대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.1, 65-97. Mar. 2007

수학적 모델링의 이해
- 국내 연구 결과 분석을 중심으로 -

황 혜 정*

본 연구에서는 수학적 모델링에 관한 주제로 국내 학회지에 실린 총 11편의 선행 연구 및 22편의 석사학위논문을 대상으로 그 밖의 국내외 문헌을 참조하여 수학적 모델링에 관한 이해를 도모하고자 하였다. 우선, 수학적 모델링의 의미와 과정을 살펴보고, 수학적 모델링과 문제해결의 관계를 살펴보았는데, 그 결과 수학적 모델링의 중요성을 부각시키기 위한 노력 내지 의도 하에 문제해결의 진정한 의미가 다소 축소되고 간과되는 경향이 있음을 알 수 있었다. 이어서 수학적 모델링의 주요 특징을 탐색해 보고, 수학적 모델링 문제와 문제해결에서 정의되는 문제의 관계를 살펴보았는데, 이는 문제해결에서의 수학 외적 소재를 수반하는 문제의 의미 내지 범주가 보다 분명히 밝혀질 때 두 문제 사이의 범주 및 관계도 정립될 수 있을 것으로 나타났다. 결과적으로, 본 연구에서는 문제해결 문제와의 비교를 떠나 수학적 모델링 문제 자체가 지니고 있는 특징을 간추려 제시하였다. 끝으로, 수학적 모델링 과정의 전반적인 이해를 돕기 위하여 폴리아의 문제해결 과정과 연계지어 간략히 제시하였다.

Ⅰ. 들어가는 말

국내외 수학 교육계에서 문제해결과 함께 수학적 모델링에 관한 중요성도 점점 강조되며 회자되고 있는 듯하다. 국외의 경우 여러 학자들에 의해 수학적 모델링에 관한 연구가 꾸준히 수행되어 왔으며(Powell, 1981 ; Dilwyn 외, 1989 ; NCTM, 1991 ; Meerschaert, 1999; Gravemeijer, 2002 ; Lieven 외, 2002 ; Cramer 외, 2003 등), 국내에서도 1990년대 초반부터 수학적 모델링에 관한 문헌 및 실험 연구가 본격적으로 진행되어 왔는데, 2000년 이 후로는 몇몇 연구자들의 집중적인 관심 하에 시행되었다. 수학적 모델링 관련의 이론 연구로 주미경(1991), 권성룡과 조완영(1998), 신은주와 권오남(2001)의 연구가 있으며, 개발 및 실험 연구로는 홍정희와 송순희(1995), 권기석과 박배훈(1997)의 연구가 있다. 이 외에는 사례를 중심으로 실험 연구를 수행한 신은주와 이종희(2004a, 2004b, 2004c, 2005)의 연구, 김선희와 김기연(2004), 그리고 김선희(2005)의 연구가 있다. 물론, 2003년 1월 한국교원대학교 수학교육연구소에서 '모델링을 이용한 수학교육 방안 탐색'이라는 주제로 세미나가 개최된 바 있으나, 학회지에 수록된 수학적 모델링에 관한 연구는 위에서 언급된 바와 같이 총 11편에 이른다 하겠다.[1)]

* 조선대학교(sh0502@chosun.ac.kr)

이러한 연구들에서는 주로 수학적 모델링을 중심으로 여러 가지 측면의 다양한 관점에서 그 의미나 중요성을 조명하고 있으며, 일부 실험 연구를 통해 수학적 모델링 과정을 통하여 주어진 문제 상황을 학습자가 어떻게 해결해 나아가는 지 면밀히 살펴보고 그 결과를 나타내는 데에 초점을 두고 있다. 여기서, 연구자들이 제안하고 있는 수학적 모델링 과정과 그 의미는 근본적으로 동일하며 단지 관련 용어나 과정 단계의 구체화 정도가 다른 편이다. 허나, 수학적 모델링의 의미, 중요성, 장점 등이 문제해결과 연계지어 논의되곤 하였는데, 연구자마다 (경우에 따라서는 동일한 연구자도) 두 활동 사이의 관계에 대해 제안하는 바가 다른 경향이 있다.

또, 어떠한 문제가 수학적 모델링을 위한 문제로 적합한 지 제대로 이해하기가 쉽지 않다. 즉, 대부분의 논문에는 실험 연구 진행을 위하여 한 두 개 정도의 모델링 문제가 개발 또는 재구성되어 제시되고 있으나, 수학적 모델링 문제는 어떠해야 하는지에 대해서는 명확히 언급되어 있지 않다. 이는 학회지에 수록된 수학적 모델링 문제가 적합하지 않음을 뜻하는 것이 결코 아니며, 학회지에 수록된 몇몇 문제를 살펴보면 수학적 모델링 문제가 어떠해야 하는지를 '직관적으로' 이해하는 데에 별 어려움이 없다. 그럼에도 불구하고, 수학적 모델링을 주제로 한 석사 학위 논문들을 20여 편 살펴본 결과,[2] 석사 논문에 실린 수학적 모델링 문제들 중 상당수의 것이 학회지에 실린 것과 사뭇 다르다. 즉, 석사 논문에서도 실생활 관련의 문제 상황을 다루고는 있으나, 실생활의 의미와 범위가 학회지의 것과 다르며, 이로 인하여 본래 문제에서부터 수학적 문제로 환원되는 과정, 특히 수학적 모델이 상이한 것으로 보아 이에 대한 이해가 다른 것으로 보인다.

수학 교육 관련의 일반 독자들을 차제하고라도, 예측컨대 많은 대학원생들이 앞으로도 수학적 모델링을 주제로 개발 및 실험 연구를 실시하여 논문을 작성할 것이며, 이들은 장차 수학 교사가 되기를 희망하는 예비 교사이다. 결국, 그들이 연구와 논문 작성을 수행하면서 얻게 되는 수학적 모델링 개념과 의미는 향후 그들이 학교 현장에 나아가서 수학 수업을 할 때에도 영향을 미칠 수 있으리라 생각한다. 실제로, 권기석과 박배훈(1997)의 연구에서 수학적 모델링 문제와 실생활과의 관련성 여부에 관한 고등학교 수학 교사들의 인식 조사 결과, 130명(83%)의 교사가 수학적 모델링 문제는 실생활과 관련된 것이라고 답하였으나 그렇지 않다고 답한 교사도 26명(17%)에 달하였음은 수학적 모델링 문제에 관해 교사들의 이해가 부족함을 나타낸 것이라 할 수 있겠다. 물론, 이 연구가 수행된 지 10년 가까이 되어 현재의 상황을 대변할 수는 없겠으나, 전체적인 정황으로 미루어 볼 때 이즈음에 수학적 모델링

---

1) 국내 수학교육 관련 학회지로 한국학술진흥재단에 정식 등재된 논문은 한국수학교육학회의 '수학교육', 대한수학교육학회의 '수학교육학연구'와 '학교수학'이다. 그리하여, 본 연구에서는 이 세 종류의 논문을 모두 반영하여, 여기에 수록된 수학적 모델링에 관한 논문 모두를 참고하였음. 단, 본문에서 다루고 있는 11편의 논문 이외에도 정은실(1991)의 '응용과 모델 구성을 중시하는 수학과 교육과정 개발 방안 탐색' 연구가 있는데 이는 교육과정 개발 방안을 모색하는 데에 초점을 두고 있으며, 또 이종희와 김부미(2004)의 '일차함수 활용 문제의 해결을 위한 강의식, 모델링, 과제기반 표현변환 학습의 교수학적 효과 분석' 연구에서도 모델링에 관한 부분이 다뤄졌으나, 여기서는 학생들의 표현 변환 학습을 여러 관점(방식)에서 다루고 그 효과를 비교하는 데에 중점을 두고 있어 이 두 편의 논문은 배제하였음.

2) 본 연구에서는 학회지에 실린 11편의 논문과 더불어 수학적 모델링을 주제로 한 석사 학위 논문 22편을 참고하였음. 2006년 1월 현재 수학적 모델링에 관한 주제로 작성된 석사 학위 논문은 28편이 있는 것으로 조사되었으나, 여기서는 인터넷을 통해 논문 자료를 얻을 수 있었던 22편으로 한정하였음.

에 관한 전반적인 사항을 검토해 보는 것은 의미 있는 일이라 하겠다. 이에 따라, 본 연구에서는 수학적 모델링에 관한 주제로 국내 학회지에 실린 총 11편의 선행 연구 결과를 중심으로, 수학적 모델링의 과정, 수학적 모델링과 문제해결과의 관련성, 수학적 모델링 문제의 특성 등에 대하여 선행 연구 결과들을 탐색하고 분석하여 수학적 모델링에 관하여 재정리해 보고자한다. 다만, 이러한 선행 연구 결과물들을 비교 분석하는 과정에서 수학적 모델링에 관한 22편의 석사학위논문 결과도 부가적으로 참조하였으며, 또한 선행 연구자들 간에 다소 다른 견해나 강조점들에 관한 의견을 종합하여 정리하는 과정에서 수학적 모델링과 관련된 다른 국내외 문헌들을 참조하였다.[3)]

II. 수학적 모델링 과정

1. 수학적 모델링의 의미

수학적 모델링 과정에 대해 살펴보기에 앞서, 수학적 모델링의 의미를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 본고에서 다룬 첫 번째(최초) 논문인 주미경(1991)의 것에는 학교 수학에로의 모델링 도입의 필요성이 강조되며, "…모델링이란 단지 존재하는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것이라기보다는 현상의 일부분의 조작가능한 상을 찾는 것이라고 할 수 있다. 그러므로 수학적 모델링 역시 문제해결자의 지식, 의도, 그리고 흥미에 근거하여 현상의 단편을 구조화하고 창조하는 것이다."(p. 55)라고 서술되어 있다. 또, 권기석과 박배훈(1997)은 김수미(1993)의 석사 학위 논문에서 재인용하여 "수학적 모델링이란 실 상황의 모델을 구성하여 실 상황 문제를 해결하는 전체 과정이다. 그것은 단지 존재하는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것이라기보다는 현상 일부분의 조작 가능한 상을 찾는 것이다."(p.150)라고 하였는데, 참고로 이 정의는 22편의 석사 학위 논문 중 11편에 이를 만큼 가장 많이 재인용된 정의이기도 하다. 주미경(1991), 김수미(1993), 권기석과 박배훈(1997) 모두 수학적 모델링에 대하여 문제의 출발점을 '현상'에 두고 그 현상의 단편을 탐색해 내는 것으로 그 의미를 부여하였으며, 조완영과 권성룡(1998)은 실제수학과 이론수학을 연결하는 여러 과정 중의 하나가 수학적 모델링이라고 하였다. 한편, 신은주와 권오남(2001)은 수학적 모델링을 수학화와 동일시한 프로이덴탈의 관점을 수용하여, "수학화는 인간의 창조적 활동의 하나로서 간주할 수 있는 것으로 실제적인 상황에서 직관 모델을 만들고, 직관 모델의 탐구에서 수학적 모델을 만들어 내고, 추상화와 형식화를 통해서 수학적 해를 구하고, 구해진 해를 원래 상황에서 반성해보는 피드백 과정을 거치는 수학적 모델링 학습을 의미한다."(157쪽)고 하였다.

이후 진행된 연구에서는 수학적 모델링을 한

3) 결과적으로, 본 연구에서는 연구자 본인들의 논문에서 드러난 모델링과 관련된 내용을 중시하고 이에 초점을 두어 본 연구를 진행한 것이며, 이를 위하여, 모델링과 관련하여, 우선 모델링 자체의 의미를 살펴보고 모델링 과정이 무엇인지, 또 문제해결과 비교하면서 모델링 활동의 의미와 강조점은 무엇인지, 그 다음에 구체적으로 수학적 모델링 문제의 특징은 어떠한지, 또 이러한 문제의 특징을 살펴보는데 있어서 모델이라는 문제 해결의 수단은 무엇인지를 살펴보는 것이 모델링에 관련된 내용을 전체적으로 살펴보는 것이라 판단하였다. 이에 따라, 본 연구에서는 이들 요소를 각각 구분하여 각 요소별로 여러 논문들에서 제시한 내용을 최대한 반영하여 제시하면서 비교될 수 있도록 하고, 경우에 따라서는 의도적으로 비교하여 제시하였음.

마디로 정의하기보다는 수학적 모델링 과정을 단계별로 설명하면서 대신하고 있는데, 신은주와 이종희(2004a, 2004b)는 수학적 모델링 과정이 형성되고 촉구되는 상황에 초점을 두고, 그들의 다른 두 연구(2004c, 2005년)는 모델에 초점을 두어 모델 개발 과정에서의 활동 상황과 구체와 추상을 연결하는 모델의 역할에 각각 초점을 두고 있다. 그들은 모델링 과정을 크게 '실세계 탐구' 단계, '상황 모델 개발' 단계, '수학 모델 개발' 단계, '모델 적용' 단계로 구분하고, 이를 상황을 구조화하면서 비형식적인 상황모델을 개발한 후에, 모델에 대해 사고하고 추론하는 활동을 조직하면서 이 모델을 수학 모델로 발달시키고, 모델을 해석하고 수정하고 정교화 하는 사이클을 거치면서 일반화 가능하고 재사용 가능한 체계를 개발하는 과정으로 설명하고 있다. 또, 김선희와 김기연(2004)도 수학적 모델링을 실세계 상황을 수학적인 용어로 묘사하고 예측하고 이에 대한 이해를 얻는 과정으로 정의하고 있으며, 김선희(2005)는 수학적 모델링 과정을 '모델 탐색', '모델 도출', '모델 적용'의 세 단계로 구분하여 설명하였다.

지금까지 살펴본 바와 같이, 수학적 모델링이라는 용어 자체에 관한 형식적이고 엄밀한 정의는 대부분의 논문에서 드러내어 강조하고 있지 않으며, 오히려 모델 개발을 수반하는 모델링 과정을 통해 수학적 모델링이 무엇인지를 설명하고 있는 것으로 나타났다. 참고로, NCTM(1991)에 따르면, 수학적 모델은 현상의 특징을 가늠케 하는 수학적 구조이며, 이러한 모델을 고안해 내는 과정이 바로 수학적 모델링이다.

2. 수학적 모델링 과정

학회지 논문에 제시된 수학적 모델링 과정의 경우, 대체적으로 <표 Ⅱ-1>에서와 같이 근본적으로 상이하지는 않으며, 다만 그 과정이 좀 더 세분화 되어 있거나 동일한 의미의 용어를 달리 사용하고 있는 것으로 나타났다. 다음 <표 Ⅱ-1>에서도 알 수 있는 바와 같이, 신은주가 다른 연구자들과 공동으로 수학적 모델링에 관해 수행한 연구는 총 5건에 이르는데, 이 중 2001년 이후의 모든 연구에서 수학적 모델링 과정을 '실세계 탐구 → 상황 모델 개발 → 수학 모델 개발 → 모델 적용'의 네 단계로 나누어 정의하고 있다. 이를 좀 더 구체적으로 나타내면, 첫째, 경험을 기반으로 하여 실세계 맥락을 탐구하는 과정, 둘째, 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황 모델을 개발하는 과정, 셋째, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학 모델을 개발하는 과정, 넷째, 수학 모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석, 수정, 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정이다. 김선희(다른 연구자와 공동 및 단독으로)는 수학적 모델링 주제로 두 건의 연구를 수행한 바 있는데, 2004년 연구에서는 '단순화 단계 → 추상화 단계 → 수학적 결론 도출 → 수학적 결론 해석 및 가치 판단'으로, 그 다음해인 2005년 연구에서는 '모델 도출 → 모델 탐색 → 모델 적용'과 같은 수학적 모델의 발달 절차로 수학적 모델링 과정을 각각 다르게 제시하고 있다. 이처럼, 두 연구를 통해 수학적 모델링 과정이 각각 다르게 표현되었는데, 이는 두 연구의 목적 및 쟁점 사항이 다름에서 연유된 것으로 보아진다.[4]

4) 허나, 동일한 연구자에 의해 진행된 연구인만큼 두 연구를 통해 수학적 모델링 과정이 다르게 표현된 이유 또는 관점의 변화 등을 밝힘으로서 독자들로 하여금 명쾌한 이해와 판단을 가질 수 있도록 함이 좋을 듯함.

