대한수학교육학회지 <학교수학> 제 9 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.9, No.1, 13-28. Mar. 2007

카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈[1)]

임 재 훈*

학생들이 분수 나눗셈을 이해하기 어려워하는 이유 중 하나는 분수 나눗셈의 구체화가 어렵고 불충분하기 때문이다. 측정 맥락과 분할 맥락의 구체화에 비해 곱과 인수 맥락에서의 구체화는 상대적으로 부족한 실정이다. 이 연구에서는 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 구체화하였다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 이루어져 있는 기존의 분수 나눗셈 구체화의 한계를 논의하고, 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1 또는 자연수로 만드는 방법과 넓이가 1인 직사각형을 이용하는 방법으로 분수 나눗셈을 제시하였다. 이와 같은 방법은 제수의 역수의 의미, 제수를 1로 만드는 것의 중요성, 기존 학습 내용과의 연결성, 다양한 접근 가능성 면에서 장점이 있다. 이와 같은 장점을 살려 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 것을 고려할 수 있다.

I. 서 론

분수 나눗셈은 학생들이 이해하기 가장 어려워하는 개념의 하나로 알려져 있다(Bitter, Hatfield, & Edwards, 1989). 분수 나눗셈 계산 규칙은 초등학교 수학의 모든 규칙 중에서 학생들에게 가장 신기하게 여겨지는 것 중 하나이다(Van de Walle, 1994). 우리나라 학생들도 분수 나눗셈을 그렇게 계산하는 이유를 모르거나 제수의 역수의 의미를 모르는 학생들이 적지 않은 것으로 알려져 있다(민인영, 2003; 박혜경, 2003; 송정화, 2005). 여러 연구들이 아동이 분수 나눗셈 알고리즘을 이해하기 어려워하는 이유를 형식화의 기초가 되는 구체적인 맥락의 부족에서 찾고 있다(백선수, 2004; Thompson, 1979; Sharp, 2002). 분수 나눗셈이 많은 아동에게 어려운 이유는 부분적으로는 간단한 구체적인 모델이 없다는 데에 기인한다 (Musser & Burger, 1988).

분수 나눗셈 알고리즘을 모델을 사용하여 구체화하기 전에 분수 나눗셈의 유형을 고려할 필요가 있다. Sinicrope, Mick & Kolb(2002)는 분수 나눗셈을 포함제, 등분제, 단위 비율 결정, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역의 다섯 가지로 나누었다. Ma(1999)의 논의에는 분수 나눗셈이 측정 모델, 분할 모델, 곱과 인수 모델로 나누어져 있다. 분수 나눗셈의 각 유형별로 분수 나눗셈 알고리즘을 구체화하는 것을 생각할 수 있다. 이러한 구체화는 분수 나눗셈에 관한 교수학적 분석의 일환으로서 의미를 지닌다(우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈, 2006).

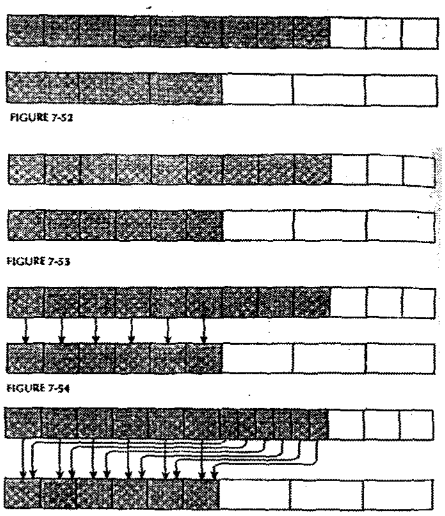
현재 이와 같은 구체화는 주로 측정 모델과 분할 모델에 관해 되어 있다(박재우, 2004; 이용률, 2001; Behr & Post, 1992; Siebert, 2002;

* 경인교육대학교(jhyim@ginue.ac.kr)
1) 이 연구는 2006년 경인교육대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음

Sinicrope et al., 2002; Van de Walle, 1994). 예를 들어, Van de Walle(1994)는 측정(포함제) 맥락에서 $1\frac{1}{4} \div \frac{2}{3}$를 [그림 I-1]과 같이 구체화하였다(p. 271).

