대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.1, 99-117. Mar. 2007

# 5학년 아동의 소수 나눗셈 원리 이해에 관한 연구[1)]

이 종 욱*

본 연구의 목적은 소수 나눗셈을 도입하는 수업에서 아동들이 소수 나눗셈을 이해하는 과정을 분석하고 소수 나눗셈 학습과 관련한 어려움을 극복하는 과정에서 아동들이 전개하는 논리적 추론의 특징을 분석하는 것이다. 초등학교와 중학교 수학에 어떤 차이점이 있다면 그것은 논리적 추론의 특성에서 찾을 수 있다. 따라서 초등학교 고학년 아동의 논리적 추론의 특성을 탐구할 필요가 있으며 이를 위해 본 연구에서는 초등학교 5학년 아동을 대상으로 (자연수)÷(소수) 학습을 하면서 나타나는 논리적 추론의 특성을 규명하였다. 연구 결과 5학년 아동들은 구체적 조작 수준을 넘어 가설-연역적 추론의 수준을 경험하면서 형식적 조작기의 특성을 보였다. 그리고 두 종류의 가역성 가운데 상반성에 기초한 아동의 설명은 소수 나눗셈과 관련한 어려움을 극복하는데 효과적이라는 것과 함께 이런 가역성은 아동들이 곱셈과 나눗셈을 같은 연산 체계로 이해할 수 있게 함을 알 수 있다.

## Ⅰ. 서 론

소수 나눗셈을 계산할 때 아동들은 기계적으로 소수점을 옮겨서 자연수 나눗셈으로 바꾸어 계산하는 경향이 있다. 소수 개념은 여러 가지 측면을 가지고 있어서 명확히 파악하기가 용이하지 않기 때문에 학습 지도에 어려움이 제기되고 있다. 초등과 중등 수학 사이에는 어떤 간극이 있는데, 이를 연결하기 위해서는 초등학교 수학에서 논리적 추론을 통한 이해의 경험을 많이 가져야 한다. 따라서 소수 나눗셈과 관련하여 나눗셈의 의미를 자연수 영역을 넘어 소수 영역으로 확장하는 과정을 규명할 필요가 있다.

약 20년 간에 걸쳐 이루어진 연구를 살펴보면, 아동들과 성인들까지 소수의 곱셈과 나눗셈 문제를 해결하면서 여러 가지 어려움을 가지는 것을 알 수 있다(Brown, 1981; Fischbein et al., 1985; Greer, 1987, 1988, 1992; Nesher, 1988; Bell et al., 1989; Ball, 1990; Tirosh and Graeber, 1990; Harel et al., 1994; De Corte and Verschaffel, 1996). 이들 연구는 학생들이 문장제를 해결할 때 가지는 어려움의 요인을 규명하였으며, 그런 어려움을 극복하기 위해 몇 가지를 제안하였다. 그러나, 그런 어려움이 어떻

* 개포초등학교((jongeuk@chol.com)

1) 현재의 교육과정에서는 5-나 단계에서 (소수)÷(자연수)의 계산 원리와 형식을 학습하며 6-나 단계에서 (소수)÷(소수)의 계산 원리를 이해하고 형식화하는 것을 배우게 된다. 본 연구에서는 6-나 단계에서의 (소수)÷(소수)를 학습하기 전에 제수가 소수인 나눗셈을 도입하는 과정으로 (자연수)÷(소수)를 설정하여 학습할 때 아동들이 가지는 논리적 추론의 특성을 분석하고자 한다. 따라서 본 연구에서 사용하는 소수 나눗셈은 (자연수)÷(소수)를 말한다.

게 극복될 수 있는지에 대해서는 분명하지 않다. 특히, 아동들이 교실에서 소수 나눗셈을 도입하는 과정에서 소수 나눗셈을 어떻게 학습하는지는 규명되지 않았다. 왜냐하면, 위에서 언급한 연구에서 모든 연구 대상은 소수를 사용하는 곱셈과 나눗셈을 이미 학습한 학생이거나 어른들이었기 때문이다. 따라서 소수 나눗셈이 교실 수업에서 아동들에게 어떻게 도입되는지 그 과정을 알아보는 것은 중요하며, 학생들의 오개념이 나중에 어떻게 치료될 수 있는지도 또한 중요하다.

이러한 맥락에 따라 본 연구에서 설정한 연구 내용은 다음과 같다.

1. 소수 나눗셈을 도입하는 수업에서 아동들이 소수 나눗셈을 이해하는 과정을 분석한다.
2. 소수 나눗셈 학습과 관련한 어려움을 극복하는 과정에서 아동들이 전개하는 논리적 추론의 특징을 분석한다.

본 연구에서는 5학년 학생들이 소수 나눗셈을 이해하면서 가지는 학습 과정의 특성을 분석함으로써 연구 과제에 대해 논의하게 된다.

## II. 이론적 배경

### 1. 소수 나눗셈과 아동의 논리적 추론 능력 발달

일반적으로 나눗셈은 두 가지 상황으로 구분한다. 각 집합에 들어 있는 사물의 수를 구하기 위해 전체의 수를 집합의 수로 분할하는 분할 나눗셈이 있고, 집합의 수를 구하기 위해 전체의 수를 각 집합에 들어 있는 사물의 수로 측정하는 측정 나눗셈이 있다. 초등학교에서는 제수가 소수인 소수 나눗셈을 도입할 때 측정 나눗셈의 상황을 제시하고 있지만, 피제수와 제수의 단위가 서로 다른 경우에는 측정 나눗셈으로 해결하기가 어려우며 비례 관계를 이해하기 위해서는 분할 나눗셈으로 소수 나눗셈을 설명하는 것이 편리하기 때문에 본 연구에서는 분할 나눗셈의 일반화에 중점을 둘 것이다. 다음의 두 문제를 간단하게 살펴보자.

(A1) 사과 12개를 3사람이 똑같이 나누어 가지려면 한 사람이 몇 개씩 가지면 되는가?

(A2) 리본이 2.8m에 560원이다. 1m는 얼마인가?

두 문제는 모두 단위당 몫을 구하는 분할 나눗셈 문제이며 비례 추론이 가능하기 때문에 구조적으로 같은 문제이다. 수학적으로 표현하면, 비는 $(R \times R, \sim)$, 즉 두 수의 순서쌍으로 된 집합에 주어진 아래의 동치관계이다.

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

이것을 기호로 $a : b = c : d$로 나타낸다. 따라서 분할 나눗셈은 a가 피제수이고 b가 제수인 (a, b)를 몫이 u인 (u, 1)로 변환하는 것을 의미한다. Vergnaud(1983, 1988)가 나타낸 [그림 II-1]의 표현은 순서쌍들 사이의 관계를 설명하는데 유용하다.

Vergnaud(1983)는 측정 공간 M1과 M2 사이에 간단한 비로 구성되는 구조를 동형 측정이

| M1 | M2 |
|---|---|
| 1 | $x=f(1)$ |
| $a$ | $b=f(a)$ |

| 리본(m) | 값(원) |
|---|---|
| 1 | $x$ |
| 2.8 | 560 |

[그림 II-1] Vergnaud의 도식적 표현

라고 하였다. 같은 측정 공간 내에서의 관계는 스칼라 연산자이며, 측정 공간들 사이의 관계는 함수 연산자 f이다. 예를 들면, '2.8m에 560원이라면, 1m는 얼마인가?'라는 문제에서 스칼라 연산자는 같은 종류의 양인 길이는 길이끼리, 가격은 가격끼리 비교하는 방법이다. 즉, 1m는 2.8m의 ÷2.8이므로 이를 가격에 연산자 ÷2.8을 적용하면 560÷2.8=x원이다. 이를 비례식으로 나타내면 2.8 : 1=560 : x 가 된다. 그리고 함수 연산자는 서로 다른 종류의 양끼리 비교하는 방법이다. 즉, 연산자 ×200은 함수 f: M1 → M2 의 계수가 200이므로 1×200=200원이 된다. 이를 비례식으로 나타내면 2.8 : 560=1 : x 가 된다. 여기서 분할 나눗셈은 f(1)을 구하는 것으로 생각할 수 있다.

아동들은 소수 나눗셈을 해결하기 위해 자신이 이미 학습한 자연수 나눗셈을 두 가지 방법으로 사용하게 된다. 이는 Vergnaud의 도식([그림 Ⅱ-2])을 사용하여 나타낼 수 있다.