또, <표 Ⅱ-1>를 보면, 수학적 모델 개발 내지 형성의 다음 단계로 모델 내에서의 해를 구하는 단계를 생각해 볼 수 있는데, 이는 연구자에 따라 '수학적 추론', '수학적 문제해결', 또는 '수학적 결론 도출' 단계로 표현되고 있으며, 이 단계를 별도로 두지 않은 경우에는 보다 넓은 범주로써 모델 적용의 단계를 두고 있다.

참고로, 22편의 석사 논문에 제시된 수학적 모델링 과정을 살펴보면, 김수미(1993)는 '문제 이해 단계 → 문제 이상화 단계 → 수학적 모델 형성 단계 → 수학적 추론 단계 → 재해석 단계 → 실제와의 비교의 여섯 단계로 두었고, 이어서 권기석(1997)은 '문제 상황 묘사 → 문제 이상화 및 자료 수집 → 수학적 모델 형성→ 수학적 추론 → 재해석'의 다섯 단계로 두었다. 여기서, 후자의 논문이 전자의 것과 다른 부분은 '문제 이해'가 '문제 상황 묘사' 단계로, '문제 이상화'가 '문제 이상화 및 자료 수집 단계'로 바뀌고, 마지막 단계인 '실제와의 비교'가 배제된 것이다. 또, 백은정(2000)이 문제 이상화 단계를 실세계 모델 형성으로 둔 이후, 몇몇 논문(김희정, 2000; 장종근, 2004; 오은주, 2005)에서 이를 따르고 있는 것으로 나타났다. 한마디로, 상당수의 석사 논문들은 김수미(1993)의 것과 거의 동일하고 그의 문헌을 참고한 것으로 밝히고 있다.[5)]

본 연구에서 수학적 모델링 과정에 대하여 학회지 이외의 몇몇 문헌을 추가로 살펴본 결과는 다음과 같다. 류희찬(2003)은 수학적 모델

<표 Ⅱ-1> 연구자별 수학적 모델링 과정

주미경 (1991)	홍정희 송순희 (1995)	권기석 박배훈 (1997)	조완영 권성룡 (1998)	신은주 권오남 (2001)	신은주 이종희 (2004a)	김선희 김기연 (2004)	신은주 이종희 (2004b)	신은주 이종희 (2004c)	신은주 이종희 (2005)	김선희 (2005)
문제 이상화 단계	문제이해 단계	문제상황 묘사	실제 문제 구체화 하기	구체화 단계	실세계 탐구단계	단순화 단계	실세계 탐구단계	실세계 탐구단계	실세계 탐구단계	모델 도출
	문제 이상화 단계	문제 이상화 및 자료수집		개념모델 형성단계	상황모델 개발단계	(현실모델 구성)	상황모델 개발단계	상황모델 개발단계	상황모델 개발단계	
번역단계	수학적 모델 형성단계	수학적 모델 형성단계	수학적 모델 형성단계	수학적 모델 형성단계	수학적 모델 개발단계	추상화 단계 (수학모델 구성)	수학적 모델 개발단계	수학적 모델 개발단계	수학적 모델 개발단계	모델 탐색
수학적 추론	수학적 추론 단계	수학적 추론	수학적 문제해결 단계	수학 문제해결 단계	모델적용 단계	수학적 결론 도출	모델적용 단계	모델적용 단계	일반화 가능한 모델 개발 과정	모델 적용
해석	재해석 단계	재해석	해답 해석하기	반성 단계		수학적결론 해석 및 가치 판단				
	실제와 비교단계		실제와 비교및 결과 전달하기							

5) 본고에서, 김수미(1993)가 제안한 수학적 모델링 과정의 적합성 여부를 가늠하고자 하는 것이 아니라, 석사 논문 작성자들이 대체적으로 유사 주제를 다룬 기존의 석사 논문 결과에 거의 의존하여 어떠한 분석적, 비판적 입장도 취하지 않은 채 그대로 수용해 버리는 경향이 높음을 지적하고자 하는 것임.

링 과정을 1) 실세계 자료(상황)을 모델로 나타내는 모델 형성 단계, 2) 모델을 분석하고 결론에 이르는 단계, 3) 모델을 통해 수학적 결론에 이른 결과를 해석하고 예측하고 설명하는 단계, 4) 결론이 주어진 실세계 상황에 맞는지 여부를 검증해 보는 단계로 구분하여 설명한 바 있다. 또, NCTM(1989)의 '*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*'에서는 수학적 모델링 과정을 1) 실세계 문제 상황을 단순화하여 문제를 구성하고, 2) 이 문제를 예, 방정식, 그래프 등을 이용하여 수학화 함으로서 수학적 모델을 구축하고, 3) 수학적 모델을 이용하여 모델 내에서의 해를 구하며, 4) 이러한 해를 단순화시킨 수학 문제에 부합하도록 해석함으로서 실세계 문제 상황에 타당하도록 한다로 두고 있다. 또, NCTM(1991)의 '*Mathematical Modelling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 1) 현상을 관찰하여 그 현상 속에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고 문제에 영향을 미치는 중요한 요인들을 찾고, 2) 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축하고, 3) 적절한 수학적 분석을 그 모델에 적용하며, 4) 결과를 얻고 현상에 맞도록 그 결과를 재해석하여 결론을 도출한다고 하고 있다.

이상으로, 학회지와 석사 논문, 그리고 다른 몇몇 문헌을 살펴본 바에 따르면 수학적 모델링 과정은 [그림 IV-1]의 왼쪽 부분과 같이 나타낼 수 있으며, 이는 Lesh 외(2003)가 모델 개발의 단계를 모델 도출, 모델 탐색, 모델 적용의 활동으로 구분하여 제안한 것에 기초를 둔 것이다. 김선희(2005) 또한 그의 연구에서 시행착오를 거친 반복적 상호 작용에 따른 모델 형성을 강조하며, Lesh(2003)의 견해를 따르고 있다. 이 도식화에 따라 수학적 모델링 과정을 설명하면 다음과 같이 정리해 볼 수 있다: 1) 실세계 현상에 대한 이해 및 탐구 과정을 통해 우선 현상을 단순화하여 수학적 문제 상황으로 환원하며, 2) 이러한 문제 상황에 적합한 모델을 도출하여 형식화/추상화하고, 3) 이를 이용하여 변형시킨(단순화된) 문제를 해결하여 수학적 결과를 얻으며, 4) 이를 토대로 통찰, 재해석, 반성 등을 통해 본래의 현상에 부합하는 타당한 수학적 결론에 이르게 된다. 이와 더불어 더 나아가 이러한 모델링 과정을 다른 유사한 현상에도 적용시켜 보는 활동 절차를 말한다.

III. 수학적 모델링과 문제해결

1. 수학적 모델링과 문제해결의 관계

수학적 모델링 과정과 더불어, 몇몇 연구자들은 수학적 모델링과 문제해결의 차이를 다소 강조하여 다루고 있다. 신은주와 이종희(2004b)의 경우, 문제해결은 '문제에 제시된' 기호적으로 서술된 상황의 의미를 이해하여 문제의 해를 구하게 되는 반면, 모델링 과정에서는 '유의미한 상황에서' 기호적인 서술을 하게 되므로, 강조되는 능력과 이해가 다르다고 하였다. 또, 문제해결은 주어진 과제에서 목표를 성취하기 위해 '적절한 전략'을 찾아서 하나의 '고정된 해석'과 절차를 사용하여 '하나의 단정적인 답'에 이르게 되는 것이 일반적인데 반해, 수학적 모델링은 단정적인 답이 아니라 상황을 이해하기 위한 모델을 만드는 것이 필요하게 되므로 다양한 모델을 만들고 수정하면서 조작하게 되고 자신이 조건과 목표에 대해 해석하고 조직해 나가는 시행착오 과정을 거치게 된다고 하였다. 또, 김선희와 김기연(2004)도 수학적 모델링과 문제해결의 차이점을 논의하면서 다음과

같이 진술하고 있다, "전통적인 관점에서 문제해결은 주어진 조건으로부터 강력한 수단이 되는 해결전략을 가지고 목표에 도달하는 과정으로, 인위적이고 비실제적인 방법으로 제한된 사실과 규칙을 사용하여 질문에 답하는 것이지만, 모델링 관점에서 문제해결은 조건, 목표, 가능한 해의 경로, 사물에 내재된 패턴과 규칙을 해석하는 유용한 방법을 발전시키는 것과 관련되며, 해를 구하기 위해 서술, 설명, 예측이 점차 세련화 되고 정교해지는 여러 과정이 포함된다." (284쪽)

여기서, 신은주와 이종희(2004b)의 말대로, 지금껏 문제해결은 다소 고정된 해석과 절차, 하나의 답에 이르는 경향이 높아왔음을 부인할 수 없다. 허나, 국외는 물론, 국내의 제7차 교육과정 기에서도 학습자 중심의 탐구 지향 문제 또는 열린 반응 문제의 중요성이 점차 강조되면서 문제해결 활동에서도 그러한 문제들이 가능한 한 풍부히 다뤄지기를 기대하고 있다 (교육부, 1997). 특히, Simada(1997)는 답이 하나로 고정되어 있지 않은 열린 반응 문제가 닫힌 반응 문제보다 더 고차원적인 사고력을 형성하고 평가하는 데에 좋은 수단이 됨을 강조하며, 그 이유는 열린 반응 문제를 해결하는 데에는 그 해결에 이르게 하는 과정, 길, 수단, 방법 등이 다양하기 때문이라고 하였다. 또, 그는 기존 수학 이론의 이해, 수학적 문제 해결, 새로운 이론 구성, 또는 수학을 이용하여 비수학적 상황의 문제 해결과 같은 수학적 활동에는 다양한 사고 과정이 요구된다고 하며 이를 도식화하여 제시하였다. 여기서 그는 '실제의 세계'와 '수학의 세계'를 두 개의 축으로 하여 출발점으로 삼고 다음 단계에는 '문제', '수학적 모델', '수학 이론'을 두어 점차 순서도 방식으로 확장해 나아가고 있다. 이 순서도에 따르면, Simada(1997)도 언급하듯이 수학적 문제보다는 비수학적 문제를 해결하는 것이 더 많은 사고 과정을 요구하며, 특히 이러한 상황은 또 하나의 새로운 수학적 이론을 탄생시킬 가능성이 높은 것으로 나타내고 있다.

또한, 김선희와 김기연(2004)는 수학적 모델링은 현상 내지 실세계 상황에서 문제를 도출하고 그 문제를 수학적으로 해결하여 다시 현 상황으로 해석하는 과정을 거치게 하여 학생들로 하여금 수학적 모델링을 통해 수학이 실생활에 응용됨을 알 수 있고 현실 상황을 수학적 모델로 바꾼 후 수학 문제를 해결한다는 점에서 문제 해결력이 향상될 수 있다고 하였다. 또, 김선희(2005)는 그의 연구에서 "수학적 모델링은 문제 중심 학습의 장점을 수용하면서 수학 교육에서 강조해야 하는 개념, 원리 등에 대해서도 학습 지도에서 함께 다룰 수 있기 때문에, 문제해결을 통한 학습 지도로 적용하기에 알맞다."(p. 316)고 하며, 수학적 모델링을 수학 교과의 문제 중심 학습으로서 새로운 문제해결 지도로 제안하고 있다.[6] 김선희와 김기연(2004)의 경우, 수학적 모델링과 문제해결의 차별화를 나타냄과 동시에 한편으로는 수학적 모델링을 문제해결에 귀속시키는 것으로도 보인다.[7] 주미경(1991)도 모델링이란 단지 존재하

6) 그런데, 여기서 (본인이 충분히 숙지하지 못하여 올바르게 이해하지 못한 것인지도 모르겠으나) 이 연구보다 한 해 전에 수행된 연구에서는 수학적 모델링의 특징을 서술하면서 수학적 모델링은 문제 중심 학습의 교육 프로그램과는 차별화되는 것으로 언급함으로서 다소 상반되는 연구 내용을 제시하고 있는 듯함.

7) 필자의 얕은 소견으로는 본고에서 다룬 학회지 논문들을 읽으면서 '문제해결'의 의미가 두 가지로 혼용되고 있다는 생각이 들었다. 즉, 하나는 폴리아(1957)의 교육적 경험과 이론에 의해 주창된 문제해결(problem-solving), 다른 하나는 일상적인 의미로 수학 문제를 해결한다는 뜻을 지닌 문제해결(to solve problems)을 뜻하는 것으로 판단됨.

는 현상 전체의 단순화된 상을 찾는 것이라기보다는 현상의 일부분의 조작 가능한 상을 찾는 것이라고 하며, 수학적 모델링 역시 문제해결의 관점에서 재조명하여 문제 해결자의 지식, 의도, 그리고 흥미에 근거하여 현상의 단편을 구조화하고 창조하는 것이라고 하였다.

장혜원(2003)은 한국교원대학교에서 개최된 세미나에서 수학적 모델은 어떤 현상의 특성들에 근접하는 수학적 구조이며, 그것을 고안하는 과정이 수학적 모델링이고, 수학적 모델링에 이용되는 기본적인 수학적 구조로는 그래프, 식, 화살표, 표, 알고리즘 등을 대표적인 예로 들고 있다. 그런데, 이처럼 어떤 현상을 설명하는 수학적 구조를 고안하는 과정으로서의 수학적 모델링은 일종의 문제해결로 해석될 수 있다고 하였다. 또, 그는 모델링 과정의 주요 단계는 다음과 같이 문제해결 단계에 대응하며, 이 외에도 모델링 과정이 해석, 분석, 종합과 같은 고차적인 인지 활동을 이용하는 체계적인 과정이라는 점을 고려해 볼 때 문제 해결 활동과의 유사성을 뒷받침한다고 하였다.

첫째, 현상에 내재한 문제 상황의 규명 및 문제에 영향 미치는 중요한 요인들 구별하기
둘째, 현상에 대한 모델을 얻기 위해 그 관계들을 수학적으로 해석하기
셋째, 모델에 적절한 수학적 분석 적용하기
넷째, 결과를 얻고 연구 중인 현상의 맥락에서 그것을 재해석하며 결론 유도하기

다만, 장혜원(2003)은 수학적 모델링은 반드시 그 출발을 실세계의 일상적인 현상과 같이 문맥상 수학적이지 않은 듯해 보이는 현상에서 시작한다는 특성을 지녀야 하며, "기존의 문제 해결 방식과 약간 구별되는 접근 방식에 의해 수학적 모델링이 지도될 수 있는 문제 상황들을 찾아서 학교 수학에 첨가하는 노력을 기울여야 할 것"이라고 하였다(42쪽). 여기서 '기존의 문제 해결 방식과 약간 구별되는 접근 방식'의 표현은 수학적 모델링과 문제해결의 차이가 크거나 범주가 상이하지 않음을 암묵적으로 시사하고 있다. 즉, 정형화된 전통적인 풀이 방식이 가능한 문제에서 벗어나 실생활 문제 상황이 강조되어 이의 해결 과정이 알고리즘화되지 않은 모델을 얻을 수 있도록 해야 함을 뜻하는 것으로 보인다.