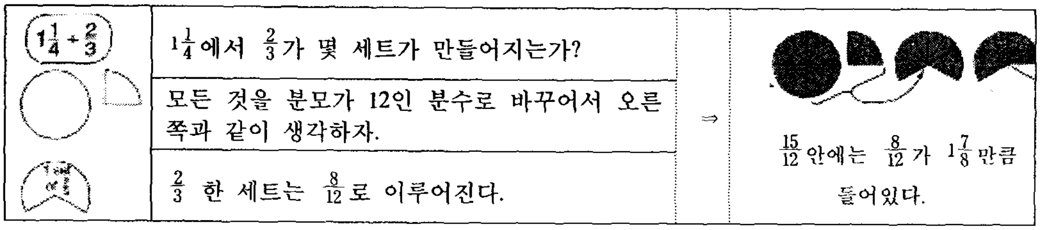
각각의 $\frac{1}{4}$조각을 3부분으로 나누어 $\frac{1}{12}$로 만들면 피제수 $1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{12}$이 15조각, 제수 $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{12}$이 8조각이 되어, 피제수 안에는 $1\frac{7}{8}$번 만큼의 제수가 들어간다.

분할 맥락에서의 구체화는 제수가 자연수인 경우보다 분수인 경우가 어렵다. Behr & Post(1992)는 제수가 분수인 경우를 $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$을 예로 분할의 맥락에서 [그림 I-2]와 같이 구체화하였다(p. 232). 제수의 단위 분수에게 피제수의 단위 분수를 똑같이 배분하기 위해서, 두 분수가 공통분모를 갖도록 바꾸어 준다. $\frac{9}{12}$를 $\frac{1}{12}$의 9부분으로, $\frac{3}{6}$을 $\frac{1}{6}$의 3부분으로 본다. 그리고 제수 $\frac{1}{6}$의 3부분을 $\frac{1}{12}$의 6부분으로 표현한다. 피제수 $\frac{1}{12}$ 9개를 제수 $\frac{1}{12}$ 6개에 각각 하나씩 '분배하면' $\frac{1}{12}$개씩 분배된다. 남은 피제수 $\frac{1}{12}$ 3개를 각각 2분할해서 $\frac{1}{12}$의 $\frac{1}{2}$ 6개로 만든다. 그런 다음 이 $\frac{1}{12}$의 $\frac{1}{2}$ 6개를 제수 $\frac{1}{12}$ 6개에 하나씩 분배한다. 결과적으로 피제수 $\frac{9}{12}$는 $\frac{1}{12}$이 된 6개의 제수 각각에 $\frac{1}{12}$ 1개, $\frac{1}{12}$의 $\frac{1}{2}$ 1개씩 동등하게 분배된다. 그래서 $\frac{9}{12} \div \frac{3}{6}$은 $1\frac{1}{2}$이 된다.



[그림 I-2] 분할 맥락의 구체화
(Behr & Post, 1992)

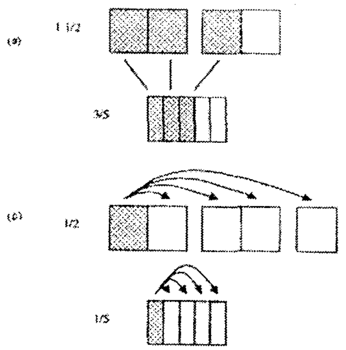
등분제의 본질을 단위량에 해당하는 양을 구하는 것으로 보면 단위비율결정 맥락이 된다.[2] Siebert(2002)는 단위비율결정 맥락에서 $1\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$을 [그림 I-3]과 같이 설명하였다(p. 253). 먼저



[그림 I-1] 포함제 맥락의 구체화((Van de Walle, 1994)

2) '사탕 10개를 2명에게 똑같이 나누어 줄 때 1인당 몇 개씩 주어야 하는가'에서 자연수로 등분하는 것에 주목하는 대신 '1인당' 얼마씩 주어야 하는가에 주목한다.

$\frac{1}{5}$에 해당하는 양 $\frac{1}{2}$을 구한다. 그 다음 1에 해당하는 양을 구한다. 결국 3으로 나누고 5를 곱한 것이므로 $\frac{5}{3}$를 곱한 것과 같다.



[그림 I-3] 단위비율결정 맥락의 구체화 (Siebert, 2002)

이와 같은 측정 맥락과 분할 맥락의 구체화에 비해, 곱과 인수 맥락에서의 구체화는 상대적으로 부족하다. 우리나라 교과서에서도 5-나 단계에서 등분제 맥락에서 (분수)÷(자연수)를 다루고 6-나 단계에서 포함제 맥락에서 (분수)÷(분수)를 다루며, 카테시안 곱의 역 맥락은 분수 나눗셈 알고리즘 적용 문제로 간단히 취급된다(교육인적자원부, 2002b, 2002c).

이에 이 논문에서는 먼저 곱과 인수 유형인 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 상세히 구체화하고자 한다. 그리고 이 구체화에 기초하여 카테시안 곱의 역 맥락이 지니고 있는 가치를 교사 전문성 및 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 교재 구성과 관련하여 논의하고자 한다.

