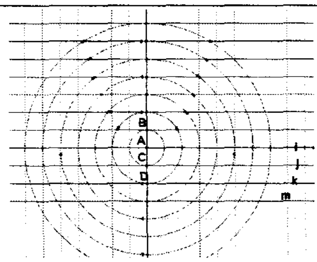
이 검사는 여러분에게 보다 효과적인 학습지도 방법을 연구하기 위한 자료로 사용될 것입니다. 성실한 자세로 답변해주면 고맙겠습니다.

학번: 성명

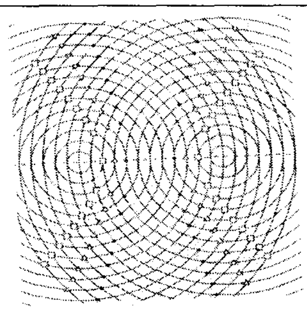
1-1. 오른쪽 그림은 두 개의 동심원이 만날 때 생기는 교점들을 표시한 것이다. □로 표시된 점들은 어떤 도형의 일부가 되는가? 그 이유를 간단히 서술하시오.



1-2 오른쪽 그림은 동심원과 평행선이 만날 때 생기는 교점들을 표시한 것이다. 교점들이 이루는 도형의 명칭을 말하고 그 도형의 초점과 준선을 그림에서 구하시오.



1-3 오른쪽 그림은 두 개의 동심원이 만날 때 생기는 교점들을 표시한 것이다. □로 표시된 점들은 어떤 도형의 일부가 되는가? 그 이유를 간단히 서술하시오.

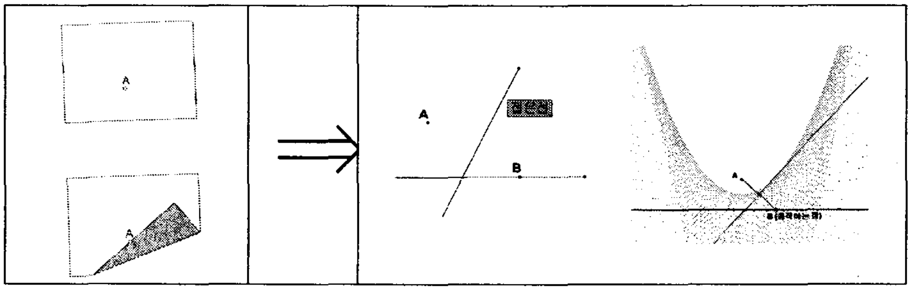


2-1 이차곡선 $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$에서 장축의 길이를 구하시오.

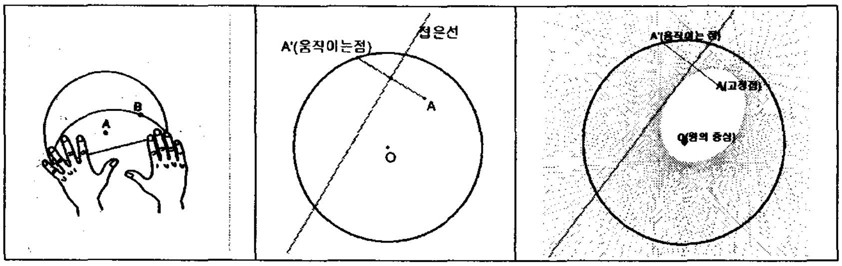
2-2 이차곡선 $y^2-4x-4y+16=0$이 나타내는 도형의 초점을 구하시오.

2-3. 쌍곡선 $4x^2-y^2-16x-6y-9=0$의 초점과 점근선을 구하시오.

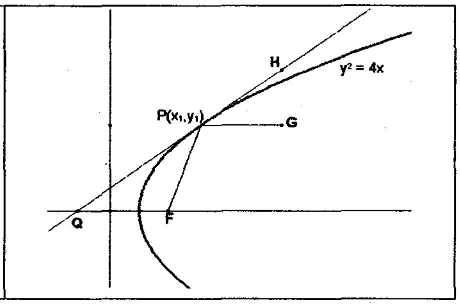
3-1. 아래 그림과 같이 직사각형의 종이 위에 점A를 찍고, 그림과 같이 밑바닥에 있는 임의의 한 점 B가 점A에 닿도록 종이를 접었다. 점B를 좌우로 일정한 간격으로 움직이면서 계속해서 종이를 접었더니 접은 선의 자취가 오른쪽 아래 그림과 같이 포물선이 되었다. 이 포물선의 초점을 아래 그림에서 구하고 그 이유를 설명하시오.



3-2. 오른쪽 그림과 같이 중심이 O이고 반지름이 6인 원의 내부에 임의의 점A를 찍고 원주 위의 임의의 점 A'서로 겹쳐지도록 접었다. 점 A'을 일정한 간격으로 원주 위를 움직이면서 계속해서 접었더니 접은 선의 모양이 오른쪽 아래 그림과 같이 타원이 되었다. 이 때 타원의 장축의 길이와 초점을 구하고 그 이유를 서술하시오.



4-1. 오른쪽 그림은 포물선 $y^2=4x$과 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서 접선의 성질을 탐구하는 문제이다. $\overline{PG}$는 x축에 평행한 선분이고 직선 $\overleftrightarrow{QH}$는 포물선 위의 한 점 P를 지나는 접선이다.

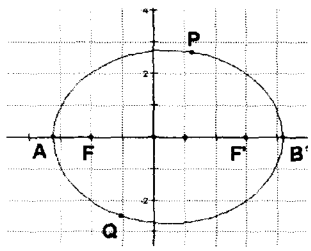


(1) $\overleftrightarrow{QH}$의 방정식을 구하시오

(2) $\overleftrightarrow{QH}$의 x절편과 포물선의 성질을 이용하여 $\overline{QF}=\overline{PF}$임을 증명하시오.(단 F는 초점이다.)

(3) (2)을 이용하여 $\angle FPQ=\angle GPH$임을 설명하고 이것의 의미를 설명하시오.

4-2. 쌍곡선 $2x^2-9y^2=-1$ 위의 점(2,-1)에서 접선의 방정식을 구하시오.

5-1. 오른쪽 그림과 같은 타원에서 두 초점을 F, F', 타원 위의 임의의 두 점을 각각 P, Q, 타원과 x축과의 교점을 A, B라고 하자. 갑과 을 두 사람은 같은 속력으로 다음과 같은 경로를 따라서 움직인다. 갑: $A \to F \to P \to F' \to B$(목적지) 을: $B \to F' \to Q \to F \to A$(목적지) 이다. 이 때, 갑과 을 중 누가 빨리 도착하는가? 또는 동시에 도착하는가? 그 이유를 설명하여라.	
5-2. 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점을 F라할 때, 점 A(5, 3)과 이 포물선 위의 임의의 점 P에 대하여 $\triangle$APF의 둘레의 길이의 최소값은?