한편, 학회지와 석사 논문에서 강조하거나 제안하고 있는 수학적 모델링의 기대 효과를 살펴보고, 이를 통하여 수학적 모델링과 문제해결의 관계를 좀 더 논의해 보고자 한다. 다음 <표 Ⅲ-1>에서 보면, 수학적 모델링의 기대 효과로 가장 많이 언급된 사항은 실생활 문제 상황 탐구를 통한 수학적 문제해결력 향상과 학교 수학과 실생활의 연계를 통한 유용성 인식을 들 수 있다. 이처럼, 여러 연구 결과의 기대 효과 측면에서도 알 수 있는 바와 같이, 수학적 모델링을 통하여 학습자들이 취할 수 있는 가장 큰 특징이자 장점 중의 하나는 수학적 문제해결력 향상에 있다고 볼 수 있다. 이러한 맥락에서 본다면, 수학적 모델링은 중요한 문제해결로 간주될 수 있으며, 또한 수학적 모델링의 왕성한, 풍부한 활동 결과는 문제해결력 향상을 신장시키는 결과를 가져올 것으로 예측하여도 별 무리가 없어 보인다.

그런데, 여기서 특이할만한 사항은 학회지에 논문을 실은 연구자와 석사 논문 작성자 사이에 수학적 모델링을 통해 기대하는 그 효과의 측면이 다르다는 것이다.[8] 연구자에 비해, 석사 작성자들은 전반적으로 수학적 모델링을 통한

8) 석사 논문 작성자들에 의해 제안된 기대 효과에 관한 내용은 부록 2의 표에 제시되어 있음.

수학 학습과 관련된 기대 효과에 대해 보다 크고 긍정적인 입장을 취하고 있으며, 특히 학생들의 수학에 대한 흥미와 긍정적인 태도 형성에 관한 효과, 그리고 수학의 심미성과 유용성 인식에 관한 기대가 큰 것으로 나타났다. 그런데, 여기서 짚고 넘어갈 것은 '기대 효과'라는 용어 자체는 간혹 연구 수행을 통해 해당 효과를 실제로 검증하는 경우도 있으나, 대체적으로 말 그대로 무언가를 예측하고 기대해 보고 관망해 보는 것이다. 따라서, 기대 효과에 대해서는 해당 연구 결과에 그 책임이 엄격히 물어지거나 마땅히 그래야 하는 것은 아니다. 결국, 연구자의 성향에 따라 또는 연구 주제에 따라 긍정적이며 낙관적인 기대 효과를 가져볼 수도 있겠으나, 어떤 특정 연구 주제의 중요성이나 필요성을 돋보이게 하기 위하여 지극히 연구자 개인의 성향이나 호불호 등에 따라서 나열되는 방식은 그리 바람직한 태도라 할 수 없으므로, 가급적 실험 연구를 통해 사실 여부를 밝히거나 유사한 선행 연구의 결과 또는 역량 있는 학자의 조심스러운 진술 등을 근원으로 삼을 필요가 있겠다.

어찌되었든 간에, 이상으로 살펴본 학회지에 실린 연구자별 기대 효과 관점에서 볼 때, 수

<표 Ⅲ-1> 수학적 모델링의 효과[9)]

기대 효과	주미경 (1991)	홍정희 송순희 (1995)	권기석 박배훈 (1997)	조완영 권성룡 (1998)	신은주 권오남 (2001)	신은주 이종희 (2004a)	김선희 김기연 (2004)	신은주 이종희 (2004b)	신은주 이종희 (2004c)	신은주 이종희 (2005)	김선희 (2005)
수학의 개념과 원리 이해						✓	✓		✓		
구체 경험과 추상 형식 연결하여 학습 가능					✓	✓			✓	✓	
수학의 재발명과 응용					✓				✓		
학교수학과 실생활의 연계 가능성 및 유용성 인식	✓	✓	✓	✓			✓				
실생활 문제 상황 탐구 및 해결을 통한 수학적 문제해결력 향상		✓	✓	✓			✓			✓	✓
수학 학업 성취 증진	✓										
수학적 사고력 신장	✓				✓		✓				
수학에 대한 흥미와 긍정적 태도 및 가치 형성	✓		✓				✓				

9) 위에 제시된 수학적 모델링의 기대 효과는 학회지 논문의 각 연구자들이 이를 연구 문제로 극명하게 두고 연구를 수행하여 결과를 통해 입증된 것이 아니라 그들 나름대로 여러 문헌을 참조하거나 사례 연구 결과를 바탕으로 제시한 것이며, 또한 '수학적 모델링의 기대 효과'라는 별도의 영역을 두어 강조하여 제시한 것이 아니고 본문 내용 중간 중간에 제시된 것임. 이에 따라, 필자가 연구자들이 본인의 논문 전반에 걸쳐 제시된 기대 효과 내용에 대해 완전히 파악하지 못하여 누락하거나 첨가한 것이 있을 수도 있다. 한편, 홍정희와 송순희(1995)의 연구에서는 수학적 모델링을 통한 학생들의 수학에 관한 긍정적 태도 형성에 관한 측면을 연구 문제로 삼아 실험 연구를 실시하였는데, 그 결과가 통계적으로 유의미하게 나타나지 않아서 본고에서도 반영하지 않았음.

학적 모델링의 중요성을 강조하기 위하여 필요 이상으로 문제해결과 차별화하거나 수학교육에서 양측의 두 활동 자체의 의미나 가치의 우선순위를 논하는 것은 그다지 바람직하지 않은 것으로 보인다. 즉, 수학적 모델링의 의미와 가치를 강조하기 위하여, 기존의 문제해결의 의미와 중요성이 과소평가 되어서는 안 될 것이다. 수학적 모델링의 강조를 위해 문제해결과 차별화하기 보다는 이제는 학교수학에서 다양한 해결 방법을 통한 열린 반응의 문제해결이 점차 강조되고 있음을 인식하며 이를 위한 최상의 대안이 수학적 모델링을 통한 것임을 인식하고, 이를 적극 반영하여 실천할 때가 아닌가 싶다. 이를 위해서는 수학적 모델링에서 의미하고 있는 모델이 무엇인지, 그리고 수학적 모델링 문제의 특징이 무엇인지, 그 특징은 문제해결의 것과 어떻게 다른지를 파악하는 데에 관심을 둘 필요가 있겠다. 이에 대해서는 다음 장에서 본격적으로 다루기로 하고, 이어서는 문제해결의 최상의 의미로 부여될 수 있는 수학적 모델링의 특징을 살펴보기로 한다.

2. 수학적 모델링의 특징

수학적 모델링이 이상적인 문제해결로 간주될 수 있는 몇몇 가지의 주요 특징을 살펴보기로 한다.

첫째로 문제 상황의 적절한 단순화 및 이에 부합하는 수학 모델의 개발을 들 수 있다. 수학적 모델링의 관건은 현상으로부터 적절한 수학 문제로서의 환원을 위해 분석과 해석에 터한 문제 상황의 단순화 과정 및 이에 걸 맞는 수학 모델의 개발이라 하겠다. 또한, 본래 주어진 문제 상황이 수학 밖의 현상이라는 점에서 출발되기 때문에, 모델을 통한 수학적 결과는 심오한 통찰과 재해석을 통해 본래의 문제에 부합하는 해결책이 마련되어야 함은 당연한 귀결이라 하겠다. 즉, 한 마디로 수학적 모델링을 기존의 문제해결과 비교해 볼 때, 두 활동의 차이점은 수학적 모델링에서 보다 근원적인 현상으로부터 착수되어 이는 해결 가능한 적절한 문제 상황으로 단순화되어야 하며, 이 후 수학화 내지 형식화, 또는 수학적 모델이 개발된 후 평상의 문제해결에서보다 더욱 더 신중하고, 깊이 있는 해석, 통찰, 판단력 등의 사고과정이 요구되는 것으로 판단된다. NCTM (1991)에서도 수학적 모델링은 문제해결의 한 유형으로 수학적 모델링이 문제해결과 공통적 특징을 가지고 있지만, 분명한 차이점이 있으며 이는 수학적 모델링 상황에서는 수학적이지 않은 현상이 존재하여 이것이 반드시 모델화되어야 한다는 점을 강조하고 있다.

둘째로 구체와 추상의 연결을 들 수 있다. 신은주와 이종희(2004c)는 "교과서에 제시되고 있는 모델링 활동은 … 이론적이고 추상적인 모델링에 초점을 맞추는 경향이 있다. 학생들이 개발한 모델을 실세계 현상에 비춰 합리적 인지를 반성하며 모델을 수정하고 정교화하기 위해 인지적 활동의 기반이 될 수 있는 지각적인 활동이 경시되어 왔음을 부안할 수 없다." (406쪽)고 하며, 수업 목표에 적절한 도구의 효율적인 활용 방안을 고려해야 한다고 하였다. 이 논문에서는 제7차 교육과정에서도 구체물을 이용한 조작 활동의 강조가 있음을 언급하며 도구를 사용한 조작 활동을 강조하고 있는데, 다만 이러한 도구의 활용을 통해 구체와 추상의 연결이 원활히 일어날 수 있으며 이와 같은 구체와 추상의 연결의 중요성과 의미가 부각될 수 있는 가장 적절한 활동 중의 하나로 수학적 모델링 활용이 강조되어야 할 것이다.

셋째로 시행착오를 통한 수학적 모델링 과

정의 획득을 들 수 있다. 수학적 모델링에서, 모델링을 통해 궁극적으로 알아내고자 하는 본래의 문제 상황, 즉 현상이나 실세계 상황에서 이에 포함되어 있는 조건 내지 변수 등이 무엇인지를 탐색하고 파악하여 특수한(주로, 단순화된) 문제 상황으로 바꾸는 작업이 중요한 것은 이미 언급한 바 있는데, 이는 본래의 문제 상황의 단순화 과정이 가능하고 타당한 것이어야 수학적 모델로 환원될 수 있을 뿐만 아니라 그 모델이 적절한 것이 될 수 있기 때문이다. 이와 같은 현상이나 문제 상황의 적절한 단순화 작업과 더불어 모델링에서 주어진 상황에 맞는 수학적 모델을 형성하는 것이 중요한데, 이러한 모델을 단 번에 찾기란 결코 쉽지 않을 것이다. 그리하여 다음 장 3절에서 다시 논의되겠지만, 이러한 이유로 여러 학자들은 수학적 모델 형성 이전에 사전(prior) 모델을 형성하는 것으로 보고 있으며, 김선희(2005)는 그의 연구에서 n번의 반복적 시행을 통한 수학 모델 형성 과정을 도식화하여 나타내고 있다. 또, 김선희(2005)는 "현재 문제해결의 학습은 문제해결이 수학 교수 학습 대상이 되어 특정한 발견술이나 전략으로 지도되거나, 중요한 수학적 아이디어를 가르쳐 그것을 문제 상황에 적용하게 하는 형태로 지도되는 경우가 많다. 이것은 문제해결을 통하여 학생들이 새로운 지식이나 기능을 획득하고 수학적 사고를 신장시킬 수 있는 학습지도라 할 수 없다."(304쪽)고 하며, 여러 가지 현상을 수학적 고찰하면서 학생들의 생각이 계속 검증되고 수정되며 문제를 해결하는 시행착오의 중요성을 강조하여 제시하였다.

Kohler(2002)도 학생들은 수학적 언어로 표현되고 해석되지 않는 문제를 접할 필요가 있다고 강조하고, 미국의 인구 조사에 관한 모델링 문제를 제시하며 여러 개의 함수 그래프에 관한 모델들을 제시하여 상호 비교하면서 최상의 모델을 마련하는 과정을 보여주고 있다. 또한, 그는 수학적 결과와 결과를 해석하는 데 있어서의 차이점을 학습하는 것은 매우 중요한 경험이며, 이것이 바로 원 자료로부터 수학을 발생시켜가는 값진 경험이라고 하였다. 이처럼, 수학적 모델링에서 단순화나 시행착오와 같은 과정은 매우 중요한 요소로 간주되고 있다. 허나, 문제해결에서도 단순화나 시행착오와 같은 전략이, 수학적 모델링에서만큼 성공적인 활동을 위해 절대적인 것은 아니지만, 주어진 문제에 따라 소극적인 규모로 (즉, 하나의 해결 전략으로) 사용되고 있는 유용한 전략임을 부인할 수는 없다. 또, 수학적 모델링에서 요구되는 과정은 수학적 지식을 활용하여 '적절한' 해결 방법을 찾고, 주어진 문제에 합당한 해를 구하기 위하여 해결자의 통찰, 해석, 반성을 강조한다. 허나, 문제해결에서도 적절한 해결 전략의 선택과 활용, 적절한 수학적 지식의 선택과 활용, 문제해결 과정의 강조, 마지막 '반성' 단계에서 결과와 풀이 과정의 신중한 검토, 다양한 방법의 모색, 우아한 해법의 추구, 다른 문제에로의 일반화 등이 요구되고 있다.

그럼에도 불구하고, 문제해결과 차별화될 수 있는 수학적 모델링으로부터의 값진 시행착오 과정의 결실은 공교육에서는 다뤄지지 않는 어떠한 '새로운' 수학적 지식의 형성도 가능케 하고 있으며, 이는 확실히 기존에 학습자가 습득한 여러 가지 수학적 지식의 경험으로부터 적절한 것을 도출하여 적용하는 문제해결의 '한계'를 뛰어넘는 것일 것이다. 이와 같이 특정의 수학적 내용이나 개념에 대하여 이와 관련된 여러 가지 다양한, 즉 새로운 수학적 내용이나 개념의 형성 및 발달은 그것이 올바르게 인지되고 습득되어질 수만 있다면 매우 유용한 것일 터이다.

Ⅳ. 수학적 모델링 문제

1. 수학적 모델링 문제와 문제해결에서의 문제의 관계

수학적 모델링 문제와 문제해결에서의 문제를 직관적으로 가리는 것은 그다지 어려운 일이 아니겠으나, 수학적 모델링 문제와 문제해결에서의 문제 중 어떠한 문제의 범주가 더 포괄적인지를 명확히 가늠하는 일이란 결코 쉽지 않은 듯하다.[10] 수학적 모델링 과정에서 가장 첫 번째 단계이면서 가장 중요하다고도 볼 수 있는 부분이 '현상 내지 실세계 상황 본래의 것'을 단순화하여 수학적 문제로 환원시키는 과정이다. 이때 논의해 봄직한 것은 과연 현상 내지 실세계 상황이란 무엇인가에 관한 사안이다. 흔히, 현상, 실세계 상황, 실생활 등 수학적이지 않은, 즉 수학적으로 환원되기 이전의 본래의 상태에서 출발하는 것이 수학적 모델링 문제가 지녀야 할 가장 중요한 특징이다. 이러한 특징은 수학적 모델링 문제가 기존의 문제해결에서의 문제와 동일한 것이 아님을 나타내는 말이기도 하다. 그렇다면, '고급스러운' 문제해결로서의 수학적 모델링은 그에 걸 맞는 모델링 문제가 있을 터이다.