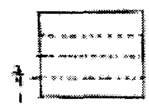
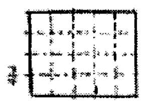
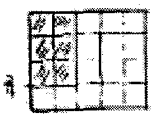
II. 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘의 구체화

카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 구체화한 시도를 Sinicrope et al.(2002)과 이용률(2001)의 논의에서 찾아 볼 수 있다. Sinicrope et al.(2002)은 카테시안 곱의 역 상황에서 분수 나눗셈을 넓이가 $\frac{6}{20}$ m^2이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}$ m인 직사각형에서 가로의 길이를 구하는 상황을 가지고 [그림 II-1]과 같이 구체화하였다.

우선 넓이가 1인 정사각형에서 세로를 4등분하고 가로를 5등분하여 한 칸의 넓이가 $\frac{1}{20}$이 되게 한다(단계 1, 2). 그 다음 넓이 $\frac{6}{20}$을 칠하여 가로의 길이를 구할 수 있다(단계 3). 이 과정은 분자는 분자끼리 분모는 분모끼리 나누는 알고리즘으로 형식화될 수 있다.

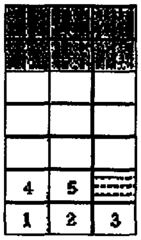
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

이용률(2001)은 제수와 피제수의 분모와 분

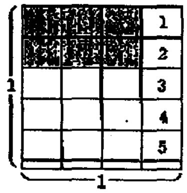
단계 1	 단위 정사각형에서 $\frac{3}{4}$을 세로 길이로 잡고 시작한다.	$\frac{6}{20} \div \frac{3}{4}$	단계 2	 넓이가 $\frac{1}{20}$들로 되어 있고 $20 \div 4 = 5$이므로, 가로 길이는 $\frac{1}{5}$ 들로 되어 있다.	$\frac{6 \div 3}{20 \div 4}$ $\frac{6 \div 3}{5}$	단계 3	 넓이 $\frac{1}{20}$ 사각형 6개는 3개씩 세로 두 줄이 된다.	$\frac{2}{5}$

[그림 II-1] Sinicrope et al.(2002: 160)의 구체화

자가 각각 배수 관계가 아닌 보다 일반적인 경우를 다음과 같이 구체화하였다(p. 163).



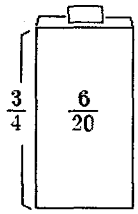
[그림 II-2-a] 넓이 1인 직사각형으로 변형



[그림 II-2-b] 정사각형으로 변형

[그림 II-2-a]는 넓이가 $\frac{2}{7}$이고 가로의 길이가 $\frac{3}{4}$인 직사각형을 3(가로)×2(세로)개로 분할하고, 넓이가 1인 직사각형으로 만들기 위해 아래에 5줄을 붙인 것이다. [그림 II-2-b]는 [그림 II-2-a]의 직사각형을 재배열하여 정사각형으로 만든 것이다. 5개의 단위사각형으로 세로 한 줄을 더 만들어 붙이고 남은 한 개를 4등분하여 하단에 일렬로 배열하면 정사각형이 된다(가로의 길이와 넓이가 모두 1이므로 세로의 길이도 1이 된다). 이 정사각형의 세로는 단위사각형을 4등분한 사각형의 세로의 21배이므로, 단위사각형의 세로의 길이는 $\frac{4}{21}$이다. 처음에 구하고자 한 직사각형의 세로는 단위사각형 두 개의 세로이므로, 그 길이는 $\frac{8}{21}$이 된다. 이것은 $\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$와 같다.

이상과 같은 카테시안 곱의 역 모델을 이용한 선행연구의 구체화는 다음과 같은 한계가 있다. 첫째로, Sinicrope et al.(2002)의 구체화는 제수와 피제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계에 있는 특수한 경우에 국한되어 있다. [그림 II-1]에서 넓이가 $\frac{2}{7}m^2$였다면 제시된 3단계의 과정을 거쳐 가로의 길이를 구하기 어렵다. 또한 '넓이가 $\frac{6}{20}m^2$이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}m$인 직사각형에서 가로의 길이를 구하라'는 문제를 보고 처음에 자연스럽게 그릴 수 있는 그림은 [그림 II-1]의 단계 1의 단위정사각형이 아니라 [그림 II-3]과 같이 문제 상황 자체를 표현한 그림이다. 그러나 Sinicrope et al.(2002)의 구체화는 넓이가 $\frac{6}{20}m^2$이고 세로의 길이가 $\frac{3}{4}m$인 직사각형에서 가로의 길이를 구하라는 문제를 보고 자연스럽게 그릴 수 있는 그림에서 출발하여 전개되고 있지 않다.