즉, 순서쌍 (560, 2.8)은 각각에 10을 곱하여 다른 순서쌍 (5600, 28)로 변환하거나 각각을 28로 나누어 (20, 0.1)로 변환하여 계속해서 몫이 되는 순서쌍 (200, 1)로 변환할 수 있다. 이와 같은 개념은 나눗셈에 대한 수학적인 관점과 일관된다. 피제수와 제수로 이루어진 순서쌍은 단지 연산의 두 구성요소라기보다는 어떤 나눗셈에서 단위를 1로 택하고 (a, b)의 동치류를 [a, b]라 하면 [a, b]는 하나의 상수가 되는 몫 u로 표시된다. 즉, a : b=u : 1이 된다.

나눗셈을 이런 관점으로 해석하는 추론 능력은 아동이 초등 수학에서 중등 수학으로 나아가는 데에 있어서 중요하다. 이는 형식적 조작기 사고라는 Piaget의 용어와 관련지을 수 있다. Inhelder & Piaget(1958)는 대략 11살부터 시작되는 청소년의 사고를 특징짓기 위해 형식적 조작이라는 개념을 사용하였다. 그들은 (a)형식적 조작은 몇 가지 가설과 가능성으로부터 출발할 수 있고, (b)형식적 조작은 'p and q', 'p or q', 'not p'와 같은 명제를 조합하는 명제논리가 특징적이며, (c)사고의 대상은 법칙, 명제 등의 일반성이 되고, 그리고 (d)형식적 조작은 두 가지 가역성을 포함한다고 하였다. 소수 나눗셈에서 이런 특징의 예를 보이기 위해 다음과 같은 나눗셈 성질을 살펴볼 수 있다(Okazaki and Koyama, 2005에서 재인용).

$$a\div b=(a\times m)\div(b\times m) \quad (1)$$
$$a\div b=(a\div m)\div(b\div m) \quad (2)$$
$$(a\times m)\div b=(a\div b)\times m \quad (3)$$
$$(a\div m)\div b=(a\div b)\div m \quad (4)$$
$$a\div(b\times m)=(a\div b)\div m \quad (5)$$
$$a\div(b\div m)=(a\div b)\times m \quad (6)$$

여기서 560÷2.8을 5600÷28로 변환하여 (560÷28)×10으로 변환하는 것은 (a=560, b=2.8, m=10으로 두면) 성질(1)과 (a=560, b=28, m=10으로 두면) 성질(6)으로 설명할 수 있다. 어떤 다른 순서쌍으로 변환하는 데에는 몇 가지 가

| 리본(m) | 값(원) |
|---|---|
| 2.8 | 560 |
| 28 | 560×10 |
| 1 | $x$ |

| 리본(m) | 값(원) |
|---|---|
| 2.8 | 560 |
| 0.1 | 560÷28 |
| 1 | $x$ |

[그림 Ⅱ-2] Vergnaud 도식을 사용한 변환

설과 가능성을 포함하며 탐구의 대상은 단지 한 문제에 대한 답을 구하는 것에서 그치는 것이 아니라 나눗셈의 일반적인 메카니즘으로 확장된다는 것이 분명하다. 560÷2.8이 200이 되는 이유를 위에서 제시한 성질을 사용하여 설명할 수 있으며 추론은 삼단논법의 특징을 가지게 된다. 따라서 소수 나눗셈에 대한 학습은 형식적 조작기 사고의 발달과 상당히 관련되는 것으로 볼 수 있다.

Inhelder & Piaget(1958)가 형식적 조작에는 두 가지 가역성이 포함된다고 하였는데 그 가운데 하나는 전도성(顚倒性, inversion)이다. 전도성은 이미 수행한 연산을 취소하여 출발점으로 다시 돌아갈 수 있도록 하는 것이다. '쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가?'라는 문제에서 1L의 값을 구하기 위해 116÷0.8이라는 나눗셈을 하여 145를 구할 수 있다. 이 식은 1L 단위의 양(값)을 구하는 분할 나눗셈의 의미를 포함하는 나눗셈식이다. 여기서 전도성은 문제를 '쥬스 1L에 145원이다. 0.8L는 얼마인가?'로 거꾸로 바꾸어 원래의 나눗셈식을 145×0.8이라는 곱셈식으로, 즉 나눗셈의 역연산인 곱셈으로 바꾸어 생각하는 것이다. 곱셈식으로 바꾸어 상황을 생각하면 쥬스 0.8L에 116원이 되는 출발점으로 돌아간다.

또 다른 가역성은 차이 보상과 관련되며 다른 쪽 방향으로 나아가기 위해 동치가 되는 서로 다른 연산을 수행하는 상반성(相反性, reciprocity)이다. 위의 문제에서 상반성은 스칼라 연산자로서 들이의 관계를 설명하면서 0.8L에서 1L가 되기 위해 '÷0.8'을 적용했다면 이와 함께 '×1.25'도 동치 연산으로 간주하는 것을 말한다.

## 2. 소수 개념의 어려움

앞 절에서 설명한 다음의 두 문제를 다시 보자.

(A1) 사과 12개를 3사람이 똑같이 나누어 가지려면 한 사람이 몇 개씩 가지면 되는가?

(A2) 리본이 2.8m에 560원이다. 1m는 얼마인가?

비록 두 문제는 같은 수학적 구조를 가지고 있지만 아동의 마음 속에서 소수 나눗셈은 자연수 나눗셈과는 아주 다르다는 것을 알아야 한다. 문제(A1)은 전체가 여러 개의 동일한 부분으로 나누어지는 상황을 생각하게 하고 나눗셈은 항상 그 답이 원래의 수보다 작게 한다는 개념을 가지도록 한다. 그러나 문제(A2)는 문제(A1)과 같은 방법으로 생각할 수 없게 한다. 실제로 여러 연구에서(Brown, 1981; Fischbein et al., 1985; Greer, 1987, 1988, 1992; Nesher, 1988; Bell et al., 1989; Ball, 1990; Tirosh and Graeber, 1990; Harel et al., 1994; De Corte and Verschaffel, 1996) 많은 아동들과 심지어 어른들조차도 소수 나눗셈에 어려움을 가지는 것으로 나타났다. 이들 연구는 문장제를 먼저 제시하고 이에 맞는 적절한 연산을 선택하는 방법이나 주어진 연산에 맞는 문장제를 구성하도록 하는 방법으로 아동의 어려움을 규명하였다.

연구자들은 자연수 나눗셈에서 아동들이 나타내는 오개념을 살펴보고 이를 소수 나눗셈까지 확장하여 검토한 다음, 아동들 사이에서 가장 빈번히 나타나는 전형적인 오개념은 '곱셈은 답을 더 크게 하고, 나눗셈은 답을 더 작게 한다'는 것임을 밝혔다(Brown, 1981; Greer, 1987, 1988; Tirosh and Graeber, 1990).

Fischbein et al.(1985)은 소수에 대한 곱셈 문장제에서 나타나는 아동의 오개념은 기본 모델의 암묵적인 특성에 기인한다고 주장하였다. 나눗셈과 관련하여서는 분할과 측정의 기본 모

델이 있다. 분할 모델에서는 '피제수는 제수보다 더 커야 한다', '제수는 자연수이어야 한다', '몫은 피제수보다 작아야 한다'는 암묵적인 강제가 있으며, 측정 모델에서는 '피제수는 제수보다 더 커야 한다'는 한 가지 강제가 있다(Okazaki and Koyama, 2005에서 재인용).

몇 몇 연구자들은 문제에서 사용된 수나 학생들의 수 선호도는 효과를 방해하는 것으로 보고하였다(Bell et al., 1989; Harel et al., 1994; De Corte and Verschaffel, 1996). 승수나 제수가 소수일 때 학생들의 점수는 다소 낮았으며, 그 수가 1보다 작을 때는 더욱 점수가 낮았다. 예를 들면, Bell et al.(1989)의 연구에서 '3.7L의 물에 11g의 소금을 넣었다. 같은 농도의 소금물을 만들려면 1L에는 몇 g의 소금을 넣어야 하는가?'라는 문제에 바른 답을 구한 학생은 50%였으나, '0.9L의 물에 14g의 설탕을 하였다. 같은 농도의 설탕물을 만들려면 1L에는 몇 g의 설탕을 넣어야 하는가?'라는 문제에서는 정답률이 40%로 낮아졌다.