NCTM(1991)에서 설명하고 있듯이, 수학적 모델링은 문제해결의 특징을 지니지만 항상 비수학적인 문제 상황에서 출발하여야 하며, 이 점이 바로 문제해결과는 다른 것이라고 하고 있다. 문제해결에서의 문제는 수학 외적 소재를 수반하는 문제와 수학 내적 소재를 수반하는 문제로 크게 구분할 수 있는데,[11] 그렇다면, 문제해결에서 수학 외적 소재를 일컫는 '일상생활과 밀접한 관련이 있는 소재'의 의미를 생각해 보자. 이의 해석 여하에 따라 수학적 모델링 문제가 문제해결에서의 문제보다 진정으로 가치 있는 것으로 간주될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다. 바꾸어 말하면, 수학 외적 문제해결에서의 수학 외적 상황을 어느 정도까지 확대 해석하느냐에 따라 수학적 모델링 문제는 수학 외적 문제해결에 포함될 수도 있고 그렇지 않을 수도 있다는 뜻이다. 용정택(2001)은 '수학적 모델링을 통한 수학 외적 문제 해결 능력 향상에 관한 연구'로 석사학위 논문을 작성한 바 있는데, 수학적 모델링 문제의 예로 '2002년에 부산에서 아시안 게임이 열린다. 개막식이 열릴 주경기장을 건설하는 방법에 대해 생각해 보자.'[12]를 제시하고

---

10) 본 고에서는 수학적 모델링에 관한 자료를 '문제'로 칭하였는데, 이는 좀더 국내 연구자들의 의견이 수렴되어 합의되어야 할 것으로 보인다. 이 용어의 선택 및 결정 여부가 그다지 중요한 사안은 아니지만, <표 Ⅳ-2>에서 알 수 있는 바와 같이, 연구자들마다 수학적 모델링 문제, 자료, 활동 과제 등 여러 가지 용어로 사용하고 있다. 참고로, 국외 학자들도 마찬가지로 각자 다른 용어들을 사용하고 있는데, Powell(1981)은 modeling project, NCTM(1991)과 Dilwyn 외(1989) 경우에는 problem description, 그리고 Meerschaert(1999)는 problem을 사용하고 있음.

11) 수학 문제의 소재에는 수학 내적인 것과 수학 외적인 것이 있는데, 수학 내적 소재라 함은 실생활이나 여러 가지 상황과 관련된 통합적인 소재가 아닌, 주로 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 것을 말하며, 또 일상생활 및 타교과와 연계되어 있다고 하더라도 수학 교과에서 주로 접할 수 있거나 수학 학습에 초점을 두어 판단된 경우로 간주할 수 있다. 또, 외적 소재라 함은 '일상생활과 밀접한 관련이 있는 소재' 또는 타 교과와의 관련성의 파악이 요구되는 통합교과적인 소재를 사용한 것을 말하며, 결국 실생활에서 해결하여야 하는 문제나 또는 문제해결에 필요한 지식이 단지 수학 교과에만 국한된 것이 아니라 다른 교과의 지식을 필요로 하는 경우가 이에 해당함(황혜정 외, 2001).

12) 그의 논문에는 이러한 주제 하에, 경기장을 건설할 때, 필요한 정보나 요구되는 사항, 우리 주변에서 가능한 경기장의 모양 찾기, 돔형 경기장을 건설할 대 현실적으로 고려해야 할 상황 등을 교사의 발문 유도 하에 학생들로 하여금 생각해 보게 한다. 허나, 결국 교사는 궁극적인 문제로 '원기둥형 위에 반구 모양의 천장을 가진 돔 구장을 건설하려고 한다. 바닥(밑면)을 제외한 겉넓이를 20000π로 할 때, 최대의 부피를 갖는 돔 구장의 밑면의 반지름은?"이라는 질문을 던지는 상황을 제시하는 한계점을 지니고 있음.

있다. 그는 수학적 모델링 문제를 수학 외적 문제로 간주하며 모델링 문제 해결을 통해 수학적 문제 해결 능력, 특히 수학외적 문제 해결 능력이 향상되리라는 기대 효과를 예측하였다.

한편, 권기석과 박배훈(1997)은 그들의 연구에서 수학적 모델링 문제를 개발하여 예로 제시함은 물론, 고등학교 156명(응답자 수)의 교사를 대상으로 설문 조사를 실시하였다. 이때 수학적 모델링 문제의 효율적인 활용 방법에 관한 물음에 대하여 교사들이 응답한 내용을 우선순위로 제시하면 다음과 같다. 관련된 개념을 가르친 후 적용 문제로 수업 중에 활용한다에 응답한 교사가 83명(53%), 수업 도입 단계에서 제시하여 학생들의 흥미를 유발한다가 60명(39%), 그리고 중간고사와 기말고사의 평가 문항으로 활용한다가 13명(8%)이었다. 그런데, 여기서 지필고사 시에 하나의 평가 문항으로 수학적 모델링 문제가 제시될 수 있음을 설문 조사 물음의 보기 항목으로 제시한 것에 대해서는 해당 연구자가 수학적 모델링 문제의 성격 내지 특징을 협의의 의미로 간주한 것으로 여겨진다. 이러한 필자의 의견은 류희찬(2003)으로부터 지지될 수 있는데, 그 내용은 다음과 같다. 류희찬(2003)은 수학 수업에서의 수학적 모델링 활동의 활성화를 강조하며 사범대학이나 교육대학 교육과정 및 교사 연수 프로그램에서 다뤄질 것을 당부하면서, 이때 교사의 발문 과정의 중요성을 언급하였다. 또, 모델링 활동 시에 학생들에게 충분한 시간을 주어 학생들 각자 사고력이 신장될 수 있도록 해야 한다고 하였다. 이와 같이 교사의 발문을 강조한 것은 교사의 일방적이거나 주도하에 수학적 모델링 활동이 진행되어서는 안 됨을 의미하며, 학생들에게 충분한 시간을 할애하도록 함에는 수학적 모델링 문제를 해결하는 데에 많은 시간이 걸린다는 가정이 포함되어 있다. 또, 우정호(1996)는 학교 수학교육의 궁극적 목표는 다양하고 풍부한 문제해결을 통한 사고력의 함양이라고 한 바 있는데, 이를 수학적 모델링 활동을 통한 학생들의 사고력 향상의 기대와 연계시켜보면, 결국 사고력 함양을 위하여 문제해결은 훌륭한 수단이 되며, 특히 수학적 모델링 문제의 해결 활동은 더욱더 강력한 수단으로 간주될 수 있을 것이다.

결국, 권기석과 박배훈(1997)의 경우와 같이, 일상생활과 밀접한 관련이 있는 수학 외적 소재의 의미를 협의의 의미에서 학생들이 현재 그들의 학교 안팎의 주변 생활에서 스스로 겪는 상황이나 타 교과의 수업 시간에서 다뤄지는 소재 정도로 부과시킨다면, 수학적 모델링 문제 상황은 수학 외적 문제 상황 보다는 그 범위가 포괄적일 것이다. 허나, 이와 반대로, 만약 일상생활과 밀접한 관련이 있는 수학 외적 소재의 의미를 광의적으로 간주하여 학생들이 현재 주변에서 겪는 정도의 상황 이외에 학생들이 장차 미래 사회에서 겪게 될 사회적, 정치적 현상이나 (경우에 따라) 범우주적으로 발생하고 있는 상황들까지를 수반하는 것으로 본다면, 수학적 모델링 문제의 범주는 오히려 문제해결에서의 수학 외적 문제의 것에 포함된다. 결국, 수학적 모델링 문제와 문제해결에서의 문제의 범주 내지 유형에 관한 논의는 수학 외적 소재의 의미가 명쾌히 정의될 때 가능한 것으로 판단된다.

하지만, 한편으로 저학년에서 다뤄지는 모델링에 관한 개념은 지금껏 논의한 것과 다르다. Ferrucci(2003)에 따르면, 산술에 관한 문장제에 대하여 그저 피상적이고 늘 하던 방식으로 별 생각 없이 정확한 연산을 통해 답을 구하려고만 하는 전통적인 해결 방식을 비판하며, 중학교 학생들의 문제 해결 능력을 향상시키기 위한 융통성 있고, 강력하고 매력 있는 수단이 바로 모델링이라고 하였다. 그런데, 그는 모델

링의 실례로 “짐은 360개의 우표를 가지고 있었는데, 월요일에 1/3을 팔고 화요일에 남은 우표 중에서 1/4을 팔았다. 그렇다면 화요일에 남은 우표는 총 몇 개이겠는가?”와 같은 분수의 곱셈에 관한 문장제를 제시하고, 그림(다이어그램)을 여러 차례 그려가면서 해결하는 과정을 제시하며 이를 ‘모델링 접근’ 방식으로 표현하였다. 또, NCTM(2000)에서도 저학년 학생들은 양적인 상황(quantitative situations)에 대해 판단하고 결론을 도출하고 또는 보다 잘 이해할 수 있는 모델을 사용할 수 있어야 한다고 하였다. 그렇다면, Ferrucci(2003)이 제안한 문장제나 NCTM(2000)에서 제안한 양적인 상황은 지금껏 수학적 모델링 문제로 가능한 범사회적, 정치적, 환경적, 우주적 현상과 같은 ‘원대한’ 상황으로 극대화시킬 필요가 없다. 이에 따라, 수학적 모델링 문제의 경우, 해당 문제를 다루는 학생들의 인지 발달 정도나 수학 성취 능력 정도에 따라서 문제의 규모나 범주가 달라질 수도 있음을 염두에 두어야 할 것이다.

결국, 수학 외적 소재에 관한 엄밀한 정의 없이, 또 학생들의 인지 발달이나 성취 능력 정도의 구분과 고려 없이, 수학적 모델링과 문제해결의 두 활동 사이에서 문제의 범주나 양질의 우위에 관심을 두고 논하기보다는 수학적 모델링 문제의 특징이 무엇인지 소박하게 정리해 보는 게 나을 성싶다. 아마도, 이에 관한 논의는 앞서 다룬 바 있는 수학적 모델링 활동의 특징, 즉 문제 상황의 적절한 단순화 및 이에 부합하는 수학 모델 개발, 시행착오를 통한 수학적 모델링 등과 결코 무관하지 않다.

2. 수학적 모델링 문제의 특징

수학적 모델링 문제의 특징은 국내외 학자들의 의견에 따라 다음과 같이 크게 세 가지 정도로 구분하여 설명할 수 있다.

첫째, 수학적 모델링 문제는 선행 지식을 기반으로 고차원적인 인지 활동을 요구한다.

신은주와 이종희(2005)는 모델링은 탈맥락화 과정도 아니고 구체와 추상의 양극을 세우는 과정도 아니며, 오히려 모델과 모델화된 세계 사이에서 밀접한 상호작용이 이루어지면서 다른 ‘특수 경험’ 내에서 일반성을 인식하는 과정이라고 강조하고 있다. 권기석과 박배훈(1997)도 다음과 같이 언급하고 있다,“ 수학적 모델링은 문제해결의 한 형태이다. …수학적 모델링은 … 문제해결 상황의 특징들을 공유하지만, … 종종 수학적 모델링 상황에서는 겉으로는 주어진 상황이 비수학적인 현상들이 모델화될 수 있다. 이것은 선거 결과를 예언하는 정치분야, 장기간의 원유가의 변동을 찾는 경제, 숲의 미래의 성장 패턴을 예언하는 생태학과 같은 분야에서의 상황일 수도 있다…. 그러므로, 수학적 모델링은 많은 기능을 필요로 하며 해석, 분석, 종합과 같은 좀 더 고차원적인 인지 활동을 요구하는 체계적인 과정이다.”(150쪽) 여러 연구자들의 주장대로, 수학적 모델링 문제의 특징은 보다 ‘광의적’ 의미에서의 ‘진정한’ 수학 외적 소재를 수반하는 문제 형태를 지니고, 수학화에 이르기 위한 수학 모델 형성 이전에 상황 모델이나 현실 모델 등과 같은 선험 과정이 필요하며, 학습자가 이미 보유하고 있는 선행 지식을 기반으로 하는 ‘융통성’ 있는 활용이 요구된다고 하겠다. 여기서, 필자가 언급한 ‘융통성’이란 Gravemeijer(2002)가 주장한 바와 같이 수학적 모델링 문제는 학습자들이 그들이 현재 보유하고 있는 수학 내용의 이해 정도보다도 ‘좀 더 발전 심화된’ 수학적 관계들을 파악하고 이해해야 된다는 의미이다.

둘째, 수학적 모델링 문제의 출발과 종착은

실세계 현상이다.

Dilwyn & Mike(1989)에 따르면, 다른 연구자들의 문헌을 통해서 이미 잘 알고 있는 바와 같이 수학적 모델은 함수와 방정식과 같은 수학적 개념을 사용하여 형성되고, 이로 인하여 실세계로부터 수학적 개념의 추상적 세계로 옮아가며, 모델 조작을 통해 결국 수학적 해결책이 실제의 문제에 유용한 해결책으로 탈바꿈하게 된다. 그런데, 여기서 Dilwyn & Mike(1989)가 강조하는 바는 반드시 실세계로부터 출발하여 실세계에서 마쳐진다는 사실이다. 물론, 문제해결에서도 반성 단계의 중요성은 해결된 문제의 옳고 그름을 가늠하는 검토에도 있겠지만, 이보다는 해결된 문제의 해결 방법 등을 활용하여 그 문제와 유사하거나 보다 발전된 문제에의 적용을 위함일 것이다. 이처럼, 문제해결에서의 강조는 다른 '문제'에의 적용 및 활용인 반면, 수학적 모델링에서는 실세계로부터 실세계로의 환원을 강조하면서 언급되는 '실세계'의 용어에 있는 것으로 비춰진다. 이것이 바로 수학적 모델링 문제와 문제해결의 문제를 구분 짓는 하나의 잣대가 될 수 있을 것이다.

셋째, 문제에 적합하면서도 고유한 수학 모델의 형성을 수반한다.

NCTM(2000)에서도 언급된 바와 같이, 수학적 모델링으로부터 강조될 만한 것은 여러 가지 수학적 표현들을 취사선택하여 사용할 수 있는 융통성을 발휘하여 적절하면서도 생산적인 표현을 가능케 하는 것인데, 이러한 표현이 곧 수학적 모델의 의미와 역할이기도 하다. 다시 말하면, 수학적 모델링 문제의 세 번째 특징은 모델링 문제를 해결하는 데 있어서 그 문제에 적합한 때론 고유한 수학적 모델의 형성을 필요로 한다는 것이다. 이에 관해서는 좀더 구체적인 논의가 필요하므로 별도의 장을 마련하여 다루기로 한다.

3. 수학적 모델

'문제해결'에서의 '문제'의 정의는 흔히 알고 있는 바와 같이 알고리즘이나 규칙, 법칙 등을 이용하여 곧바로 그 해결에 이르는 과정이 드러나지 않는 것을 의미한다. 수학적 모델링 문제 역시 문제해결에서의 문제의 의미를 내포하고 있을 뿐 만 아니라 어떤 문제의 해결을 위한 절차 내지 전략이 해당 문제 상황에 고유하게 적용 가능한 것이어야 한다. 즉, 수학적 모델링 문제는 수많은 현상이나 실세계 사건 내지 상황 들 중 어떤 하나의 것으로부터 독립적으로 출발하여 수학적으로 환원되어 해결될 수 있도록 단순화된 문제 상황으로 바뀌는 것이므로, 수학적으로 환원되어 해결에 이르기까지의 절차 내지 전략 등이 고유하며, 이는 한 마디로 '고유한'(unique) 모델이 구축되어 이러한 모델을 통해 수학화가 이루어짐을 뜻한다.