[그림 II-3] 문제 상황을 표현한 그림

이용률(2001)의 구체화는 Sinicrope et al.(2002) 보다 일반적인 분수의 나눗셈을 대상으로 하고 있지만, 넓이가 1인 직사각형을 만들어 그것을 정사각형으로 변형하는 이유나 효과가 논의되어 있지 않다. 결과적으로 $\frac{2}{7} \div \frac{3}{4}$가 $\frac{8}{21}$이 되어 $\frac{2}{7} \times \frac{4}{3}$와 같아졌지만, 과정 속에서 제수의 역수가 등장하여 곱해지는 이유가 잘 드러나지 않는다. 이에 다음에서는 Sinicrope et al.(2002)의 방법의 일반적인 분수 나눗셈에의 적용 가능성과 이용률(2001)의 방법에 붙박혀 있는 아이디어를 재음미하고, [그림 II-3]과 같은 그림에서 출발하여 카테시안 곱의 역 모델을 사용한 분수 나눗셈의 구체화를 시도하고자 한다.

1. Sinicrope et al.(2002)과 이용률(2001)의 구체화 재음미

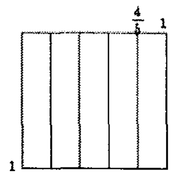
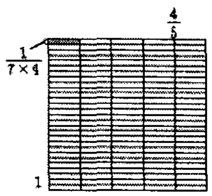
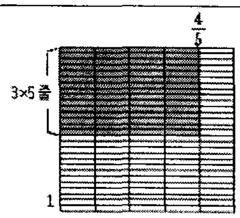
Sinicrope et al.(2002)이 제수와 피제수의 분

모와 분자가 각각 배수 관계일 때에 행한 구체화는 제수와 피제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계가 아닐 때에도 변형하여 적용할 수 있다. '넓이가 $\frac{3}{7}$ m^2이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}$ m일 때, 세로의 길이는 얼마인가?'라는 문제를 예로 하여 살펴보자.

$\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$는 피제수와 제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계가 아니므로 배수관계가 되도록 만들어 준다. 피제수의 분모와 분자에 제수의 분모와 분자 5와 4를 곱하면 $\frac{3\times5\times4}{7\times5\times4}\div\frac{4}{5}$가 된다. [그림 II-4]의 (a)에서 가로와 세로의 길이가 1인 정사각형을 생각하고 가로를 5등분한다. (b)처럼 이 정사각형을 (7×5×4)조각이 되도록 분할한다. 가로를 5등분하였고 모두 (7×5×4)조각이 되어야 하므로, 세로는 (7×5×4)÷5=7×4 등분되고 따라서 세로 1칸의 길이는 $\frac{1}{7\times4}$이다. (c)에서 (3×5×4)개의 조각을 가로로 네 개씩 칠하여 표시하면 (3×5)줄에 딱 맞게 된다. 따라서 구하고자 하는 세로의 길이는 $\frac{3\times5}{7\times4}$이다. 위의 과정을 식으로 형식화하면 다음과 같다.

$$\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}=\frac{3\times5\times4}{7\times5\times4}\div\frac{4}{5}=\frac{(3\times5\times4)\div4}{(7\times5\times4)\div5}=\frac{3\times5}{7\times4}$$

Sinicrope et al.(2002)이 제시한 방법을 일반적인 분수 나눗셈에 적용하는 것은 2단계로 나누어진다. 1단계로 제수와 피제수의 분모와 분자가 각각 배수 관계일 때를 해결한다. 2단계로 제수와 피제수의 분자 분모가 각각 배수 관계가 아닐 때에는 1단계로 환원한다. 이와 같이 2단계로 나누어진다는 것은 넓이가 $\frac{6}{20}$ 가로의 길이가 $\frac{3}{4}$과 같은 문제를 거치지 않은 채 넓이가 $\frac{3}{7}$ 가로의 길이가 $\frac{4}{5}$와 같은 문제를 다루기 어렵다는 것을 뜻한다. 또한 2단계의 절차가 필요한 만큼, 아동들에게 바로 $\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$에 해당하는 카테시안 곱의 역 맥락 문제를 주었