Greer(1987, 1988, 1994)는 수의 유형에 따른 효과가 분명하게 나타나는 현상을 보이면서 포함된 수의 유형을 제외하고는 동일한 구조를 가지는 두 문제를 연속적으로 제시하였을 때, 아동들은 연산의 불변성을 이해하지 못하고 연산을 바꾸는 연산의 비보존성이라는 개념을 제시하였다. 이런 결과는 아동들이 소수 대신에 자연수를 사용하는 동안 연산을 바꿀 수 있기 때문에 문제를 단순화하는 전략은 거의 효과가 없다는 것을 의미한다.

### 3. 인지갈등

Piaget의 인지발달 이론에서 인지구조와 환경 또는 인지구조와 인지구조 사이의 불일치에 의해 발생하는 불균형 상태를 인지갈등이라고 하였다(Piaget, 1985). Piaget는 지능의 발달에 미치는 요인으로 성숙, 물리적인 경험, 사회적인 상호작용, 그리고 가장 중요한 것으로 균형화를 들고 있다. 균형화는 각각의 분리된 기능이 아니라 오히려 적응의 양극인 동화와 조절의 두 기능 사이의 조정의 과정으로 주체가 자신의 사고 중에 최대한 일치성을 끌어들여 모순을 없애는 것이다.

Underhill(1991)은 갈등 수업(conflict teaching)을 제안하면서 성공적인 상호작용은 바로 학생들의 인지적 활동에 의해 가능하며 인지적 활동을 촉진하기 위하여 의도적으로 인지적 갈등을 야기할 것을 제안하고 있다. 여기서 갈등이란 Bettencourt(1989)에 따르면 '인지적인 의미에서 일반적으로 우리들의 기대에 맞지 않고 따라서 우리가 의도하고자 하는 결과를 얻지 못하게 하는 경험의 요소이다'라고 정의하고 있다. 이러한 갈등이 바로 인지적 구조를 보존, 포기 또는 수정하도록 하는 요인인 것이다. Bettencourt는 이 갈등의 근원으로서 (a)선견요소, 우리에게 이미 구성되어져 있는 요소, (b)다른 인지적 유기체, (c)우리의 경험 영역, (d)어떤 주어진 시간에 우리의 지식을 형성하는 인지적인 구조에서의 전체적인 망상 조직의 네 가지를 제시하고 있다. 이러한 갈등요인을 교수-학습의 출발 요소로 도입한 갈등 수업에서는 학생들을 토론에 참여시키고 그리고 자기 자신의 오류를 반성하게 한다. 그렇게 함으로써 수정된 새로운 개념과 방법이 필요하다는 것을 학생으로 하여금 의식하게 한다. 이러한 입장에서 볼 때 이 갈등 수업에는 이른바 파괴적인 단계가 있게 되는 것이다. 이 단계에서는 새로운 개념과 방법이 도입되기 이전의 아이디어들이 불충분하고 부적절하다는 것이 보여지게 된다(박영배, 1996에서 재인용).

## III. 연구 방법

### 1. 연구 대상

실험 수업은 부산시에 위치한 한 초등학교 교실에서 이루어졌다. 이 학교는 학급당 인원이 30명 정도이며 한 학년이 5학급으로 이루어진 대도시의 전형적인 공립학교이다. 5학년의 한 학급 학생 32명(남 17명 여 15명)을 대상으로 5시간에 걸쳐 실험 수업이 이루어졌으며 학생들의 수준은 일반적인 대도시 학생의 수준이었다. 평상시 이 학급의 담임교사는 토론식 수업에 관심을 가지고 있었기 때문에 수학 수업에서도 자신의 의견을 제시하고, 해결 방법을 서로 비교하며, 의사소통 하는 활동이 적절하게 이루어지는 수업을 하였다. 연구자는 담임교사의 양해를 얻어 이 학급의 수학 시간에 연구자가 교사가 되는 실험 수업을 실시하였다.

학생들은 5학년 2학기 수업을 하면서 '소수의 곱셈' 단원을 이미 학습하였고 '소수의 나눗셈' 단원은 실험 수업을 시작하기 약 3주 전에 이미 배웠다. 소수의 나눗셈 단원에서는 (소수)÷(자연수)에 대한 내용을 학습하였다. 제수가 소수인 나눗셈은 6학년에서 배우게 되기 때문에 제수가 소수인 소수 나눗셈을 도입하는 수업을 하기 위해 6학년 직전의 5학년 학생을 연구 대상으로 하였다.

### 2. 문제

실험 수업을 위해 아동들에게 제시한 문제는 Okazaki & Koyama(2005)의 연구에서 제시한 문제를 참고하여 화폐 단위를 원으로 고쳐 본 연구에 사용하였다.

문제1. 리본 2.5m의 값은 100원이다. 리본 1m의 값은 얼마인가?

문제2. 리본 2.4m의 값은 108원이다. 리본 1m의 값은 얼마인가?

문제3. 쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가?

본 연구에서는 피제수가 소수인 (소수)÷(소수) 문제는 포함하지 않았다. 이것은 제수가 피제수보다 나눗셈에서 더 큰 영향을 미친다는 것과 제수의 영향으로 인하여 나눗셈의 원래 의미를 재구성할 수 있다는 사실을 고려하였기 때문이다. 문제1에서와 같이 제수가 소수 한 자리수의 소수일 때 소수 첫째 자리의 수가 5가 되는 문제는 상대적으로 쉬우면서 자연수 나눗셈에 대한 측정의 모델을 사용하여 해결할 수 있다고 보았다. 또한 아동들은 문제1을 해결하기 위해 두 개의 2.5 모형을 사용하여([그림 Ⅲ-1]참고) 자연수 나눗셈으로 변환할 것으로 기대하였기 때문에 실험 수업의 도입 부분에서 사용하는 문제로 결정하였다.

[그림 Ⅲ-1] 2.5 모형

한편, 제수가 1보다 작은 문제3은 실험 수업의 마지막 문제로 사용하였다. 이것은 제수가 1보다 작은 나눗셈 문제에서 아동들은 더욱 어려움을 많이 느끼는 것을 선행 연구를 통해 알 수 있었기 때문이다. 따라서 문제3과 같이 인지적으로 갈등을 가져올 문제와 상대적으로 접근이 쉬운 문제1을 연결하는 단계로 문제2를 설정하였다.

### 3. 자료의 수집과 분석

수업은 먼저 수업을 계획하는 활동으로 시작

하였다. 연구자는 아동의 활동을 예상하였다. 그 다음 실제 수업을 진행하였으며 마지막으로 수업을 마치고 예상한 결과와 실제 수업에서의 차이점을 발견하고 이후 수업을 위한 계획을 세울 때 참고하는 순환적인 과정으로 수업을 진행하였다. 각 수업을 위해 계획한 문제와 학습 목표 및 활동은 다음 <표 Ⅲ-1>과 같다.

수업 계획을 위해 작성한 수업 지도안, 수업을 마치고 수업에 대한 느낌과 특별히 기록할 사항을 적은 수업 일지, 수업을 녹화한 비디오 자료를 전사한 자료, 학생들이 문제를 해결하면서 기록한 활동지를 수집하였다.

자료 분석의 초점은 교실 수업에서 나타나는 아동의 불균형에 두었다. 아동들이 기존에 알고있는 개념과 새롭게 인식하는 개념 사이에 불균형이 생길 때 이를 분석하였다. 이를 위해 먼저 어떤 상태에서 그런 불균형이 나타나는가를 살펴보고 아동들이 어떻게 이런 불균형을 해결하는가를 분석하였다.

여기서 불균형은 개인의 인지에서 느끼는 불균형과 함께 공동체 구성원의 합의가 이루어지지 않은 불균형 모두를 포함한다. 개인의 사고는 공동체에서 의사소통을 하는 가운데 불균형 상태를 보이고 공동체 구성원들과의 조정 활동을 통해 균형화를 이룰 수 있다고 보았기 때문이다. 따라서 본 연구에서는 각 개인의 불균형보다는 공동체의 불균형에 중점을 두고 그런 불균형이 언제 어떻게 일어나며, 어떤 논의를 통해 불균형을 극복하는가를 중점적으로 분석하게 된다.