물론, 이러한 모델의 형태는 주로 식, 그래프, 표 등이며, 이러한 모델의 유형은 문제해결에서의 문제를 해결하는 데에 요구되는 해결 방법 내지 전략에서도 수반되는, 즉 결코 생소하거나 새로운 수학적 표현 방식은 아니지만, 여기서의 초점은 해당 문제 상황에 '고유하다'는 측면에 초점을 두어야 할 것이다. 문제해결에서의 문제는 유사하거나 보다 심화된 문제로의 전이가 용이하여 차기에는 보다 쉽게 해결에 이를 수 있으나, 수학적 모델링 문제는 위에서 언급한 바와 같이 그 문제의 근원이 방대하고 각각 독립적 특성을 지닌 것에서부터 비롯되므로, 이와 같이 특정의 현상이나 상황을 위해 고안된 수학적 모델이 다른 현상이나 상황에 곧바로 쉽게 활용되기는 어려운 듯하다.

수학적 모델링 과정에서, 전반적으로 수학적

모델 개발 단계 이 전에 문제 이해 단계 또는 문제 이상화 단계 등을 두는데, 이 과정에서 신은주와 권오남(2001), 신은주와 이종희(2004a, 2004b, 2004c, 2005), 김선희와 김희연(2004)의 경우, 수학적 모델 개발 이전에 일명 '선험적' 이라 불릴 수 있는 사전(prior) 모델의 개발 단계를 두었으며, 다만 연구자들의 수학적 모델링을 바라보는 시각과 그 선호에 따라 그 모델을 칭하는 용어가 다름을 알 수 있다. 우선, 신은주와 권오남(2001)은 그의 논문에서 English (1999)의 이론에 의거하여 수학적 모델 이전의 모델 단계를 '개념 모델'로 칭하며, 이는 실생활 문제에서 핵심적인 특징과 관계를 인식해서 (불필요한 측면을 배제하고) 필요한 정보를 조직하는 구체화 단계의 다음 과정으로 모델의 개념적, 은유적 성질 때문에 어렵고 미묘한 상황의 이미지를 형성하고 정신적으로 경험하려고 노력하는 과정에서 모델 내에서의 변형을 수반하는 과정을 뜻하며, 이는 수학적 모델 형성 단계로 전환된다고 하였다.

또, 김선희와 김기연(2004)은 Kehle & Lester (2003)의 연구에 터해 수학적 모델 이전에 현실 문제로부터 이를 단순화하여 현실 모델을 형성하고, 이를 추상화한 것이 수학적 모델임을 나타내고 있다. 부연 설명하면, 수학적 모델링 과정에서 현실 상황이 너무 복잡하여 즉시 수학적으로 다루기 힘들 때 학생들은 먼저 현실 문제를 파악하여 이해하고 그것을 단순화하여 정확하고 간결하게 묘사할 필요가 있으며, 이를 '현실 모델' 과정으로 정의하였다. 결국, 수학적 모델이 형성되기 이 전에 이를 위한 보조 역할로서의 모델이 필요하다는 점은 수학적 모델링 문제가 문제해결에서의 문제와 같지 않음을 시사한다. 이와 더불어, 김선희와 김기연(2004)는 전반적인 수학적 모델링 과정에 1차, 2차, …, n차 수학적 모델링의 반복적 상호 작용을 강조한 바 있다.

한편, 신은주와 이종희(2004a, 2004b, 2004c, 2005)는 이를 상황 모델이라 칭하며, 이는 실세계 맥락을 단순화하고 일상경험과 활동을 조직화하면서 개발된 학생들 자신의 비형식적인 모델로서 수학 모델이 개발되기 이 전 과정에서 개발되는 모델을 뜻한다. 특히, 신은주와 이종희(2004b)의 연구에서는 Gravemeijer(1997)의 연구 결과를 바탕으로 모델링 과정에서 형성되는 모델을 상황 모델, 수학 모델, 일반화 모델로 구분하고, 이를 보다 구체적으로 첫째, 경험을 기반으로 하여 실세계 맥락을 탐구하는 과정, 둘째, 실세계 맥락을 단순화하면서 비형식적인 상황모델을 개발하는 과정, 셋째, 상황모델에 내재한 수학 구조와 관계를 조직하여 수학모델을 개발하는 과정, 넷째, 수학모델을 실세계 맥락에 반영하여 해석하고, 수정하고 정교화 하여 일반화 가능한 모델을 개발하는 과정으로 설명하고 있다. 이때 신은주와 이종희(2004b)는 상황 모델, 수학 모델, 그리고 일반화 모델의 형성 각각은 지각적, 인지적, 그리고 메타인지적 활동의 작용에 의해 가능한 것으로 나타내고 있다. <신은주와 이종희 논문(2004b)의 161쪽의 [그림 III-1] 참조> 여기서 수학 모델을 형성하기 이 전에 지각적 활동을 통한 상황 모델의 형성, 그리고 이에 터한 인지적 활동에 의한 수학 모델의 형성은 선형적으로 이뤄지는 관계가 아닌 (때론 반복적인) 상호 작용에 의해 이뤄진다는 점엔 공감하는 바가 크다. 허나, 수학 모델을 기반으로 실세계 현상으로의 환원 후에 그 수학 모델이 일반화된 모델로 확장 내지 성장함이 과연 메타인지적 활동을 통해서 이뤄지는 것으로 단정하여 판단하기에는 다소 무리가 아닌가 싶다. 오히려, 여러 가지 상황에 적용 가능하고 일반화 가능한 '일반화된 모델'은 일차적으로 메타인지적 활동보다는 수학 모

델 형성에서 다져져 한층 '성숙된' 인지적 활동으로부터 연유된 것으로 보고, 다만 이러한 성숙된 인지적 활동은 단순한 반복이 아닌 의미 있는 반성과 검토를 수반하는 적절한 메타인지 활동에 의해 더욱 유의미한 것으로 판단된다.[13]

한편, 김성준(2002)은 학교 대수 도입과 관련된 관점을 크게 대수의 내재적 특성에 따른 것과 대수 학습 과정에서 드러나는 표현 형식에 따른 것으로 구분하여 제시하고 있는데, 여기서 표현 형식에 따른 것으로서 문제해결, 모델링, 함수를 통한 대수 도입에 관해 논의하고 있다.[14] 그의 연구에서 뜻하는 문제해결은 광의의 의미로 "하나 이상의 답을 구하고 좀 더 일반적인 해법을 찾기 위하여 문제를 확장하거나 분해하는 것과 같이 열린 방식으로 문제를 탐구하는 것"(p. 40)을 뜻하며, 이에 관한 예로, 자동차의 연비를 계산해 보고 이를 일반적인 경우에 적용하기 위해 어떠한 공식을 만들어야 하는가까지를 고려해야 하며, 이처럼 대수에서의 문제해결은 산술과 다른 일반화의 특성을 가지고 있어야 한다고 주장하였다. 또한, 모델링에 관해서는 "모델링은 문제해결에서 요구하는 실제와의 관련성을 중요하게 다루며, 특히 현실의 다양한 문제를 모델링하는 과정은 대수에서 중요하게 다루어져야 한다. 모델링은 가정에 기초하여 모델을 창조하거나 고안하는 과정과 그리고 타당화 단계에서 모델을 조사하는 과정으로 구분된다." (41쪽) 이러한 김성준(2002)의 진술에 따르면, 기존의 다른 논문에서와 마찬가지로 모델링을 통해 현실이 강조된 문제 상황과 모델 형성 및 적용을 염두에 두고 있음을 알 수 있다.[15]

이처럼, 국내외 연구 결과에서 일반적으로 수학적 모델 형성 이전에 비수학적 상황을 하나의 모델로 형성하여 이를 토대로 '본격적인' 형식화에 이르는 것으로 나타났다. 신은주와 이종희(2005년)는 구체와 추상을 연결하는 중재 기능으로서의 모델에 관한 분석을 사례 연구를 통해 수행한 바 있는데, 이 연구 결과에 따르면 학생들이 개발하는 모델은 탈맥락화 된 추상적 실체라기보다는 구체와 추상이 연결된 관계망인 상황화 된 추상의 영역에 위치하고 있다고 하며, 이로써 학생들의 모델링의 경험은 실세계 문제를 해결하는 능력을 향상시킬 수 있다고 하였다. 지금까지 논의된 상황 모델과 수학 모델은 Lieven 외(2002)가 도식화하여 나타낸 모델링 과정에서 보다 분명히 이해될 수 있다. <그림 Ⅳ-1 참조> 이와 같이, 본고에서도 사전에 그러한 비형식적 모델의 형성의 존재와 필요성에 공감하는 바이지만, 이러한 사전 모델의 과정이 전반적인 수학적 모델링 과정에 반드시 포함되어야 함을 드러내어 강조하고 구현시키기 보다는 학습자의 사고 활동에 '자연스럽게' 수반될 수 있도록 지도하는 것이 나을

---

13) 이는 근본적으로 메타인지에 관한 정의가 학자에 따라 다르게 이해되고 있는 것으로부터 발생하는 것 일터이고, 본 고의 초점이 메타인지에 관한 것도 아니므로, 이에 관한 논의는 생략하기로 함.

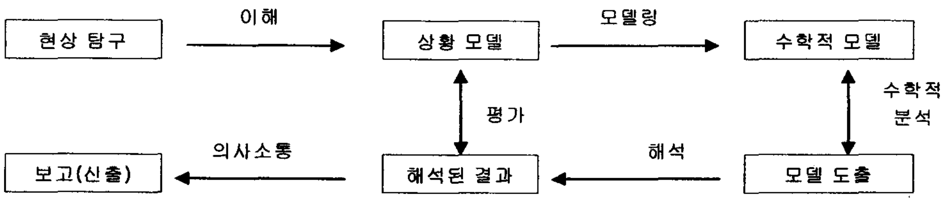
14) 김성준(2002)는 내재적 특성에 따른 것으로 일반화, 추상화, 구조를 두고 있으며, 이러한 내재적 특성과 본문에서 언급된 표현 형식은 독립적으로 존재하는 것이 아니라 상보적인 결합을 필요로 하기 때문에, 결국 문제해결, 모델링, 함수 등의 학습을 통해 일반화, 추상화, 구조 등의 대수의 내재적 특성이 드러난다고 하였음.

15) 허나, 그가 정작 모델링의 예로 제시한 문제는 삼각형을 만드는데 필요한 성냥개비의 수를 구하는 문제이며, 삼각형과 성냥개비 수 사이의 관계를 뽑아내고 이를 공식화하여 기호로 나타내고 이를 모델로 간주하고 있다. (참고로, 김성준(2002)은 이 문제를 Janvier(1996)의 '*Modeling and the Initiation into Algebra*'에 제시된 문제를 변형한 것이라고 밝히고 있다.) 여기서, 다시 한 번 연구자마다 수학적 모델링이 다른 의미로 수용되고 있음을 알 수 있으며, 삼각형과 성냥개비 수 사이의 관계에 관한 이 문제는 현실 상황이 강조되어야 하는 수학적 모델링 문제의 특징은 물론 상황 모델 및 이로부터 이끌어내어지는 수학 모델 형성의 의미나 특징을 수용하고 이해하는 데에 필자로 하여금 어려움을 주고 있음.

것으로 판단된다. 왜냐하면, 사전 모델 형성의 의도적 강조는 학습자들에게 수학적 모델링 문제의 해결 과정이 복잡하고 어렵다는 인식과 심적 부담을 증폭시키고 이로 인하여 모델링 문제를 해결하는데 있어 느끼게 될 체감 난이도가 높아질 것으로 예상되기 때문이다.

한편, 학회지 논문에서 다뤄진 수학 모델의 유형을 살펴본 결과, <표 Ⅳ-1>에 제시된 바와 같이 식, 그래프, 식과 그래프, 그림과 식의 네 가지 유형이며, 사용된 모델의 총 개수는 7개이다. 이 중에서 그래프가 3건으로 가장 많았으며, 그 다음으로 식, 식과 표, 식과 그림 순으로 나타났다. 한편, 석사 논문의 경우에는 식을 모델로 이용한 경우가 현저히 높았으며, 그 다음으로 식과 그림, 그래프, 식과 그래프, 표 등으로 나타났다. 여기서의 특징은 연구자별로 선호하는 모델이 있는데, 예를 들어 신은주와 이종희(2004a, 2004b, 2004c)의 경우, 세 편의 논문 모두에서 비선형함수의 그래프를 사용하였으며, 김선희와 김기연(2004)의 경우에는 식을 선호하는 것으로 나타났다. 그런데, 여기서 수학 모델로 식, 식과 그래프, 또는 그래프 등과 같은 어떠한 특정한 수단을 선호함은 그러한 수단(모델) 자체를 선호하기보다는 그러한 수단이 모델로 가능한 문제 자체를 선호하는 것으로도 볼 수 있다.

본고에서 어떠한 수단을 모델로 사용하는 것이 가장 적합한 것인지, 어떠한 모델을 사용하는 것이 수학적 모델링 문제로 적합한 것인지를 섣불리 가늠할 수는 없다. 다만, NCTM (1991)의 경우를 살펴보면, 모델의 형태가 그래프, 식, 그림, 또는 표 등의 특정한 것에 한정하지 않고 이들을 통합적으로 사용하는 예가 많음을 알 수 있었다. 이러한 점을 착안해 볼 때, 특정의 것이 선호된 모델을 이용하는 문제들을 모델링 문제의 모범적 예로 강조하는 것은 자칫 독자들로 하여금 수학적 모델링 문제의 특성에 대한 바른 이해를 갖는데 방해가 될



[그림 Ⅳ-1]. 모델링 과정 체계 (Lieven 외, 2002, 재인용, p. 258)

<표 Ⅳ-1> 수학 모델 유형의 분석

	식	그래프	식&그래프	그림&식	그림	수직선	표	식&표	기타
학회지	2건	3건	1건	1건					
	김선희 외(2004) 김선희 (2005)	신은주 외 (2004b, 2004c, 2005)	홍정희 외 (1995)	권기훈 외 (1997)					
석사논문	100건	13건	13건	14건	2건	2건	7건	2건	4건

수 있을 것이다.

4. 수학적 모델링 문제의 예

여기서는 22편의 석사 논문들 중에 하나의 예를 들어 제시된 것이다(이기열, 1999).

ㅁ 예 : 유적지에서 발견된 접시

- 문제 상황 : 어느 고분에서 유적을 발굴하는데 (오른쪽 그림과 같은) 원형 접시의 조각이 나왔다. 이 접시에는 세 변의 길이가 각각 3cm, 5cm, 7cm인 접시에 내접하는 삼각형의 무늬가 새겨져 있다. 이 접시의 반지름의 길이는? (그림 생략)

1. 문제 이해 단계 : 깨진 부분을 보충하여 그림을 그려보면 어떠한 모양일까? 접시의 반지름 길이는 삼각형의 외접원의 반지름의 길이와 같음을 알 수 있다.
   외접원의 반지름과 관련된 수학적 정보를 떠올려 보자.
2. 문제의 이상화 단계 :

   · $\frac{a}{\sin A}=2R$ (한 변과 대변이 주어지면 외접원의 반지름의 길이를 알 수 있다)

   · $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (세 변이 주어지면 한 각의 크기를 알 수 있다)
3. 수학적 모델 형성 및 추론 단계

$$\cos B=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{15}{30}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle B=120^\circ$$

따라서

$$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$$

4. 재해석 : 주어진 삼각형의 외접원의 반지름을 구하려면 사인법칙을 이용해야 한다. 그런데, 사인법칙을 이용하려면 삼각형에서 적어도 한 각의 크기는 알아야 한다. 이때, 주어진 세 변의 길이에서 한 각의 크기를 알아내는 공식이 코사인법칙이므로 코사인법칙을 먼저 적용하여 구한다.