<table>
<tr><td>(a)</td><td>
</td><td>$\frac{3}{7}\div\frac{4}{5}$
가로 세로가 1인 정사각형에 가로를 표시한다.</td></tr>
<tr><td>(b)</td><td>
</td><td>$\frac{3\times5\times4}{7\times5\times4}\div\frac{4}{5}$
$\frac{(3\times5\times4)\div4}{7\times4}$
모두 (7×5×4)개의 부분이 되어야 하므로 세로를 (7×4)등분한다. 따라서 세로 한 칸의 높이는 $\frac{1}{7\times4}$이다.</td></tr>
<tr><td>(c)</td><td>
</td><td>$\frac{3\times5}{7\times4}$
(3×5×4) 등분된 조각을 가로로 4개씩 칠하면 세로로 (3×5)줄이 된다.</td></tr>
</table>

[그림 II-4] Sinicrope et al.(2002)의 방법의 일반화

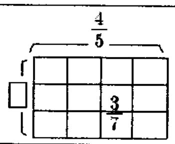
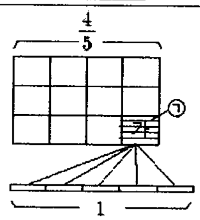
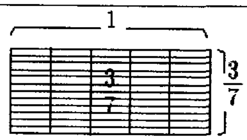
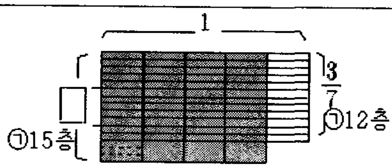
을 때, 아동들이 위와 같은 풀이 방법을 생각해내기 어렵다는 것을 의미하기도 한다.

한편, 이용률(2001)의 방법은 넓이를 보존하면서 가로의 길이를 1로 만들려는 아이디어와 관련 있어 보인다. [그림 II-5]의 (a)와 같이 직사각형을 가로로 4등분, 세로로 3등분한다. (b)에서 작은 한 칸 '가'의 넓이를 5등분하여 생긴 ㉠ 5개를 가로로 이어 붙이면 가로의 길이가 1인 가는 직사각형이 한 줄 생긴다. 이런 방법으로 나머지 11칸도 분할하여 (c)처럼 아래로 붙여 가면 가로가 1인 직사각형이 만들어진다.

이 때, 세로에는 ㉠ 12(=4×3)줄이 쌓이게 된다. 이는 원래 직사각형을 넓이의 변화 없이 가로로 늘린 것과 같다. 가로의 길이가 1이고 넓이가 $\frac{3}{7}$이므로 세로의 길이는 $\frac{3}{7}$이 된다.

곧 ㉠ 12(4×3)개의 높이는 $\frac{3}{7}$이다. 따라서 ㉠ 1개의 높이는 $\frac{3}{7} \div 12 = \frac{1}{28}$이 된다. 구하고자 하는 직사각형의 세로는 ㉠ 15(5×3)개와 같으므로 $\frac{1}{28} \times 15 = \frac{15}{28}$가 된다.

위에서 작은 한 층 ㉠의 높이를 구하기 위해 $\frac{3}{7} \div 12$와 같이 분수÷자연수의 계산을 했다. 그런데, 이용률(2001)의 방법과 같이 가로의 길이를 1로 만들기 전에 넓이를 1로 늘리면 분수÷자연수의 계산을 하지 않고 문제를 해결할 수 있다. 우선, 세로를 4줄 늘려 넓이를 1로 만든다. 위에서 했던 방식으로 각각의 칸을 5등분한 ㉠크기의 조각들을 가로로 5개씩 붙여 세로 방향으로 늘려주면 [그림 II-6]의 (a)와 같이 28(=4×7)층 쌓인다. 이 때 전체 가로의 길이는 1이고 넓이도 1이므로, 세로의 길이도 1이다. 세로 1에 ㉠이 28개 있으므로 ㉠의 높이는 $\frac{1}{28}$이다. 구하고자 하는 직사각형의 세로는 ㉠

(a)		$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$
(b)		'가'를 5등분한 ㉠ 5개를 가로로 이어 붙여 가로의 길이가 1인 긴 직사각형을 생성한다.
(c)		나머지 11개의 직사각형도 (b)와 같은 방법으로 붙여 가면, 세로에는 ㉠ 12(4×3)층이 쌓이고 넓이는 $\frac{3}{7}$ 이므로 세로는 $\frac{3}{7}$이 된다.
(d)		㉠의 높이는 $\frac{3}{7} \div 12 = \frac{3}{7} \div (4\times3) = \frac{1}{7\times4}$ 구하고자 하는 직사각형의 세로는 ㉠ 15(5×3)개와 같으므로 $\frac{1}{7\times4} \times (5\times3)$이다.