# Ⅳ. 결과 및 분석

## 1. 소수 나눗셈에 대한 초기 이해

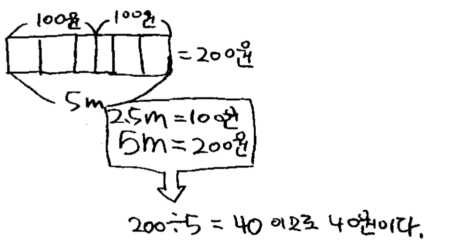
1차시의 수업을 시작하면서 '리본 2m의 값

<표 Ⅲ-1> 학습 목표 및 활동

| 차시 | 문제 | 학습 목표 및 활동 |
|---|---|---|
| 1<br>(40분) | 문제1) 리본 2.5m의 값은 100원이다. 1m는 얼마인가? | · 주어진 문제를 구체물을 사용하여 자연수 나눗셈으로 바꾸어 답을 구한다.<br>· 답이 같다는 의미에서 주어진 문제와 유사한 많은 상황이 있음을 안다.<br>· 수학식으로 활동을 표현한다. |
| 2<br>(40분) | 문제2) 리본 2.4m의 값은 108원이다. 리본 1m의 값은 얼마인가? | · 구체물을 사용하는 활동을 수직선으로 바꾼다.<br>· 문제를 동치인 자연수 나눗셈으로 바꾸어 답을 구한다.<br>· 수학식을 사용하여 활동을 표현한다. |
| 3<br>(40분) | 문제3) 쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가? | · 수직선을 사용하여 답을 구한다.<br>· 수학식을 사용하여 활동을 표현한다.<br>· 답이 피제수보다 크게 되는 이유를 의논한다. |
| 4<br>(40분) | 문제3) 쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가? | · 0.8로 나누는 것이 어떤 의미인가를 의논한다.<br>· 수직선을 사용하여 활동을 비례 도식으로 바꾼다.<br>· 0.8로 나누는 것의 의미를 비례식의 4항들 사이의 관계로 이해한다. |
| 5<br>(40분) | 문제3) 쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가? | · 더 깊이 이루어진 활동을 논의하고 요약한다.<br>· 나눗셈의 의미를 재구성한다. |

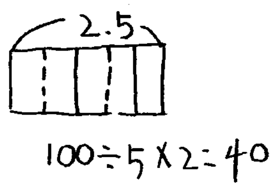
은 100원이다. 1m는 얼마인가?'라는 문제를 제시하였다. 아동들은 쉽게 100÷2를 하여 50을 구했다. 곧바로 문제1 '리본 2.5m의 값은 100원이다. 1m는 얼마인가?'를 제시하였다. 아동들에게는 [그림 Ⅲ-1]과 같은 2.5 모형을 각각 10개 이상씩 학습지와 함께 제공하였다. 각 개인별로 자신의 해결 방법을 학습지에 나타내어 보고 일정 시간이 지나 자신의 방법을 전체 앞에서 설명하도록 하였다. 아동들이 나타낸 방법은 주로 세 가지 방법으로 구분할 수 있다.

방법1, 소수 2.5m를 나타내는 두 모형을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 연결하여 자연수 나눗셈으로 바꾸는 방법이다. 예를 들면 희경[2]이는 '이거 한 개에 한 개를 더 붙여서, 그러면 한 개에 100원이 2개면 200원이 되고 이것은 또 5미터가 되니까 200 나누기 5 해서 40이 됩니다'라고 하였다.



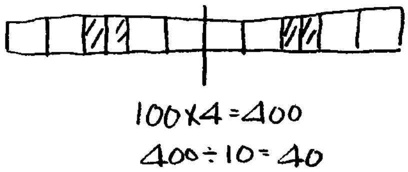

[그림 Ⅳ-1] 2.5m를 2개 연결하기

방법2, 2.5m의 소수 모형을 [그림 Ⅳ-2]와 같이 5등분하는 방법이다. 예를 들면 지현이는 '리본 한 개는 2.5미터이니까 (마지막 0.5부분의 그림을 가리키며) 이것과 같은 것을 5개 만들 수 있습니다. 그러면 0.5가 다섯 개가 되고 100 나누기 5하면 이거 (0.5) 하나에 20원이 되고 다시 1미터의 값을 구해야 하니까 2를 곱하면 40원이 됩니다'라고 설명하였다.




[그림 Ⅳ-2] 2.5m를 5등분하기

방법3, 2.5m 소수 모형을 짝수로 연결하여 제수를 자연수로 만드는 방법이다. 수정이는 '2.5를 4개로 연결하면 100원이 4개니까 4를 곱해서 400원이 되고 다시 10개로 나누면 40원이 됩니다. 그리고 이렇게 개수를 짝수로 연결하면 자연수로 만들 수 있습니다'라고 하였다. 그러나 수정이가 이 방법을 제시하였을 때 경수는 '4개로 연결하면 10(제수)으로 나누어서 답을 편하게 구하지만 6개를 연결하면 15로 나누어야 하기 때문에 조금 귀찮아 진다'고 하였다. 즉 짝수로 연결하는 방법에도 차이가 있다는 것을 주장하였다.




[그림 Ⅳ-3] 2.5m를 짝수로 연결하기

이 의견에 대해 찬주는 '그러면 그냥 2개를 연결하는 방법이 제일 간단하잖아'라고 하면서 첫 번째 방법에 찬성하였다. 이에 대해 경수는 '그냥 2.5를 10개로 만들면 25가 되니까 1000 나누기 25를 하면 바로 40이 되는데…'라고 하였다. 아동들은 가장 효과적인 방법을 구하기 위해 가장 작은 수의 짝수 개로 2.5를 연결하는 방법과 10개를 연결해서 소수를 자연수로 고치는 방법으로 발전하였다.

2) 아동명은 모두 가명을 사용하였음.

2차시에 문제 '리본 2.4m의 값은 108원이다. 리본 1m의 값은 얼마인가?'를 제시하였다. 아동들이 해결한 방법은 대략 2가지로 정리할 수 있다. 먼저 1차시의 방법3에 기초하여 2.4를 5나 10으로 곱하여 자연수 나눗셈 문제로 바꾸어 계산하는 방법이었다. 다음은 1차시의 방법2에 기초하여 2.4를 24등분하여 0.1의 값을 구하고 다시 10을 곱하여 1m의 값을 구하였다. 교사는 아동들이 답이 같다는 의미에서 주어진 문제와 유사한 많은 상황이 있음을 이해하기를 기대하였다. 아동들에게 108÷2.4, 216÷4.8, 540÷12, 1080÷24와 같은 많은 상황을 생각하도록 하였다. 아래 <표 Ⅳ-1>과 같은 표를 제시하고 리본의 수에 따른 길이와 값이 어떻게 변하며 각 순서쌍이 108÷2.4와 동치라는 것을 이해하기를 기대했다.

아동들은 쉽게 표의 값을 적을 수 있었다. 그리고 각각의 상황은 모두 108÷2.4와 동치라는 것을 이해하는 것 같았다. 계속해서 아동들에게 각각의 경우를 그림으로 나타내는 방법을 탐구하기 위해 교사는 길이와 값을 동시에 나타내는 [그림 Ⅳ-4]와 같은 수직선을 소개하였다.

아동들이 자신의 생각을 식으로 나타내도록 하기 위해 몇 명을 지적하여 칠판에 식으로 나타내도록 하였다. 성실이는 5와 10으로 곱해서 다음 [그림 Ⅳ-5]와 같은 식으로 나타내었다.

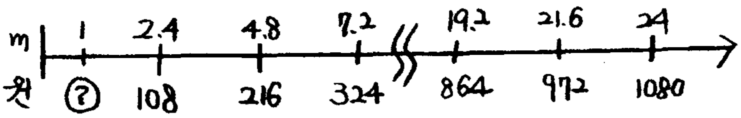
아동들은 2시간의 수업을 통하여 소수 나눗셈 문제를 자연수 나눗셈으로 바꿀 수 있었으며 이러한 생각은 비례 관계로 나눗셈을 해결할 수 있는 첫걸음이 되었다.