이 논문에서 앞서 언급한 바에 따르면, 모델을 사용하여 수학적 결과를 얻기 위한 과정은 해당 문제 고유의 상황에 요구되는 것으로, 식은 기존에 알려져 있는 수학적 공식이 아니라 기존에 알고 있는 수학적 지식이나 개념을 토대로 이 문제 상황을 해결하기 위해 고안되어진 고유한 모델이라 할 수 있다. 즉, 형식적 전략이 알려져 있지 않은 모델링 상황에서 가능한 대안적 전략을 탐구해 나아간다고 하겠다. 그런데, 위의 문제 상황은 해당 문제 상황에 요구되는 고유 모델이 아닌, 이미 공식화되어 있는 사인법칙과 제이코사인법칙을 이용하여 결과를 구하는 것이다. 이기열(1999)은 그의 논문에서 이 문제에 관한 학습 목표로 '삼각형의 세 변의 길이와 내각에 대한 사인법칙과 코사인법칙을 알고, 이를 이용하여 삼각형에 대한 응용문제를 풀 수 있다'를 제시하고 있는데, 이는 협의적 의미로서의 전형적인 수학 외적 문제해결 문제로 간주될 수 있을 것이다. 결국, 앞 장의 2절과 3절을 통해 제안된 수학적 모델링의 특징들을 감안할 때, 이 모델링 문제의 예는 그다지 적절치 않은 것으로 간주될 수 있다.

참고로, 학회지에 수록된 수학적 모델링 문제에 관한 정보를 정리하여 제시하면 <표 Ⅳ-2>와 같다. 이 중에서 권기석과 박배훈(1997)의 예로, '어떤 학교 야구장에 외야 팬스가 없어서 선수들이 홈런에 대한 의욕과 자신감을

갖지 못하자 이 학교 야구부 코치는 선수들에게 훈련에 대한 의욕과 자신감을 갖게 하고자 야구장의 외야 주위에 철망으로 외야 펜스를 만들려고 한다. 이 때 외야 펜스를 만들기 위해 필요한 철망의 길이를 구해 보자.' (10-나 단계의 사인법칙과 코사인법칙), 신은주와 이종희(2005)의 예로, '수평 부분의 길이가 너무 길면 미끄러진 후에 수평 부분의 중간에서 멈추게 되고, 너무 짧으면 미끄러진 후 수평 부분을 이동하는 동안 느낄 수 있는 쾌감이 줄어들

<표 Ⅳ-2> 수학적 모델링 연구 관련 정보[16]

연구자	내용	세부 내용	실험 대상	모델링과제제목	출처	비고 (연구방법)	명칭
주미경 (1991)						문헌연구	x
홍정희 송순희 (1995)	일차함수의 그래프	두 점 사이의 가장 짧은 거리는 선분임을 알기	중 2	버스 정류소 위치 선정	재구성 (총 10문제)	개발 및 실험연구 (100명대상 성취도 및 태도 검사)	수학적 모델링 문제
권기석 박배훈 (1997)	도형의 방정식	두 점 사이의 거리 구하기	고 1	야구장 외야 펜스	재구성 (총 16문제)	개발 및 실험연구 (130명 교사설문)	수학적 모델링 자료
	삼각함수	사인, 코사인 법칙 알고 이용하기	고 1				
조완영 권성룡 (1998)						문헌연구	x
신은주 권오남 (2001)						문헌연구	x
신은주 이종희 (2004a)	삼각함수의 그래프	대칭이동과 평행이동을 이용하여 $10-10\sin\theta$ 그래프 그리기	중 2	(바이킹)	개발 (1문제)	실험연구 (3명학생 사례연구)	모델링 활동 과제
김선희 김기연 (2004)	비례관계	$\frac{\text{발사이즈}}{\text{평균}}$ 구하기	중 1	용의자의 발자국이 발견되다	재구성 (1문제)	실험연구	문제 상황
신은주 이종희 (2004b)	일차함수 그래프의 기울기와 변화율	· $y=ax+b$에서 기울기 값 이해하기 · 비선형함수 그래프에서 두 종속변수의 변화 패턴 해석하기	중 2	(수면 높이)	개발 (1문제)	실험연구 (2004a연구 대상동일 사례연구)	모델링 활동 과제
신은주 이종희 (2004c)	신은주, 이종희 (2004b)와 동일						
신은주 이종희 (2005)	일차함수의 그래프의 성질	· 기울기가 다른 직선들의 그래프 그리기	중 2	(미끄럼틀)	개발 (1문제)	실험연구 (2004a연구 대상동일 사례연구)	모델링 활동 과제
김선희 (2005)	일차함수의 뜻과 그래프의 성질	· 정의역에 따라 식이 다른 일차함수 그래프의 성질 이해하기	중 1	광장산맥 최고봉 등정 도전	언급 없음 (1문제)	실험연구 (19명영재 사례연구)	모델링 문제

16) 위의 표의 '모델링 과제 제목'에서 괄호 안에 제시된 제목은 해당 연구자가 제목을 제시하지 않아, 본인이 과제의 내용에 맞게 임의적으로 붙인 것임. 또한, 홍정희 외(1995), 권기석(1997)은 각각 총 10문제, 16문제씩 재구성하여 개발하였으나, 그들의 논문에는 한 문제씩만을 제시하고 있음.

수 있습니다. 미끄럼틀을 설치할 때, 수평 부분의 길이를 조정하기 위해 어떤 요인을 고려해야 하는지를 설명하고, 이 요인과 미끄러진 후 이동한 수평거리와의 관계를 추론하여 관계그래프를 그리시오.'(10-나 단계의 삼각함수, 8-가 단계의 함수의 그래프, 9-나 단계 삼각비, 비선형함수의 그래프)가 있다. 그 밖에 김선희와 김기연(2004)은 '용의자의 발자국이 발견되다!'(7-가 단계의 비례 관계)를 제시하고 있는데, 지면 관계상 구체적인 문제 상황의 예시는 생략하기로 한다.

한편, 수학적 모델링에 유용한 수학 내용에 대해 살펴보기로 한다. 학회지 논문 11편을 통해 제시된 수학적 모델링 문제는 총 7개이며, <표 Ⅳ-3>에서 알 수 있는 바와 같이 이 중 대부분이 규칙성과 함수 영역에 속한다. 물론, 권기석과 박배훈(1997)의 경우, 논문에는 수록되지 않은 15개의 문제에 대하여 각각에 해당하는 수학 내용을 제시하였는데, 이를 영역별로 살펴보면 고루 분포되어 있다. 반면, 홍정희와 송순희(1995)의 경우, 9문제에 대한 수학 내용은 확률과 통계, 문자와 식, 규칙성과 함수에 치중되어 있다. 또한, 석사 논문의 경우, 수학적 모델링 문제의 적합성 여부에 상관없이[17] 전반적으로 규칙성과 함수 영역이 다른 영역에 비해 월등히 많았으며, 그 다음으로 문자와 식 영역에 속하는 문제가 많았다.

여기서 규칙성과 함수, 문자와 식 영역의 경우, 자연 현상을 다양한 그래프나 식으로 나타내어 그 결과를 해석하는 활동이 많으므로 이에 해당하는 모델링 문제 수가 많음은 자연스러운 일이겠으나, 확률과 통계 영역에 속하는 모델링 문제 수가 학회지는 물론 석사 논문에도 많지 않음은 다소 의아한 결과로 여겨진다. 이에 대해 정확한 분석 없이 결과를 예측하는 것은 위험스러운 일이겠으나, 확률과 통계 영역에 해당하는 문제 상황이나 소재 자체는 실세계 현상과 밀접하게 관련되어는 있지만 이를 수학적 문제로 환원하는 데 있어서 수학 모델 형성이 용이하지 않거나, 또는 확률과 통계 영역이 다른 영역에 비해 학교 수학에서 다뤄지는 양이나 그 중요성이 상대적으로 낮은 경향

<표 Ⅳ-3> 수학적 모델링 연구 관련 정보[18]

			수와 연산 (대수)	도형	측정	확률과 통계	문자와 식	규칙성과 함수	기타 (미적분)
학회지	수록된 것			(1)	1			6	
	수록 되지 않은 것	홍정희 외 (1995)				4	2	3	
		권기석 외 (1997)	1 (1)	1(1)	2	3(1)	5	2	1
석사논문	(수록된 것)		17	23	9	4	35	50	3

17) 필자가 연구 초반에는 석사 논문들에 제시된 모든 수학적 모델링 문제들을 대상으로, 수학적 모델링 문제로서 적합한 것과 그렇지 못한 것을 나름대로 구별하려고 하였으나, 워낙 문제의 수가 많아 작업량이 방대할 뿐만 아니라 필자 개인의 판단 하에 수학적 모델링 문제의 적합성 여부를 엄격히 구분하여 산술적으로 그 수를 나타내는 것이 용이치 않아 생략하였음.

18) 본문의 <표 Ⅳ-3>에서 괄호안의 숫자는 한 문제에 대하여 해당하는 내용 영역이 둘 이상인 경우 겹쳐지는 부분(영역)을 나타낸 것임.

등을 이유로 예측해 볼 수 있다.

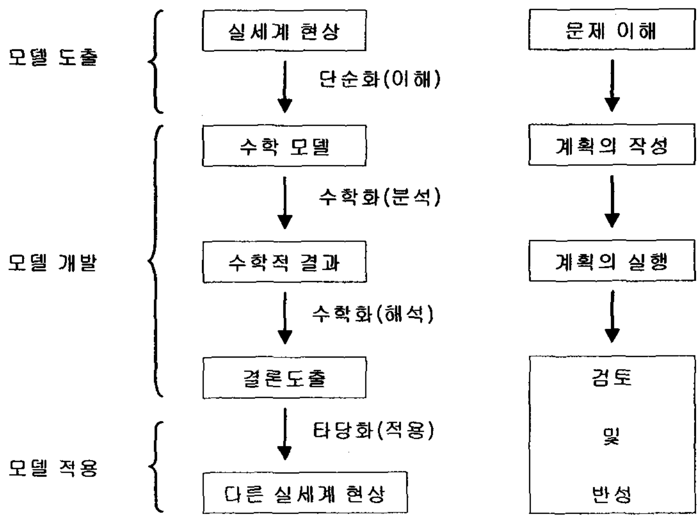
지금까지 본 고에서는 수학적 모델링을 중심으로 문제해결과 비교하며 그 의미와 특징을 살펴보고, 수학적 모델링 문제와 문제해결의 문제를 비교하면서 수학적 모델링 문제의 특징과 더불어 수학적 모델링 문제의 예를 구체적으로 살펴보았는데, 이를 토대로 수학적 모델링과 문제해결 과정을 간단히 비교 정리해 보면 다음과 같다. 수학적 모델링에서 실세계 현상을 탐구하여 사전 모델 형성을 이루는 모델 도출 과정은 문제해결에서의 문제 이해 단계에 해당하는 것으로, 또 수학적 모델링에서 수학 모델 구축 및 이의 적용을 통한 수학적 결과의 획득은 문제해결에서 각각 계획 작성 및 실행 단계에 해당되는 것으로도 간주될 수 있다. 또한, 수학적 모델링에서 수학적 결과로부터 적절한 해석을 통해 본래의 현상에 부합한 수학적 결론 및 새로운 현상으로의 적용은 문제해결에서의 반성 단계에 해당하는 것으로 간주할 수 있을 것이다. 지금까지 수학적 모델링 과정과 문제해결 과정의 연계성을 간단히 도식화하여 나타내면 [그림 Ⅳ-2]과 같다.

V. 요약 및 제언

1. 요약

본 연구에서는 수학적 모델링에 관한 주제로 국내 학회지에 실린 총 11편의 선행 연구 및 22편의 석사 학위 논문을 대상으로, 수학적 모델링과 문제해결의 관련성, 수학적 모델링 과정, 수학적 모델링 문제의 특성 등에 대한 연구 결과들을 탐색하여 수학적 모델링에 관한 이해를 도모하고자 하였다. 허나, 본 연구에서도 명료히 정리되어 밝혀지지 않는 사안에 대해서는 수학적 모델링이나 문제해결에 관해 보다 식견 있는 전문가들의 관심과 도움으로 혜안이 모색되길 바란다.

본 연구에서는 우선, 수학적 모델링이라는 용어에 대해 살펴보았는데, 그 자체에 관한 형식적이고 엄밀한 정의는 대부분의 논문에서 드러내어 강조되고 있지 않으며, 오히려 모델 개발을 수반하는 모델링 과정을 통해 수학적 모델링이 무엇인지를 설명하고 있는 것으로 나타났다. NCTM(1991)의 문헌을 빌어 정리해 보면,



[그림 Ⅳ-2] 수학적 모델링과 문제해결 과정

수학적 모델은 현상의 특징을 가늠케 하는 수학적 구조이며, 이러한 모델을 고안해 내는 과정이 바로 수학적 모델링이다.

수학적 모델링 과정의 경우, 본 연구에서는 학회지 논문 및 석사 논문 내용을 바탕으로 그 밖의 다른 문헌들을 반영하여 모델 도출, 모델 탐색, 모델 적용으로 크게 구분하고, 모델 도출 부분에 실세계 현상 과정을, 모델 탐색 부분에 수학 모델, 수학적 결과, 결론 도출 과정을, 그리고 모델 적용 부분에 다른 실세계 현상 과정을 제시하였다. 즉, 수학적 모델링 과정은 다음과 같이 정리해 볼 수 있다: 1) 실세계 현상에 대한 이해 및 탐구 과정을 통해 우선 현상을 단순화하여 수학적 문제 상황으로 환원하며, 2) 이러한 문제 상황에 적합한 모델을 도출하여 형식화/추상화하고, 3) 이를 이용하여 변형시킨 (단순화된) 문제를 해결하여 수학적 결과를 얻으며, 4) 이를 토대로 통찰, 재해석, 반성 등을 통해 본래의 현상에 부합하는 타당한 수학적 결론에 이르게 된다. 이와 더불어 더 나아가 이러한 모델링 과정을 다른 유사한 현상에도 적용시켜 보는 활동 절차를 말한다. 이때, 수학 모델의 유형은 식, 그래프, 식과 그래프, 그림과 식을 들 수 있는데, 이 중에서 특정한 수단(모델)을 선호함은 그 자체를 선호하기보다는 그러한 수단이 모델로 가능한 문제 자체를 선호하는 것으로 보아진다. 본고에서 어떠한 수단을 모델로 사용하는 것이 가장 적합한 것인지, 어떠한 모델을 사용하는 것이 수학적 모델링 문제로 적합한 것인지를 섣불리 가늠할 수는 없다. 다만, NCTM(1991)의 경우를 살펴보면, 모델의 형태가 그래프, 식, 그림, 또는 표 등의 특정한 것에 한정하지 않고 이들을 통합적으로 사용하는 예가 많음을 알 수 있었다.