[그림 II-5] 넓이를 보존하면서 가로의 길이를 1로 변형하는 방법

이 15개 놓이므로 $\frac{15}{28}$ 이다.[3]

두 방법은 ㉠의 높이를 구하는 방법에서 차이가 난다. 앞의 것은 ㉠의 높이를 구하기 위해 분수÷자연수 계산이 필요하지만, 뒤의 것은 부분-전체의 분수 개념만 있으면 문제를 해결할 수 있다. 분수÷자연수 계산을 할 줄 몰라도 일반적인 분수 나눗셈 문제를 해결할 수 있다는 것이 넓이를 1로 만들고 그것을 정사각형으로 변형하는 이용률(2001)의 방법이 지닌 효과의 하나이다.

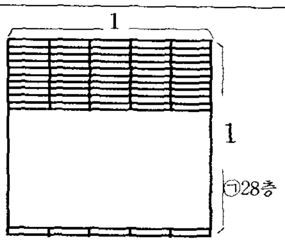
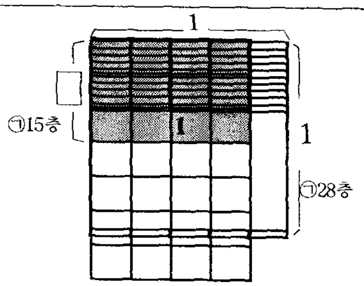
그러나 이 방법 역시 그 변형 과정이 복잡하고 독창성을 요하여 아동들이 이해하거나 $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$와 같은 카테시안 곱의 역 맥락 문제를 주었을 때 생각해내기 어려운 방법이다. 그러므로 Sinicrope et al.(2002)와 이용률(2001)의 방법보다 아동들에게 받아들여지기 쉬운 구체화를 고안할 필요가 있다. 이러한 구체화는 분수 나눗셈 알고리즘을 모르는 아동들도 [그림 II-3]과 같은 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 해결하고자할 때 착안할 수 있는 수준의 것이 될 것이다.

2. 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 변형하는 방법

세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 변형하는 방법은 크게 두 가지가 있다.

가. 가로의 길이를 1로 만드는 방법(줄이고 늘이는 방법)

이용률(2001)의 방법은 넓이를 그대로 두면서 가로의 길이를 1로 만들려는 아이디어와 관

(a)		㉠을 5개를 가로로 이어서 가로가 1인 긴 직사각형을 만든다. 이 과정을 반복하면, 세로에는 ㉠이 28(4×7)층 쌓인다. 세로 1이 ㉠ 28개의 높이와 같으므로 ㉠의 높이는 $\frac{1}{28}$, 즉 $\frac{1}{4\times7}$ 이다.
(b)		구하고자 하는 직사각형의 세로의 길이는 $\frac{15}{28}$, 즉 $\frac{1}{4\times7}\times(5\times3)=\frac{5\times3}{4\times7}$ 이다.

[그림 II-6] 넓이를 1로 만들고 가로의 길이를 1로 변형하는 방법

3) $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$ 의 경우 세로에는 $a\times d$줄이 생성되므로, 한 줄의 높이는 $\frac{1}{a\times d}$이다. 구하고자 하는 직사각형의 세로에는 $\frac{1}{a\times d}$가 $(c\times b)$줄 들어가므로 세로의 길이는 $\frac{1}{a\times d}\times(c\times b)$가 되어 $\frac{c\times b}{a\times d}$이다. 이를 형식화하면 다음과 같다: $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{1}{a\times d}\times(c\times b) = \frac{c\times b}{a\times d}$

련이 있었다. 이보다는 세로의 길이를 그대로 두고 가로의 길이를 1로 만드는 방법이 상대적으로 쉽다. 직사각형의 가로의 길이가 1이라면 세로의 길이는 넓이와 같게 된다. '넓이가 $\frac{3}{7}$ m^2이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}$ m일 때, 세로의 길이는 얼마인가?'라는 문제에서 가로의 길이를 1 m로 만들었을 때의 넓이를 구하여 세로의 길이를 알아낼 수 있다.

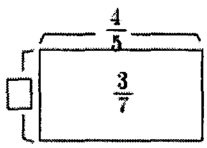
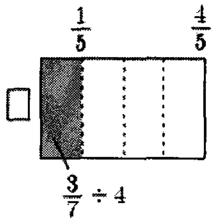
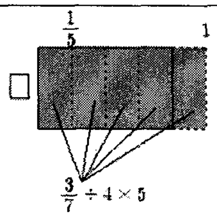
[그림 II-7]에서 가로의 길이를 1로 만들기 위해, (b)에서처럼 가로의 길이를 4로 나누어 가로의 길이가 $\frac{1}{5}$씩 등분되게 한다. 이때 가로 $\frac{1}{5}$에 해당하는 넓이는 $\frac{3}{7} \div 4 = \frac{3}{28}$이다.