## 2. 불균형의 출현

3차시에 문제3 '쥬스가 0.8L에 116원이다. 쥬스 1L는 얼마인가?'를 제시하였다. 교사는 먼저 아동들에게 이 문제를 해결하기 위해 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 중 어떤 연산을 사용해야 하는가를 물었다. '곱셈', '나눗셈', '곱셈을 하고

<표 Ⅳ-1> 길이와 값의 변화

| 길이(m) | 2.4 | 4.8 | 7.2 | 9.6 | 12 | 14.4 | 16.8 | 19.2 | 21.6 | 24 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 값 (원) | 108 | 216 | 324 | 432 | 540 | 648 | 756 | 864 | 972 | 1080 | … |




[그림 Ⅳ-4] 길이와 값의 변화를 나타내는 수직선

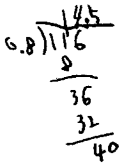
5개라면: $2.4 \times 5 = 12.0$　　10개라면: $2.4 \times 10 = 24$

$108 \times 5 = 540$　　$108 \times 10 = 1080$

$540 \div 12 = 45$　　$1080 \div 10 = 45$

[그림 Ⅳ-5] 성실이가 표현한 수학식

나눗셈을 한다', '나눗셈을 하고 곱셈을 한다', '나누고 더한다' 등 다양한 연산을 제안하였다. 연구자는 서로 다른 연산에 대해 처음에는 몇몇 아동들이 불균형 상태를 보일 것으로 추측하였다. 그러나 각자 나름대로 자신이 선택한 연산에 맞는 해결 방법을 전체 아동들에게 설명하였다. 예를 들면 찬규는 '0.8×125=100, 116×125=14500, 14500÷100=145'의 식을 적고 '8 곱하기 125는 1000인데 0.8 곱하기 125를 하면 100이 됩니다. 그래서 똑같이 116에도 125를 곱하면 14500이 나오고 1L가 되기 위해서는 100으로 다시 나누면 됩니다'라고 하였다. 성실이는 '116÷8=14.5, 14.5×10=145'의 식을 적고 '1L의 값을 구하려면 0.1L의 값을 구해서 10을 곱하면 되는데 이거는(앞의 식) 0.1L의 값이 되고 그러면 14.5에 10을 곱하면 1L의 값을 구할 수 있습니다'라고 하였다. 찬규는 곱셈을 하고 나눗셈을 하였으며 성실이는 나눗셈을 하고 곱셈을 하였다. 연산이 다양한 만큼 그 해결 방법도 다양하였다. 이와 같은 의견에 대해 아동들은 특별한 반대 의견이 없었다. 그런데 경훈이가 '116÷0.8'의 식을 적고 나눗셈으로 해결할 수 있다고 하면서 이것을 세로셈으로 계산하면서 인지적 갈등 상태를 경험하기 시작했다. 다음의 대화를 살펴보자




01 경훈: 116 나누기 0.8은

02 수정: 소수점을 잘못 찍었는데요. 145인데요.
03 병수: 아니지 맞지, 0.8로 나누었는데 답이 116보다 작게 나와야지.
04 수정: 아까 전에 성실이가 할 때는 145가 나왔는데 아니잖아.
05 경수: 116을 0.8로 나누면 0.1리터의 값을 구하게 되요.
06 교사: 뭐라고? 0.1리터의 값을 구할 수 있다고?
07 병희: 그게 아니고요, 저 값이 0.1리터의 값이라구요.
08 지영: 0.8을요 8로 고치고요, 116에 0을 더 붙이고 풀어야 되요.

계산상의 오류에 대해 아동들은 서로 의견이 맞지 않았다. 학원에서 이미 6학년 수학을 학습한 지영이는 제수가 소수인 나눗셈의 알고리즘을 적용해서 경훈이의 계산이 잘못되었다는 것을 지적하였다. 그러나 경수는 계산상의 오류를 지적하는 것이 아니라 0.8m의 리본을 8등분했을 때 14.5원이 될 수 있음을 지적한 것 같다. 연구자는 아동들이 세로 나눗셈을 해결하는 알고리즘에 초점을 두려는 것을 의도적으로 중단시켰다. 왜냐하면 본 연구에서 아동들이 소수 나눗셈을 이해하는 과정을 분석하면서 중점을 둔 것은 알고리즘에 대한 이해 과정이 아니라 논리적 추론이었기 때문이다. 대화가 잠시 중단 된 후 교실 논의는 이 문제를 해결하는 식이 116÷0.8인가에 대한 논의로 확장되었다. 다음의 대화를 보자.

09 두희: 그런데 116 나누기 0.8이 맞나?
10 교사: 이 문제의 식이 116÷0.8이 맞습니까?
11 성실: 1m의 값을 구하기 위해서는 그렇게 해야 되요.
12 교사: 왜 1m의 값을 구하기 위해서 0.8로 나누어야 하지?
13 창현: 0.8이요 1이 될려면요... 4분의 5를 곱해주면 되요.
14 교사: 4분의 5를 곱한다고?
15 창현: 0.8을 4로 나누면 0.2가 되잖아요, 그래서 다시 5를 곱해야 하니까 4분의 5를 곱하면 되지요.
16 교사: 4분의 5로 곱하면 되나요?
17 수정: 116 나누기 0.8이니까 116 나누기 10분의 8로 해도 됩니다.
18 교사: 분수로 나눈다고? 분수로 나누면 답을

어떻게 구하지?

19 수정: 역수로 곱하면 $\frac{1}{116} \times \frac{8}{10} = 145$.

아동들은 문제를 해결하는 식이 왜 116÷0.8인가에 대한 합의점을 도출하지 못하였을 뿐만 아니라 오히려 소수 나눗셈 문제를 분수 나눗셈으로까지 확장하면서 더욱 혼란한 상태를 만들어 갔다. 대부분의 아동들이 뭔가 이상하다는 것은 알면서도 명쾌하게 자신의 의견을 다른 학생들에게 설명하여 정당화하지는 못했다. 대화 19에서 수정이는 역수로 곱한다는 것을 어디에선가 들었던 것 같지만 피제수는 역수로 만들고 제수는 역수로 만들지 않고 곱셈을 하였다. 아동들은 아직 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 유도하는 방법을 학습하지 않았으며 제수가 소수인 소수 나눗셈에서 몫을 구하는 식에 대한 이유를 분명히 설명할 수 없었다.

### 3. 균형화의 과정

3차시의 후반에 발생한 인지적 불균형은 4차시에 해결되기 시작했다. 4차시에는 두 가지 중요한 문제가 해결되었다. 하나는 왜 1m의 값을 구하기 위해 116÷0.8을 해야하는가에 대한 것이었으며, 다른 하나는 상반성에 의한 균형화가 그것이다.

#### 가. 왜 116÷0.8인가?

교사는 아동들에게 리본이 0.8m에 116원일 때 1m의 값을 구하기 위해 왜 116÷0.8의 식을 사용하는가에 대해 질문하면서 수업을 시작하였다.

20 교사: 왜 116을 0.8로 나누어야 1m의 값을 구할 수 있나요?

21 병주: ([그림 Ⅳ-4]와 같은 수직선을 칠판에 그리면서) 0.8을 5번 연결하면 4가 되잖아요. 그러면 116에 5를 곱하면 560이 되거던요. 그래가지고 560을 4로 나누면 1m의 값을 구하게 되지요.

22 교사: 그런데 그렇게 하는 것이 116÷0.8과 같다고 할 수 있나?

23 병주: 같지요. 분수에서 분자하고 분모에 같은 수를 곱하는 것처럼 이것도 그렇게 하면 되지요.

24 교사: 분수처럼?

25 수정: 있잖아요... 0.8에 5를 곱했으니까 116에도 5를 곱하면 똑같게 되잖아요. 그래가지고 4로 나누면 답이 되는데요.

26 민희: (칠판에 수직선을 그리면서) 0.8미터에 116원이니까 0.8을 8로 나누면 0.1이 되잖아요. 그래가지고 (0.1을 가리키며) 이것을 10으로 곱하면 되잖아요.

위의 대화에서 병주의 설명은 아동들에게 어느 정도 인정을 받기는 하였지만 전체적으로 합의될 수 있는 방법으로 채택되지는 못했다. 그리고 민희의 방법은 나눗셈의 기본 상황인 분할 나눗셈으로 해결하려고 하였지만 상황을 116÷0.8로 연결하지는 못했다. 대부분의 아동들에게 인정을 받지 못했으며 논의는 다시 원점으로 돌아가는 것 같았다. 그러나 수정이는 자신의 해결방법을 수정하여 다음 대화와 같이 비례 관계를 분수식으로 설명하였다.

27 수정: 116을요, 0.8로 나누는 거는 $\frac{116}{0.8}$가 되는데요, 그러면 $\frac{116 \times 5}{0.8 \times 5} = \frac{580}{4}$가 되니까 116 나누기 0.8은 580 나누기 4가 되지요.

수정이가 설명한 방법에 아동들은 모두가 '맞다 그러면 되지'라고 하면서 자신들이 마치 이 문제를 해결한 것처럼 기뻐하며 수정의 방법에 찬성의 뜻을 나타내었다. 위의 대화 27에서 수정이 설명한 방법은 병주의 대화 21을 좀 더 구체적으로 설명한 방법으로 연역적 추론의

초기 형태를 보이고 있다. 사실 병주의 표현과 수정의 설명을 합성하면 다음과 같이 삼단 논법으로 해석할 수 있다.