한편, 수학적 모델링의 의의를 탐색하기 위하여 우선적으로 수학적 모델링과 문제해결의 관계를 살펴보았는데, 수학적 모델링에서 요구되는 과정은 수학적 지식을 활용하여 '적절한' 해결 방법을 찾고, 주어진 문제에 합당한 해를 구하기 위하여 해결자의 통찰, 해석, 반성을 강조한다. 허나, 문제해결에서도 적절한 해결 전략의 선택과 활용, 적절한 수학적 지식의 선택과 활용, 문제해결 과정의 강조, '반성' 단계에서 결과와 풀이 과정의 신중한 검토, 다양한 방법의 모색, 우아한 해법의 추구, 다른 문제에로의 일반화 등이 요구되고 있다. 그럼에도 불구하고, 문제해결과 차별화될 수 있는 수학적 모델링으로부터의 값진 시행착오 과정의 결실은 공교육에서는 다뤄지지 않는 어떠한 '새로운' 수학적 지식의 형성도 가능케 한다는 점이다. 또, 이 연구에서는 수학적 모델링 문제와 문제해결에서 정의되는 문제의 관계를 살펴보았는데, 이는 문제해결에서의 수학 외적 소재를 수반하는 문제 유형의 범주가 보다 분명히 밝혀질 때 이에 따라 두 문제 사이의 관계가 정립될 수 있을 것으로 판단되었다. 결과적으로, 본 연구에서는 문제해결 문제와의 비교를 떠나 수학적 모델링 문제 자체가 지니고 있는 특징을 세 가지로 정리하여 제시하였다. 첫째, 수학적 모델링 문제는 선행 지식을 기반으로 보다 고차원적인 인지 활동을 요구하고, 둘째 수학적 모델링 문제의 출발과 종착은 실세계 현상이며, 셋째 수학적 모델링 문제는 수학적 모델 형성에 기초하여 모델링 과정이 전개되며 이로써 문제 해결이 가능하다. 이어서 본 고에서는 이러한 특징에 다소 부적합한 수학적 모델링 문제의 예를 반례 형식으로 제시하여 수학적 모델링 문제에 관한 보다 분명한 이해를 돕고자 하였다.

끝으로, 수학적 모델링과 문제해결 과정을 간단히 비교 정리해 본 결과, 수학적 모델링에서 실세계 현상을 탐구하여 사전 모델 형성을

이루는 모델 도출 과정은 문제해결에서의 문제 이해 단계에 해당하는 것으로, 또 수학적 모델링에서 수학 모델 구축 및 이의 적용을 통한 수학적 결과의 획득은 문제해결에서 각각 계획 작성 및 실행 단계에 해당된다고 하겠다. 또한, 수학적 모델링에서 수학적 결과로부터 적절한 해석을 통해 본래의 현상에 부합한 수학적 결론 및 새로운 현상으로의 적용은 문제해결에서의 반성 단계에 해당하는 것으로 간주할 수 있을 것이다.

2. 제언

여기서는 본 연구를 수행하면서 필자가 느끼게 된 점을 바탕으로 하여 향후 수학적 모델링과 관련하여, 더 나아가 다른 주제와 관련된 연구가 진행됨에 있어서 반영되기를 기대하는 몇몇 사안을 정리하여 나타내었다.

첫째, 수학적 모델링 문제의 특성이 명료화되기 위해서는 문제해결에서 일컬어지는 수학 외적 문제의 범주 내지 특징이 무엇인지 명료화되어야 할 것이다.

문제해결에서의 문제의 범주 내지 특징이 간단한 비정형 유형의 수학 내적 또는 외적 소재 정도를 수반하는 것인지 아니면 보다 광범위하게 수학적 모델링 문제의 특성까지 포괄하는 것인지에 관해 보다 명료하게 정리될 필요가 있겠다. 이에 대한 투명한 답은 현재 수학적 모델링 주제에 관심을 두고 연구를 진행하거나 수업에 임하는 교사들에게 일말의 올바른 연구 방향과 내용을 안내하고, 또 효율적인 교수법을 부여하는 것이라 하겠다. 다만, 이때 수학적 모델링의 의미와 가치를 강조하기 위하여 기존의 문제해결의 의미와 중요성이 과소평가 되어서는 안 될 것이다. 왜냐하면 수학적 모델링에서의 수학 모델 구축과 이에 터한 수학적 결과 및 결론에 이르러 다시 현상 내지 실생활 상황에의 적용에 이르는 과정을 문제해결 과정과 비교해 볼 때, 문제해결에서 수학적 모델링에서처럼 '특별한' 모델의 구축 및 활용이 강조되지는 않지만, 문제해결 과정에서도 해당 문제를 해결하는데 있어서 나름대로의 적절한 해결 방법 및 전략의 선정 및 활용이 요구되고 있기 때문이다.

결과적으로, 수학적 모델링의 강조를 위해 문제해결과 차별화하기 보다는 학교 수학에서 다양한 해결 방법을 통한 열린 반응의 문제해결이 점차 강조되고 있음을 인식하며 이를 위한 최상의 대안이 수학적 모델링 활동을 통한 것임을 인식하고 실천할 때가 아닌가 싶다. Meerschaert(1999)는 단적으로 수학적 모델링을 수학 문제를 해결하는 데 있어서의 유용한 수단으로 간주하며, 주어진 질문에 모델링 방법을 선택하여 모델을 형식화하고 그 모델을 해결함으로서 해당 질문에 답하는 것이라고 하였다. 궁극적으로, 문제해결에서 본래 추구하고자 하는 것이 '제시된(주어진) 문제', '하나의 고정된 해석과 절차를 사용하여 문제 해결', '하나의 단정적인 답에 이르는 것' 등(신은주와 이종희, 2004b)은 아닐 것이다. 만약 모델링에서 지향하는 문제의 유형 내지 특징이 문제해결을 위한 문제로 간주될 수 있다면 모델링은 훌륭하면서도 고급스러운 최상의 문제해결로 여겨질 수 있을 것이다. 어찌되었든 간에 국내에 문제해결에 관해 관심을 가지고 있는 수학교육 관련의 전문가가 많으므로, 그들의 판단과 의견을 중심으로 문제해결에서 일컬어지는 수학 외적 문제의 범주 내지 특징이 무엇인지 정리되어야 할 것이다.

둘째, 수학적 모델링은 교육과정 문서에 제

시된 내용(의 범위) 외의 것도 다루는 문제 상황을 수반하는 활동임이 인식되어야 할 것이다.

국내외 문헌들을 통해 제시된 수학적 모델링 문제에 따른 수학적 모델을 보면서 필자는 종종 그와 같이 특별하면서도 고유한 (물론, 수학 교수-학습에 있어서 상당히 중요한 의미를 부여하는 것임에는 전혀 이견을 가지지 않지만) 모델을 형성하고, 그 해결에 이르는 방법, 과정, 전략 등을 학습자들이 과연 스스로 고안해 낼 수 있을 지 다소 의문스러웠다. 수학적 모델링 문제의 경우, 대부분 이의 해결을 위하여 수학적 모델 형성 과정에서 사용되는 수학적 지식 내용이 어렵거나 복잡하고, 경우에 따라서는 수학과 교육과정에 따라 구현된 현 교과서에 다뤄지지 않는 내용도 포함된다.[19] 가령, 국내 학회지 논문 중, 중학교 학생들을 대상으로 하는 여러 편의 사례 연구 논문에서 비선형의 함수가 다루어지고 있다. 물론, 여기서 현 교육과정에서 정식적으로 다뤄지지 않고 있다고 하여 이를 다루는 것에 문제를 제기하는 것은 결코 아니다. 오히려 실생활에서는 직선보다는 비선형의 다양한 형태의 함수로 나타내어지는 현상이 많음은 지당할 뿐만 아니라, 우리나라 교육과정 문서상에 제시된 것보다 그 범위와 수준을 넘는 내용이 다뤄지는 모델링 문제가 적지 않음을 외국의 책자에 소개된 문제들의 예를 통해 알 수 있다.

허나, 여기서 이러한 모델링 문제의 예는 우리나라에서처럼 학교급이나 학년이 앞당겨져서 발생하는 경우에 생겨나는 전형적인 수학 문제, 즉 고학년의 수준 높은 어렵고 복잡한 수학 문제와는 다르다고 하겠다. 성공적인 수학적 모델링 사용자가 되기 위해서는 Dilwyn & Mike(1989)가 언급하였듯이 기본적으로 수학이나 통계 내용의 '고전적' 지식을 보유하는 것만으로는 충분하지 않으며, 이 외에도 분명한 판단력, 논리적 접근 방법으로 긍정적이고 적극적인 태도가 필요하다. 따라서, 수학적 모델링과 관련하여 후속 연구가 진행되는 경우, 해당 연구의 주 목적으로든 부가적으로 취해지는 기대 효과로든 간에, 우리나라 초·중등 교육과정 문서에 제시된 수학 내용 범위에 속한 문제뿐만 아니라 그 이외 또는 그 이상의 것을 수반하는 모델링 문제에 관한 충분한 예가 다뤄져야 할 것이다.

셋째, 수학적 모델링에 관한 전반적인 이론적 연구를 바탕으로 적절한 수학적 모델링 문제 개발 및 효율적인 활용 등을 다루는 실제 지향적인 측면의 연구도 함께 병행되어야 할 것이다.

수학적 모델링의 의미, 모델의 유형, 문제해결과의 차이점 등에 관한 이론적 논의가 전반적으로 많이 이뤄진 편이기는 하나, 필자가 예상했던 것보다 지극히 몇몇 연구자들에 의해 집중적으로 연구가 수행되어 왔음을 알 수 있었다. 더욱이, 연구 논문 편수에 비해 모델링 문제의 모범적 예가 상대적으로 더 적은 편이어서 수학적 모델링 과정에 부합하는 문제에 관한 이해가 충분치 못한 것으로 판단된다. 이러한 판단은 본 연구에서 수학적 모델링을 주제로 한 석사 논문에 수록된 상당수의 문제들이 수학적 모델링 문제로 적절하지 못함에 기

19) 필자는 강의 시간에 *"Visual Approach to Algebra"*(1988) 책자에 수록되어 있는 (하나의 함수식으로 나타낼 수 없는) 여러 가지 형태의 다양한 함수의 그래프들을 해석해 보게 하는 시간을 종종 가지곤 하는데, 이때 학부생들은 물론 현직 교사인 대학원생들조차 너무나 낯설어하며 말문조차 트지 못하는 경우를 자주 보아 왔다. 이는 우리나라 학생들이 중등 교육과정을 거치면서 여러 가지 함수의 그래프의 성질을 철저히 익혀 정확한 함수식을 구하는 데에만 너무 많은 시간을 보낸 탓으로 여겨짐.

인한 것이다.

어떤 한 연구에서 이론적 가치나 실제적 가치 중 철저히 하나만을 고려하여 결과를 산출하는 것은 옳지 못하며 가능하지도 않을 일이다. 결국 둘 중 어느 것에 보다 주안점을 두느냐의 선택의 문제일 것인데, 수학적 모델링에 관련된 연구에 있어서는 다른 여느 연구에 비해 이론적 의미보다는 이의 개발 및 활용으로서의 실제적 의미가 더욱 강조되어야 할 것으로 여겨진다. 수학적 모델링 전반에 관하여 최선의 이론이 부지런히 쌓아올려지고 이것이 가능할 즈음에 일상의 실재가 지혜롭게 추구되는 의지와 노력이 있어야 할 것이다.

넷째, 실제 지향적인 연구를 수행함에 있어서 보다 다양한 영역의 내용과 연구 대상을 수반하는 실험 연구가 활성화 되어야 할 것이다.

본문의 표 IV-2, 3을 중심으로 살펴본 바에 따르면, 학회지 논문 11편을 통해 제시된 수학적 모델링 문제는 총 7개이며, 이 중 대부분이 규칙성과 함수 영역에 속한다. 여기서 규칙성과 함수 영역의 경우, 자연 현상을 다양한 그래프나 식으로 나타내어 그 결과를 해석하는 활동이 많으므로 이에 해당하는 모델링 문제 수가 많음은 자연스러운 일이겠으나, 문자와 식, 확률과 통계 등의 영역 내용에 속하는 모델링 문제의 경우에도 실세계 현상과 관련되어 있는 문제 상황이나 소재의 추출이 가능하며 이를 수학적 문제로 환원하여 해결하는 것도 (규칙성과 함수 영역만큼은 아닐지라도) 가능하리라 여겨진다.

한편, 총 11편의 연구 논문 중에서, 4편은 문헌 연구에 의해 진행되었고, 나머지 7편은 개발 및 실험연구 또는 실험연구로 진행되었다. 실험연구의 경우, 수학적 모델링 활동과 관련하여 2편의 논문 중 한 편은 100명을 대상으로 태도 검사를 시행한 것이고, 다른 한편은 130명의 교사를 대상으로 설문 조사를 실시한 것이다. 이 두 편을 제외한 5편의 연구 논문은 주로 사례연구 방식으로 진행되었는데, 이 논문들 중에는 신은주와 이종희(2004a, 2004b, 2004c, 2005)의 논문이 4편에 해당하며, 이 네 편 모두 연구 대상이 동일한 것으로 나타났다. 그들의 연구 대상은 중학교 2학년에 재학 중인 3명의 학생이며, 이들을 대상으로 사례연구를 시행하였고, 또 김선희(2005)의 경우에는 19명의 중학교 1학년 영재학생들을 대상으로 진행하였다. 결국, 지금껏 국내에서 수학적 모델링 활동과 관련하여 그러한 활동의 가치와 유의미성을 탐색하는데 있어서 총 3명의 중학교 2학년 학생과 19명의 중학교 1학년 영재 학생뿐이라는 점을 감안해 본다면, 이로부터 수학적 모델링 활동에 관한 실험연구의 결과는 지극히 한정적이라고 할 수밖에 없다. 따라서, 향후 수학적 모델링과 관련하여 실제에 중점을 두는 개발 및 실험 연구를 수행함에 있어서 수학 학업 성취 수준, 학년, 대상 수 등의 폭을 넓혀 연구 대상을 삼고 다양한 영역의 내용을 수반하는 모델링 문제가 다뤄져야 할 것이다.

다섯째, 수학적 모델링에 관한 연구가 선행 연구 결과들을 바탕으로 하여 보다 일관성 있게 연계되어 진행되어야 할 것이다.