$\frac{1}{5}$이 된 가로를 1이 되게 하려면 세로 5줄이 필요하므로, (c)처럼 5줄을 그려 가로가 $\frac{1}{5} \times 5 = 1$이 되게 한다. 이 때 넓이는 $\frac{3}{7} \div 4 \times 5 = \frac{15}{28}$이 된다. 가로의 길이가 1일 때 세로의 길이는 넓이와 같으므로 세로의 길이도 $\frac{3}{7} \div 4 \times 5$가 된다. 여기에서 제수의 역수 $\frac{5}{4}$는 가로의 길이를 줄이고($\div 4$) 늘이는($\times 5$) 연산자의 역할을 한다. 이 과정을 형식화하면 다음과 같다.

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \left(\frac{b}{a} \div d \times c\right) \div \left(\frac{d}{c} \div d \times c\right) = \left(\frac{b}{a} \div d \times c\right) \div 1$$
$$= \frac{b}{a} \div d \times c$$

나. 가로의 길이를 자연수로 만드는 방법

[그림 II-8]과 같이 가로의 길이를 자연수로 늘일 수 있다. 주어진 직사각형을 가로로 5개 붙이면 가로의 길이가 5가 되고, 넓이는 제수의 분모 개수만큼 늘어 $\frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7}$가 된다. 다시 가로의 길이를 1로 만들기 위해 4로 나누면, 넓이는 $\frac{3}{7} \times 5 \div 4 = \frac{15}{28}$가 된다. 세로의 길이

(a)		$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$
(b)		가로가 $\frac{1}{5}$일 때, 넓이는 $\frac{3}{7} \div 4 = \frac{3}{28}$
(c)		가로가 1일 때, 넓이는 $\frac{3}{7} \div 4 \times 5 = \frac{15}{28}$

[그림 II-7] 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1로 만드는 방법

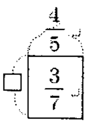
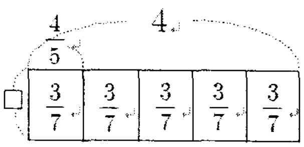
도 마찬가지로 $\frac{15}{28}$이다.

이 방법은 궁극적으로는 마지막에 4로 나누면서 가로의 길이가 1이 되므로, 앞의 방법과 마찬가지로 가로의 길이를 1로 만드는 방법으로 분류할 수 있다. 앞의 방법은 줄이고 늘여서 가로의 길이를 1로 만든다면 이 방법은 늘이고 줄여서 가로의 길이를 1로 만든다. 그러나 여기서는 마지막에 4로 나누기 전에 4로 만드는 과정을 중시하여 가로의 길이를 자연수로 만드는 방법이라고 명명하였다. 가로의 길이를 자연수로 만들면, (분수)÷(분수)는 (분수)÷(자연수)로 환원된다. 우리나라 교과서에서는 5학년에서 (분수)÷(자연수)를 다루고 6학년에서 (분수)÷(분수)를 다룬다(교육인적자원부, 2002b; 교육인적자원부, 2002c). 5학년 수학을 학습한 아동이 이 문제를 풀 때, 가로의 길이를 1로 만들어야겠다는 생각을 하지 못해도, 5학년에서 학습한 분수÷자연수를 기억하고 '나누는 수를 자연수로 만들 수 있으면 좋을텐데' 하는 생각을 하여 이 두 번째 방법을 착안할 수 있다. 결과적으로 두 방법 모두 가로의 길이를 1로 만드는 방법이지만, 이러한 점을 고려하여 두 번째 방법을 첫 번째 방법과 구분하였다. 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1 또는 자연수로 만드는 방법은 Sinicrope et al.(2002)과 이용률(2001)의 방법보다 간단하다는 점에서, 아동들이 제수가 분수인 나눗셈 계산 방법을 배우지 않은 상태에서 '넓이가 $\frac{3}{7}$ m^2이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}$ m일 때, 세로의 길이는 얼마인가?'라는 문제를 해결할 때 취할 개연성이 상대적으로 더 높은 방법이라고 할 수 있다.

3. 넓이가 1인 직사각형을 이용하는 방법

넓이가 1일 때 세로의 길이는 가로의 길이의 역수가 된다는 사실을 이용하여 다음과 같이 해결할 수 있다. [그림 II-9]를 보자.