진술1: 만일 580을 4로 나누면, 1리터의 값을 구할 수 있다.
진술2: 580÷4는 116÷0.8로 바꿀 수 있다.
진술3: 따라서 116÷0.8은 1리터의 값을 구하기 위한 식이다.

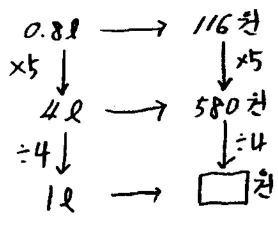
수정이가 비록 모두가 인정하는 방법으로 설명을 하긴 하였으나 민희가 제시한 방법은 아동의 구체적인 조작과 식으로 충분히 설명이 가능한 방법이었다. 그러나 아동들은 여전히 이 상황을 기호로 연결하지 못하는 불균형 상태를 경험하고 있었으며 논리적인 설명이 더 요구되는 상태로 불균형이 충분히 해결되지 못하였다.

### 나. 상반성에 의한 균형화의 과정

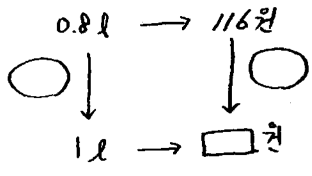
균형은 나눗셈을 곱셈 연산으로 바꾸어 생각하는 민희의 말로부터 시작되었다.

28 민희: 아까 전에, 0.8미터에 116원이니까 0.8을 8로 나누면 0.1이 되잖아요. 그래가지고 이것을 (0.1을 가리킴) 10으로 곱하면 되잖아요. 이거는 $116\times\frac{1}{8}\times 10$이 되고 그래서 $116\times\frac{10}{8}$이 되거던요. 그런데 나누기는 역수로 곱하니까 반대로 곱하기는 역수로 나누면 되니까 116 나누기 10분의 8이에요.
29 교사: 0.8을 8로 나눈다고 했는데 갑자기 곱하기 8분의 1로 바뀌었네?
30 민희: 아 그거는 나누기 8은 곱하기 8분의 1과 똑같아요.
31 교사: 어째서?
32 민희: 8명이 똑같이 나누어 먹는거랑 8개를 똑같이 나눈 것 중의 한 개랑은 같은 거예요.
33 교사: 그러면 왜 또 곱하기 8분의 10이 나누기 10분의 8로 바뀌었지?
34 민희: 나누기는 곱하기로 바꿀 때 역수로 곱하니까요.

민희는 '÷자연수'가 '$\times\frac{1}{8}$'이 되는 이유에 대해서는 나눗셈의 분할 상황과 곱셈의 연산자의 의미를 사용하여 정확하게 설명할 수 있었다. 그러나 역수로 곱하는 원리에 대해서는 분명하게 설명하지 못하였다. 하지만 민희의 방법은 창현이가 상반성의 원리로 균형화를 이루는 실마리를 제공하였다. 교사는 지금까지의 수직선을 이용한 방법을 좀 더 비례적인 표현으로 바꾸어 비례식에 대한 개념을 설명하고자 [그림 Ⅳ-6]과 같은 비례 도식을 제시하였다. 이것은 대화 21에서 병주가 설명한 것을 비례 관계의 도식으로 나타낸 것이다. 이 관계에 대해 다시 한번 아동들과 생각을 하고 곱셈이나 나눗셈으로 스칼라 연산자를 구하는 활동을 하였다. 그런 다음 [그림 Ⅳ-7]과 같이 중간 과정이 생략된 비례 도식을 제시하면서 빈 칸에 어떤 수가 들어가야 하는가를 논의하였다.




[그림 Ⅳ-6] 단계적 비례 도식




[그림 Ⅳ-7] 생략된 비례 도식

35 교사: ([그림 Ⅳ-7]의 동그란 부분을 가리키며) 0.8에서 1로 갈 때는 어떻게 해야 합니까?

36 창현: 곱하기 4분의 5.

37 교사: 곱하기 4분의 5? 왜?

38 창현: 4등분으로 나누면 한 개가 0.2인데 5개를 더하면 1이 되니까 4분의 5

39 교사: 그게 무슨 말이지?

40 창현: 0.8을 나누기 4로 하면 0.2가 되잖아요. 그리고 0.2를 곱하기 5하면 1이 되잖아요. 그러니까 곱하기 4분의 5

41 교사: 나누기 4 곱하기 5가 곱하기 4분의 5?

42 창현: 나누기 4는 곱하기로 고치면 곱하기 4분의 1이잖아요. 그러니까 곱하기 4분의 1 곱하기 5는 곱하기 4분의 5가 되지요.

창현이는 4분의 5로 곱하는 분명한 방법을 알고 있었으며 민희처럼 '÷자연수'가 '× $\frac{1}{\text{자연수}}$' 이 되는 성질을 사용하였다. 이것은 초등학생으로서 설명할 수 있는 가장 실제적인 설명이었기 때문에 완벽에 가까웠다. 그러나 아쉽게도 교사는 학급의 다른 아동들이 얼마나 이 방법을 인정하는가를 조사하지 못하였다. 연구자는 분수가 아닌 수, 즉 소수로 표현하기를 기대하였다. 분수를 사용하지 않고 다른 수로 표현하도록 하였다.

43 교사: 다른 수로 나타낼 수는 없을까?

44 찬규: 1.25

45 교사: 1.25? 어떻게 해서?

46 찬규: 4분의 5가 100분의 125잖아요. 그러니까 1.25

47 교사: (칠판의 빈 칸에 ×1.25를 적는다)

창현이가 0.8을 1로 변환하기 위해 4분의 5를 사용한 방법은 대부분의 아동들에게 인정을 받았다. 그리고 찬규가 설명한 곱하기 '×1.25' 도 공동체에서 인정을 받았다. 그런데 연구자는 의문이 생겼다. 1m의 값을 구하기 위해서는 원래의 식 즉 116÷0.8로 구해야 하는데 이것을 비례 도식과 어떻게 연결하는가를 아동들에게 탐구하도록 하고 싶었다.

48 교사: 우리가 지금 구하고자 하는 것이 무엇입니까?

49 경수: 1리터일 때 쥬스의 값.

50 교사: 그때의 값은 어떻게 구합니까?

51 아동들: ....(답이 없음)

52 교사: 원래의 문제를 다시 읽어봅시다.

53 아동들: (문제를 다시 읽고) 116 나누기 0.8.

54 교사: (생략한 비례도식의 오른쪽을 가리키며) 그러면 여기에 '÷0.8'을 적으면 되겠습니까?

55 아동들: (다같이) 예!

56 교사: (생략한 비례도식의 왼쪽을 가리키며) 그러면 여기는 '×1.25'가 있는데?

57 창현: 거기도 0.8로 나누면 되지요.

58 교사: (칠판에 분수 형태로 $\frac{0.8}{0.8}$을 적으며) 0.8을 0.8로 나누면 1이 됩니까?

59 아동들: 예

아동들은 분할 나눗셈으로 해결하는 식 116÷8×10을 116× $\frac{1}{8}$ ×10으로 해석한 것을 다시 '×1.25'로 재해석하였으며 이것을 교사의 도움을 받아 '÷0.8'로 변환하는 것이 가능하게 되었다. 연구자는 그들의 관심을 '×1.25'와 '÷0.8'의 관계에 집중하기 위해 노력하였다.

60 교사: 0.8에서 1로 갈 때에 곱하기 1,25를 사용했는데 116에 곱하기 1,25를 하면?

61 경수: 145 (아동들은 이미 그 답이 이전의 활동을 통해 145라는 것을 알고 있었다)

62 교사: 그러면 0.8에서 1로 갈 때 나누기를 하면?

63 병수: 나누기 0.8

64 교사: 그렇다면 '×1.25'하고 '÷0.8'하고 같습니까?

65 아동들: (다같이) 예!
66 교사: 116 나누기 0.8은 얼마?
67 창현: 아까 전에 116 곱하기 4분의 5를 했으니까 (사실 이것은 대화 42에서 창현이가 설명한 부분이다) 145
68 교사: 나누기 0.8을 하니까 값이 116보다 어떻게 되었습니까?
69 병주: 더 커졌어요.
70 교사: 곱하기 1.25를 해도 116보다 커졌고 나누기 0.8을 해도 116보다 더 커졌지요.
71 아동들: 예!