지금까지 필자가 몇 년간 이런저런 연구를 수행하고 또 석사 논문 지도를 하면서 알게 된 것은 석사 논문의 경우 동일한 주제를 동일하게 반복적으로 수행함으로서 유의미하지 않은 연구 결과가 산출되고 있으며, 경우에 따라서는 잘못된 선행 연구의 결과를 그대로 수용하는 오류도 범해지고 있다는 사실이다. 이는 석사 논문 작성자들이 기존의 석사 논문 이외에는 다른 국내외 문헌들을 참고하지 않을 뿐더

러, 선행 석사논문의 연구 결과조차도 분석적, 비판적 입장을 취하지 않은 채 무조건 수용하는 경향이 높기 때문이다. 본 연구에서 다룬 수학적 모델링에 관한 22편의 석사논문의 경우에도 국내 학회지에 수록된 수학적 모델링에 관한 논문을 몇몇 편을 제외하고는 거의 참고하지 않은 것으로 나타났다. 이처럼, 국내 학회지에 실린 양질의 논문들이 예비 교사이자 초보 연구자들이라 할 수 있는 석사 과정 학생들에게 유용한 안내서가 되지 못하였음은 몹시 아쉬운 일이며, 이는 수학 교육 전문가 입장에서나 학생을 지도하는 자의 입장에서 진중히 반성해 봄직도 하다.[20]

한편, 학회지에 제시된 수학적 모델링에 관한 내용들이 연구자마다 사뭇 다른 점이 있는데, 이는 연구자들이 주로 외국 문헌들을 참고하여 수학적 모델링에 관해 보다 '새롭고 참신한 것'을 제시하려는 경향 때문인 것으로 추측된다. 다른 연구자에 의해 이미 제안된 내용이나 연구자 본인 자신이 유사한 주제의 연구를 반복적으로 수행하면서 달라진 견해 등에 관하여 짚고 넘어가지 않음으로서, 수학적 모델링에 관해 문외한인 독자나 관심을 가지고 있는 독자들에게 상당한 오해의 소지를 남기고 혼란을 야기 시킬 수 있다. 수학적 모델링에 관한 특정 연구의 가치 여부가 얼마만큼 여러 외국 문헌들이 인용되고 참고 되었는가에 따라 판가름될 수도 있겠지만, 국내의 선행 연구 결과도 충실히 반영시켜 수정 보완해 나아감으로서, 독자들로 하여금 선행 연구들의 흐름 및 변화를 바르게 인식하고 파악하게 하여 자신의 판단 하에 보다 견고한 내용이나 이론을 수용할 수 있도록 함이 좋을 것이다. 그럼으로써, 수학적 모델링과 관련하여 보다 진일보한 새로운 결과가 추구되고 또, 이로 인하여 문외한인 독자들이 수학적 모델링에 관해 보다 바른 이해가 촉구될 수 있을 것이다.

참고문헌[21]

권기석 · 박배훈(1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구. **수학교육, 36**(2), 149-159.

김선희(2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰. **학교수학, 7**(3), 303-318.

김선희 · 김기연(2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학, 6**(3), 283-299.

신은주 · 권오남(2001). 탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구. **수학교육학연구, 11**(1), 157-177.

신은주 · 이종희(2004a). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. **학교수학, 6**(2). 153-179.

신은주 · 이종희(2004b). 중학생들의 모델링 활동에서 메타인지 분석에 관한 사례연구. **수**

20) 현재 수학적 모델링 자료 개발 이외에도, 수행평가 문항 자료 개발, 학습 부진아를 위한 자료 개발, ICT 활용 자료 개발 등을 주제로 삼은 석사논문들이 산재해 있다. 어떤 동일한 혹은 유사한 주제 하에 연구를 재 시행할 때, 선행 연구를 재탕하여 반복해서는 안 되며, 관련된 선행 연구에서 미처 다뤄지지 못한 점들을 보완하여 보다 심도 있게 나아가야 할 것이다. 이는 일반 연구 수행 시에도 당연히 이행되어야 할 중요한 사실이지만, 특히 석사 논문의 경우에 빈번히 발생되는 그릇된 사안이므로 (이의 해결책이 별도의 논의 하에 마련되어야 하겠지만) 우선적으로는 해당 지도 교수들의 관심 하에 보다 적절한 지도가 성심껏 이뤄져야 할 것임.

21) 본고에서 분석 대상으로 삼은 학회지 11편의 논문과 22편의 석사 논문이 무엇인지 보다 쉽게 나타내기 위하여, 편의상 이들을 각각 가나다 순으로 우선 제시하고, 이어서 본 논문을 작성하는데 있어서 추가로 참고하였던 문헌에 관한 정보를 별도로 제시하였음.

학교육학연구, 14(4), 403-419.
신은주 · 이종희(2004c). 모델 개발 과정에서 도구를 조작하는 활동 분석. **학교수학, 6**(4), 389-409.
신은주 · 이종희(2005). 구체와 추상을 연결하는 모델의 중재기능 분석. **수학교육학연구, 15**(1), 1-19.
조완영 · 권성룡(1998). 열린수학교육과 모델링. **대한수학교육학회 논문집, 8**(2), 663-677.
주미경(1991). 모델링 지도에 관한 고찰. 대한**수학교육학회논문집, 1**(1), 53-61.
홍정희 · 송순희(1995). 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구수업 효과의 고찰. **수학교육, 34**(1), 83-96.
권기석(1997). **고등학교에서 수학적 모델링 지도를 위한 자료의 활용에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
권태희(2004). **수학적 모델링을 활용한 수행평가의 효과에 관한 연구 - <8-가> 방정식과 부등식, 함수를 중심으로 -** . 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.
김성기(2002). **수학적 모델링 적용을 통한 수행평가 자료의 활용에 관한 연구**. 인천대학교 교육대학원 석사학위논문
김수미(1993). **중등학교에서의 수학적 모델링에 관한 고찰**. 서울대학교 대학원 석사학위논문.
김희정(2001). **공업계 고등학생의 수학적 신념에 수학적 모델링 중심 지도가 미치는 영향**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
백은정(2000). **수학적 모델링 지도를 위한 프로그램의 개발과 적용 - 중학교 2학년 부등식 단원을 중심으로 -** . 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
성호금(2000). **수학적 모델링 지도가 수학적 신념 및 학업 성취도에 미치는 영향 - 고등학교 함수 단원을 중심으로 -** . 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
손기도(1998). **수학적 모델링과 그래픽을 활용한 탐구 수업 효과의 관찰**. 동아대학교 교육대학원 석사학위논문.
이기열(1999). **수학적 모델링을 통한 수학 교과 지도에 관한 소고**. 경성대학교 교육대학원 석사학위논문.
신동찬(2000). **수학적 모델링 자료에 관한 연구 - 대수 영역을 중심으로 -**. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.
신은주(2000). **탐구지향 수학적 모델링에 관한 연구 : 사례연구**. 이화여자대학교 대학원 석사학위논문.
안기용(2004). **수학수업에서 수학적 모델링 활용의 적용에 관한 연구 - 중학교 '문자와 식' 영역을 중심으로 -** 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.
오영순(2005). **수학적 모델링 지도가 함수 개념 형성에 미치는 영향**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
오은주(2005). **동영상을 이용한 수학적 모델링 학습법 - 중학교 1학년 방정식, 함수 단원을 중심으로-**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.
용정택(2001). **수학적 모델링을 통한 수학 외적 문제 해결 능력 향상에 관한 연구**. 경성대학교 교육대학원 석사학위논문.
우정민(2004). **기하학적 모델링 지도 자료 개발 및 적용**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
이기열(1999). **수학적 모델링을 통한 수학 교과 지도에 관한 소고**. 경성대학교 교육대학원 석사학위논문.
이석훈(1997). **수학적 모델링과 그 실제**. 단국

대학교 교육대학원 석사학위논문.

이희정(2004). **수학적 모델링을 이용한 수업이 학습 능력 수준별 학생들의 문제해결력에 미치는 영향 - 고등학교 2학년을 대상으로 -**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

장은수(2003). **수학적 모델링 활용에 관한 연구.** 성균관대학교 교육대학원 석사학위논문.

장종근(2004). **고등학교 수학에서 수학적 모델링의 활용 방안.** 영남대학교 교육대학원 석사 학위 논문.

조원주(2002). **중학교 함수 영역에서 수학적 모델링을 활용한 수행과제와 구체적 평가 기준안 개발.** 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

최항철(2000). **고등학교에서 대수지도를 위한 수학적 모델링 자료의 고찰.** 경희대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육부(1997). **수학과 교육과정.** 서울 : 대한교과서주식회사.

김성준(2002). 학교 대수 도입과 관련된 논의. **학교수학, 4**(1), 29-47.

류희찬(2003). 수학교육에서 '모델링' 지도의 의미와 방안. **청람수학교육, 11,** 1-21.

장혜원(2003). 중등 수학의 대수와 함수 영역에서의 모델링. **청람수학교육. 11,** 1-21.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호(1996). **학교 수학의 교육적 기초.** 서울 : 서울대학교출판부.

황혜정·나귀수·최승현·박경미·임재훈·서동엽(2001). **수학교육신론.** 서울 : 문음사.

Ferrucci, Beverly J., Yeap, Ban-har, & Carter Jack A.(2003). A Modelling approach for enhancing problem solving in the middle graders, *Mathematics Teaching In the Middle School, 8*(9), 470-475.

Frances, Van Dyke (1988). *A Visual Approach to Algebra.* White Plains, NY : Dale Seymour Publications.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task,* 401-511. Dordrecht, The Netherland: D. Reidel Pubishing Company.

Gravemeijer Koeno (2002). Preamble: from model to modeling, *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education,* in Koeno Gravemeijer, Richard Lehrer, Bert Van Oers, and Lieven Verschaffel (Eds.). Derdrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

Kohler Angela, D. A. (2002). The Dangers of Mathematical Modeling. *Mathematics Teachers, 95*(2), 140-145.

Dilwyn Edwards & Mike Hamson (1989). *Guide to Mathematical Modelling.* Houndmills, London : Macmillan Educaion Ltd..

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model development sequence. In R. Lest & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism.* Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum Associates, Inc..

Lieven Verschaffel, Brian Greer, & Erik De Corte (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school world problems. In Koeno Gravemeijer, Richard Lehrer, Bert Van Oers, and Lieven Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, Modeling and Tool Use in Mathematics Education.* Derdrecht/Boston/London: Kluwer Academic

Publishers.

Meerschaert, Mark M. (1999). Mathematical Modeling. London : Academic Press

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). Mathematical Modeling in the secondary School Curriculum, in Frank Swetz and J. S. Hartzler (Eds.). Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

Powell Bruce A. (1981). Mathematical modeling of elevator systems. In William E Boyce (Ed.), *Case Studies in Mathematical Modeling.* London : Pitman Publishing Inc..

Shima Shigeru (1997). The significance of an open-ended approach. In Jerry P. Becker & Shigeru Shimada (Eds.), *The Open-Ended Approach : A New Proposal for Teaching Mathematics.* Reston, VA : The National Council of Teachers of Mathematics.

A Study of Understanding Mathematical Modelling

Hwang, Hye Jeang (Chosun University)

Problem solving and mathematical applications have been increasingly emphasized in school mathematics over the past ten years. Recently it is recommended that mathematical applications and modeling situations be incorporated into the secondary school curriculum. Many researches on this approach have been conducted in Korea. But unfortunately two thirds of these researches have been studied by graduate students. Therefore, more professional researchers should be concerned with the study related to mathematical modelling activity. This study is planning to investigate and establish i) the concepts and meanings of mathematical model, mathematical modelling, and mathematical modelling process, ii) the properties of problem situations introduced and dealt with in mathematical modelling activity, and iii) relationship between mathematical modelling activity and problem solving activity, and so on. To accomplish this, this study is based on the analysis and comparison of 11 articles published in domestic journals and 22 domestic master papers.

* key words : mathematical model(수학적 모델), modelling(모델링), modelling process(모델링 과정), problem situation(모델링 문제), problem solving(문제해결)

논문접수 : 2007. 2. 20
심사완료 : 2007. 3. 6

<부록 1> 석사 논문의 수학적 모델링 과정

김수미 (1993)	권기석 (1997)	이석훈 (1997)	손기도 (1998)	이기열 (1999)	백은정 (2000)	성호금 (2000)	신동찬 (2000)	신은주 (2000)	최항철 (2000)	김희정 (2001)	용정택 (2001)	김성기 (2002)	조원주 (2002)	장은수 (2003)	권태희 (2004)	안기용 (2004)	우정민 (2004)	이희정 (2004)	장종근 (2004)	오영순 (2005)	오은주 (2005)
문제 이해 단계	문제 상황의 묘사	문제 이해의 단계	문제 이해 단계	문제 이해 단계	문제 상황의 묘사	문제 상황	문제 이해 단계	개념모델수립 단계	문제 상황	문제 상황의 묘사	문제의 이상화 단계	문제 상황의 묘사	실세계의현상	문제 이해 단계	문제 상황의 묘사	문제 이해	실세계 문제상황제시	문제 상황의 묘사	현실 상황	문제 분석	문제 상황
문제의 이상화 단계	문제의 이상화 및자료 수집	문제의 이상화 단계	문제의 이상화 단계	문제의 이상화 단계	실세계 모델 형성	문제의 이상화 및자료 수집	문제의 이상화 단계		문제의 이상화	실세계 모델 형성		문제의 이상화 및자료 수집	수학적 모델	문제의 이상화 단계	문제의 이상화 및자료 수집		문제의 구성	문제의 이상화 및자료 수집	실세계 모델		실세계 모델
수학적 모델형성단계	수학적 모델 형성	수학적 모델형성단계	수학적 모델형성단계	수학적 모델형성단계	수학적 모델 형성	수학적 모델 형성	수학적 모델 형성 단계	수학적 모델 수립 단계	수학적 모델 형성	수학적 모델 형성	수학화 단계	수학적 모델 형성		수학적 모델 형성 단계	수학적 모델 형성	수학적 모델로 구성	기하학적모델 내에서의 해	수학적 모델 형성	수학적 모델	문제 모델링	수학적 모델
수학적 추론 단계	수학적 추론	수학적 추론의 단계	수학적 추론 단계	수학적 추론 단계	수학적 추론	문제 해결	수학적 추론 단계	수학적 해결 단계	수학적 추론	문제 해결	수학적 결론	수학적 추론	수학적 결론	수학적 추론 단계	수학적 추론	모델의 해를 구한다		수학적 추론	수학적 추론	모델 분석 재해석 단계	수학적 추론
재해석 단계	재해석	재해석 단계	재해석 단계	재해석 단계	재해석	재해석	재해석 단계	수학적 해 반성 단계	재해석	재해석	재해석 수학의 유용성 확인	재해석	결론해석 및 예측	실제와 의비교	재해석	해의확인.현실상황연계	해의 재해석및 결론 도출	재해석	재해석	해의 해석	재해석
실제와 의비교			실제와 의비교	실제와 의비교			실제와 의비교						실세계의 적용							실제와 의비교	
													의사소통								

<부록 2> 석사 논문의 모델링에 관한 기대효과

기대 효과	김 수미 (93)	권 기석 (97)	이 석훈 (97)	손 기도 (98)	이 기열 (99)	백 은정 (00)	성 호금 (00)	신 동찬 (00)	신 은주 (00)	최 향철 (00)	김 희정 (01)	용 정택 (01)	김 성기 (02)	조 원주 (02)	장 은수 (03)	권 태희 (04)	안 기용 (04)	우 정민 (04)	이 희정 (04)	장 종근 (04)	오 영순 (05)	오 은주 (05)
수학의 개념과 원리 발견				✓																✓		
개념망 형성									✓													
수학의 재발명과 응용													✓									
학교수학과 실생활의 연계 가능성 및 응용성 인식	✓														✓	✓					✓	✓
실생활 문제 상황 탐구 및 해결을 통한 수학적 문제해결력 향상	✓									✓		✓	✓	✓	✓					✓		
수학 학업 성취 증진		✓	✓		✓	✓	✓											✓	✓			
수학적 사고력 및 응용력 신장			✓	✓		✓						✓			✓		✓	✓	✓	✓		
수학에 대한 흥미와 긍정적인 태도 형성		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓		✓
수학의 심미성과 유용성 인식						✓	✓	✓		✓	✓		✓		✓		✓	✓	✓		✓	