아동들은 '÷0.8'을 '×1.25'와 관련하여 이해하였다. 아동들은 '÷0.8'이 '×1.25'과 같은 결과를 가져온다는 사실을 통해 왜 몫이 피제수보다 커지는가를 이해하기 시작했다. 그러나 얼마나 많은 아동들이 이를 정확하게 이해하는지를 조사하지는 못했다. 5차시에는 4차시에서 누락된 부분을 보충하였다. 가역성에 포함된 전도성에 대한 질문을 하였다.

72 교사: 0.8에서 1이 되기 위해 어떻게 해야합니까?
73 민수: 곱하기 4분의 5를 하면 됩니다.
74 교사: 그렇다면 이제 1에서 0.8이 되기 위해서는 어떻게 하면 됩니까?
75 민수: 그야 뭐 다시 4분의 5로 나누면 되지요.

아동들은 전도성을 통한 가역성을 역연산으로 받아들였으며 '÷0.8'에 대해서도 다시 '×0.8'과 같은 전도성으로서의 스칼라 연산자를 제시하였다. 그러나 이것을 상황과 관련짓는 것과 같이 더 깊은 논의를 끌어내지는 못했다.

## V. 논 의

소수 나눗셈에 대한 수업을 하면서 아동들은 3차시 이후에 계속적인 불균형을 경험하고 이를 극복해 나가면서 소수 나눗셈을 더 깊이 이해하였다. 자신의 논리적 추론을 더욱 심화한다는 것을 알 수 있었다. 이런 과정은 크게 세 가지 특징이 있는 것 같다. 이 장에서는 아동들이 나타낸 이해의 과정을 먼저 살펴보고, 아동들이 나타낸 추론의 특징에 대해 논의할 것이다.

### 1. 소수 나눗셈의 이해

아동들이 소수 나눗셈을 이해하는 과정을 표현과 관련하여 생각해보면 다음과 같은 특징을 살펴볼 수 있다.

첫째, 소수 나눗셈과 동치인 자연수 나눗셈을 이해하였다. 처음에 아동들은 '2.5m에 100원'을 나타내는 소수 모형 2개를 연결하여 '5m에 200원'으로 바꾸어 자연수 나눗셈 200÷5로 문제를 해결하였다. 아동들은 소수 나눗셈을 자연수 나눗셈으로 고쳐서 계산하는 것이 더 쉽다는 것을 발견하고는 원래의 상황과 동치인 자연수 나눗셈, 예를 들어 순서쌍 (2.5, 100)과 동치인 (5, 200), (10, 400), (15, 600)과 같은 많은 상황을 만들어 이들이 같은 값을 가진다는 것을 이해하였다. 이런 개념은 표를 통하여 각 순서쌍을 나타내어 봄으로써 제수가 자연수일 때뿐만 아니라 소수일 때에도 동치가 됨을 이해하게 되었으며, 길이와 값의 변화를 나타내는 수직선을 통하여 비례 개념의 초기 이해를 발달시킬 수 있게 되었다. 활동적 표현인 소수 모형을 사용하여 시작된 소수 나눗셈의 개념은 수직선과 표를 만들어보는 영상적 표현을 통해 자신이 이전에 가지고 있던 자연수 나눗셈과 소수 나눗셈을 자연스럽게 연결할 수 있도록 도왔다.

둘째, 소수 나눗셈을 가설-연역 수준에서 이해하였다. 소수 모형과 같은 구체물의 사용에

서 벗어나 수직선과 표를 통하여 동치 개념을 이해한 아동들은 이해의 깊이가 점점 깊어지게 되었다. 이런 과정에서 아동의 사고 대상은 단지 답을 구하는 것에서 나아가 수학식의 메카니즘으로 옮겨졌다. 이런 이해의 과정에서 불균형이 나타나기 시작했는데 118÷0.8에 대한 세로 나눗셈에서 잘못된 몫 14.5에 대해 반박한 아동을 통해 그런 변화가 일어났다. 아동은 116÷0.8과 580÷4가 동치이기 때문에 116÷0.8은 145가 맞다고 생각하였다. 그러나 그들은 이런 답이 맞는가의 문제에서 1m의 값을 구하는 식이 116÷0.8이 과연 타당한가라는 문제로 논점을 옮겼다. 이런 불균형 상태에서 아동들은 원래의 식 '116÷0.8'과 창현이가 말한 대화 15에서의 '$116\times\frac{5}{4}$', 그리고 수정이가 제시한 대화 17의 '$116\div\frac{8}{10}$'의 관계에 주목하기 시작하였다. 그러나 아동의 개념은 대화 19의 수정이가 말한 것과 같이 아직 인지적 균형이 이루어지지 않은 상태였다.

셋째, 상반성에 의해 소수 나눗셈 식을 이해하였다. 소수 나눗셈에서 '÷0.8'과 '×1.25'가 서로 다른 연산이지만 같은 연산자가 됨을 이해하기 위해, 아동들은 먼저 문제3에 맞는 바른 식이 116÷0.8이 되는 이유를 탐구하는 과정이 있었다. 이 과정에서 그들은 소수를 분수 표현으로 바꾸어 동치분수로 소수 나눗셈 116÷0.8과 자연수 나눗셈 580÷4가 같음을 정당화하였다. 그러나 엄밀하게 말하면 대화 27에서 수정이가 제시한 $\frac{116}{0.8}$은 분수가 아니라 길이와 가격이라는 서로 다른 대상을 비교한 비의 한 표현이었다. 아동들은 소수보다는 분수로 나누려는 경향이 있었으며 분수의 기본 상황인 분할 나눗셈으로 문제를 해결하고자 하였다. 그러나 분수 나눗셈을 분할의 상황으로 설명하는 것은 쉽지 않았다.

문제를 해결하기 위해 식이 116÷0.8이 되는 이유를 정당화한 다음, 아동들은 동전의 양면과 같은 '÷0.8'과 '×1.25'를 이해하였다. 아동들은 0.8이 1이 되기 위해 '$\times\frac{5}{4}$'를 연산자로 사용하였는데 이를 보면 아동들은 여전히 나눗셈보다는 곱셈을, 소수보다는 분수를 사용하는 연산자를 선호한다는 사실을 알 수 있다. 비록 교사에 의해 유도되었지만 '×1.25'는 '÷0.8'과 같은 것으로 인정하였다. 그들에게 0.8로 나누는 것은 소수로서의 1보다 작은 소수 0.8로 나누는 것이 아니라 어떤 수를 같은 수로 나눈다는 의미를 가졌다. 그러나 결국에는 116×1.25는 116÷0.8과 같다는 것을 이해하게 되었다.

소수 나눗셈을 이해하기 위해 사용한 비례도식은 기호적 표현을 더욱 정교하게 만들었으며 아동의 사고를 증진시킬 수 있었다. 이런 비례 도식, 특히 생략된 비례 도식을 칠판에 나타냄으로 아동들은 도식에서 수와 연산 사이의 관계를 더 깊이 탐구하였다. 비례 도식은 아동들이 곱셈과 나눗셈이 상보성을 가지는 연산, 즉 서로 다른 별개의 연산이 아니라 같은 연산 체계로 이해하는 데 도움이 되었음을 알 수 있다.

소수 나눗셈의 이해와 관련하여 지금까지의 결과는 Okazaki & Koyama(2005)가 일본 아동들을 대상으로 실행한 연구의 결과와 대체적으로는 유사하지만 몇 가지 점에서 차이를 나타낸다.

아동들은 점차 구체적인 것에서 벗어나 가설-연역 수준에서 나눗셈을 생각하기 시작하였다. Okazaki & Koyama의 연구에 따르면 이 수준에서 일본 아동들은 소수 나눗셈을 학습하면서 분수에 대한 언급이 전혀 없었다. 그러나 우리나라의 아동들은 분수 나눗셈과 연관지으면서 사고하는 경향이 강했다. 분수와 소수가 관련이 많기 때문에 아동들이 소수 나눗셈을 해결

하면서 분수를 사용할 수 있다. 본 연구에서 아동들은 소수 나눗셈의 원리를 이해하기 위해 분수를 자주 사용하였으며 비례 관계를 나타내는 도식에서도 분수로 표현할 때 연산자로서의 소수를 이해하는데 도움이 되었다. 소수 나눗셈을 학습하면서 분수에 대한 언급이 전혀 없다는 것에 대해서는 의문이 남는다.

Okazaki & Koyama의 연구 결과와 차이가 나는 또 다른 사실은 소수 나눗셈을 이해하는 가역성과 관련된다. Okazaki & Koyama의 연구에서는 두 가지 가역성, 즉 전도성과 상반성 모두를 아동들이 구성할 수 있었지만 본 연구에서의 아동들은 상반성에 의해 소수 나눗셈을 주로 이해하였다. 다시 말하면 전도성에 의해 소수 나눗셈을 이해하려는 사고를 거의 하지 않았다. 연구자가 몇 번 전도성을 유도하는 질문을 하였지만 별 관심을 두지 않았다. Okazaki & Koyama의 연구에 참여한 아동들이 일본의 교육대학 부속초등학교 아동들로 대부분 수학적으로 추론하는 능력이 우수했다는 사실을 고려하면, 수학적 환경이 충분히 제공될 때 아동에 따라 두 가지 가역성에 기초한 소수 나눗셈의 이해가 가능할 수 있을 것으로 본다.

### 2. 소수 나눗셈 이해에서 나타나는 추론의 특징

앞 절에서 나타난 아동들의 추론은 구체적 조작기 사고에서 형식적 조작적 사고로 넘어가는 단계인 두 번째 단계에서 어느 정도 논리적이었다는 것을 알 수 있다. 이론적 배경에서 살펴본 나눗셈의 여섯 가지 성질을 아동의 설명과 관련시키면 아동들은 성질 (1)과 (6)을 주로 사용하여 추론하였다. 성질(1)은 116÷0.8을 580÷4 또는 1160÷8로 바꾸는 데서 찾을 수 있고, 성질(6)은 116÷0.8을 116÷8×10을 바꿀 때 사용하였다.

왜 116÷0.8이 1L의 값을 나타내는 식인가를 정당화하는 과정을 살펴보면 아동의 추론은 형식적 조작기 사고의 몇 가지 특성을 나타내는 것 같았다. 예를 들어 수정이의 설명(대화 27)과 병주의 설명(대화 21)을 합성하면 Ⅳ장 3절에서 설명한 바와 같은 삼단 논법적 추론을 하였다. 창현이는 대화 38, 40, 42에서 나눗셈 성질 (2)와 (3)을 사용하였으며 가환성을 이용하여 식 그 자체를 조작하였다. 다시 말하면, 식에서 기호적 연산을 사용하여 116÷0.8을 116×$\frac{5}{4}$로 바꾸어 116×1.25로 생각할 수 있는 형식적 조작기 사고를 가지는 것 같았다.

수학적인 관점에서 보면 순서쌍 (a, b)를 변환하는 스칼라 연산은 여전히 자연수였다고 본다. (116, 0.8)에서 (580, 4)이 될 때는 '×5', (580, 4)에서 (145, 1)이 될 때는 '÷4'의 자연수를 스칼라 연산자로 사용하였다. 그러나 세 번째 이해 단계에서 0.8리터를 1리터로 직접 변환하면서 스칼라 연산자에서 소수 '×1.25'를 가격 116에도 직접 사용하였으며, 또한 116÷0.8을 통해 1리터의 값을 구하는 과정 0.8÷0.8에서 스칼라 연산자에 소수를 사용하였다. 뿐만 아니라 아동들은 '÷0.8'은 '×1.25'와 동치 연산이 된다는 사실을 이해하였다. 이 시점에서 아동은 곱셈과 나눗셈의 상호 관계를 이해하는 수준에 도달하였다.

### 3. 제언

본 연구에서는 아동들이 소수 나눗셈을 학습하면서 직면하는 어려움을 극복하는 과정과 그 과정에서 나타나는 논리적 추론의 발달을 실험수업을 통해 분석하고자 하였다. 연구 결과를 살펴보면 비례 도식과 같은 기호적 표현은 Inhelder & Piaget가 형식적 조작에 포함시킨 전

도성과 상반성에 기초한 추론을 가능하게 하여 소수 나눗셈의 어려움을 극복하도록 하였다. 아동이 자연수 나눗셈의 기본 상황 가운데 분할의 상황으로 소수 나눗셈을 이해하려는 집착에서 사라지면서 소수 곱셈과 나눗셈의 상호 관계를 이해하게 되었다. 연구에서는 이런 단계를 세 단계로 구분하여 설명하였다. 이 단계는 선형적으로 나타난 것이 아니라 일시적으로 역행하는 현상이 종종 일어났으며 이런 불균형 상태를 경험하면서 균형화로 진행하였다. 이와 같은 연구를 진행하며 후속연구를 위한 제언을 하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 지방 대도시 지역의 공립학교 아동들을 대상으로 연구를 실행하였다. 그리고 실험 수업은 연구자가 교사가 되는 수업이었다. 연구에 참여한 학급의 담임교사는 토론 문화를 평소 실천하는 교사였으며 수학시간에도 자신의 의견을 정당화하는 활동을 많이 하는 교사였다. 따라서 연구 대상 학급의 학생이 아닌 다른 학생을 연구대상으로 하고, 연구자와 같이 연구에 대한 충분한 지식을 사전에 가지고 있는 교사가 아닌 일반적인 초등교사가 진행하는 수업을 했을 때 본 연구와 같은 결과가 나타날 것인가에 대한 후속연구가 뒤따라야 할 것이다.

둘째, 본 연구에서는 소수 나눗셈의 상황 가운데 분할 나눗셈의 일반화를 다루었는데 측정 나눗셈과 관련한 소수 나눗셈에서 아동의 추론이 어떻게 발달하는가에 대한 연구가 필요할 것으로 본다. 또한 소수 나눗셈이 연구의 주된 수학적 내용이었지만 소수는 분수와 깊은 관계를 가지는 것으로 아동의 설명에서도 자주 출현하였다. 따라서 분수 나눗셈과 소수 나눗셈의 관계에 대해서 심도 있는 분석이 이루어져야 할 것이다.

셋째, 본 연구에서는 각 개인 학생에 대한 소수 나눗셈의 이해에 중점을 두는 것이 아니라 학급 전체의 상황에서 학생들이 소수 나눗셈을 이해하는 과정을 대략적으로 살펴보았다. 학생 개개인이 이해하는 정도를 각각의 이해 과정 중 몇 명의 아동이 어떤 방법으로 이해하는가를 충분히 조사할 필요가 있을 것이다. 본 연구에서 분석한 소수 나눗셈의 형식화 부분은 초등학교와 중학교 수학을 연결하는 중요한 연결고리가 될 것이다.

## 참고문헌


박영배(1996). **수학 교수·학습의 구성주의적 전개에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사 학위논문.

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teacher's understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132-144.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L. & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems: elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434-449.

Bettencourt, A. (1989). What is constructivism and why are they all talking about it? (Reproduction By EDRS, ED 325402).

Brown, M. (1981). Number operations. In K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 23-47). London: John Murray.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1996). An empirical test of the impact of primitive intuitive models of operations on solving word problems with a multiplicative structure. *Learning and Instruction, 6*(3), 219-242.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3-17.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 37-45.

Greer, B. (1988). Nonconservation of multiplication and division: analysis of a symptom. *Journal of Mathematical Behavior, 7,* 281-298.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: further considerations. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 363-384). Albany: State University of New York Press.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* Basic Books.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Okazaki, M., & Koyama, M. (2005). Characteristics of 5th graders' logical development through learning division with decimals. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 217-251.

Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structure: the central problem of intellectual development.* The University of Chicago Press.

Tirosh, D., & Graeber, A. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 98-108.

Underhill, R. G. (1991). Two layers of constructivist curricular interaction. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 229-248). Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concept and operations in the middle grade* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

# 5th Graders' Logical Development through Learning Division with Decimals

Lee, Jong Euk (Gaepo Elementary School)

In this paper it is discussed how children develop their logical reasoning beyond difficulties in the process of making sense of division with decimals in the classroom setting. When we consider the gap between mathematics at elementary and secondary levels, and given the logical nature of mathematics at the latter levels, it can be seen as important that the aspects of children's logical development in the upper grades in elementary school should be clarified. This study focuses on the teaching and learning of division with decimals in a 5th grade classroom, because it is well known to be difficult for children to understand the meaning of division with decimals. It is suggested that children begin to conceive division as the relationship between the equivalent expressions at the hypothetical-deductive level detached from the concrete one, and that children's explanation based on a reversibility of reciprocity are effective in overcoming the difficulties related to division with decimals. It enables children to conceive multiplication and division as a system of operations.

* key words : division with decimals(소수 나눗셈), cognitive conflict(인지갈등), reversibility (가역성)

논문접수 : 2007. 1. 20
심사완료 : 2007. 3. 6