(b)에서 세로를 늘려서 직사각형의 넓이를 1로 늘려 그리면, 세로의 길이는 $\frac{5}{4}$가 된다. (c)에서와 같이 가로가 일정하므로 비례관계에 의하여 구하고자 하는 작은 직사각형의 세로의 길이는 큰 직사각형의 세로의 길이 $\frac{5}{4}$의 $\frac{3}{7}$이 된다. 따라서 세로의 길이는 $\frac{5}{4}\times\frac{3}{7}$이다. 여기에서 제수의 역수는 넓이가 1인 직사각형의 세로의 길이를 의미한다(임재훈 · 김수미 · 박교식, 2005). 이와 같은 방법은 사전 지식으로 어떤 수에 그 수의 역수를 취하여 곱하면 1이 된다는 개념과 비례식에 대한 지식을 요구한다.

(a)		$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$
(b)		가로는 4이고, 넓이는 $\frac{3}{7}\times 5=\frac{15}{7}$가 된다. 가로가 1일 때, 넓이는 $\frac{3}{7}\times 5\div 4=\frac{15}{28}$이고 세로의 길이도 $\frac{3}{7}\times 5\div 4=\frac{15}{28}$이다.

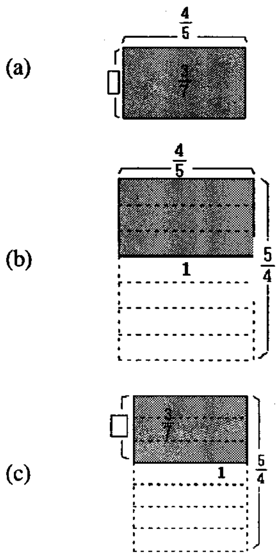
[그림 II-8] 가로의 길이를 자연수로 만드는 방법

III. 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 구체화의 의의: 교사 전문성과 교재 구성

이 장에서는 앞에서 논의한 카테시안 곱의 역의 맥락에서 분수 나눗셈의 구체화가 지닌 의의를 교사의 전문성 및 교재 구성과 관련하여 논의하고자 한다.

먼저 교사의 전문성과 관련하여, 전문성 있는 초등교사라면 초등학생에게 실제로 가르치는 것보다 초등 교과 지식에 대하여 더 깊이 이해하고 있어야 한다. 분수 나눗셈에 구분되는 유형이 있다면, 각각의 유형에서 분수 나눗셈 알고리즘이 어떻게 구체화되며 어떻게 유도될 수 있는지 이해하고 있어야 한다. 이와 같은 교과 지식에 대한 전문적이고 총체적인 이해가 교사에게 필요하다. 교사가 포함제 맥락에서는 분수 나눗셈 알고리즘을 이해하고 있지만 등분제 맥락이나 곱의 역 맥락에서는 이해하지 못하고 있다면, 분수 나눗셈이라는 초등 수학의 교과 지식에 대해 총체적이고 깊은 이해를 하고 있다고 할 수 없다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘이 어떻게 구체화되는지 모르고 있는 교사가 그 맥락에서 아동들이 분수 나눗셈 알고리즘을 구성할 학습 기회를 제공할 가능성은 매우 희박하다. 교사의 교과 지식에 대한 이해 부족은 학생들에게 충실하고 풍부한 교육적 경험을 제공하는데 장애가 된다(Ma, 1999).

이를테면, 초등학교 6학년 수업 시간에 분수 나눗셈 알고리즘을 가르칠 때에는 시간 제약 등 현실적인 여건 때문에 모든 유형에서 분수 나눗셈 알고리즘을 유도하게 하기는 어려울 것이다. 각 유형이 분수 나눗셈의 특정 측면을 나타내는 병렬적인 것들이라면, 또 시간 제약으로 인해 이 중 특정 유형에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입할 수밖에 없다면, 어떤 유형에서 도입할 것인가는 다소간 선택의 문제가 된다. 현실적인 제약 때문에 초등 6학년 수업 시간에 교과서를 따라 포함제 맥락에서 제수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈 알고리즘을 유도한



(a) $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

(b) 넓이를 1로 만든 직사각형의 세로 길이는 $\frac{5}{4}$가 된다.

(c) 넓이가 1일 때 세로 길이가 $\frac{5}{4}$이므로 넓이가 $\frac{3}{7}$일 때 세로의 길이는 $\frac{5}{4} \times \frac{3}{7}$이 된다.

[그림 II-9] 넓이가 1인 직사각형을 이용하는 방법

다고 하자. 초등교사가 포함제 맥락에서만 분수 나눗셈 알고리즘을 유도할 수 있으면 충분한가? 교과 지식에 대해 깊이 이해하고 있는 전문성을 갖춘 초등교사라면, 분수 나눗셈의 서로 다른 유형에 따라 어떻게 분수 나눗셈 알고리즘이 유도될 수 있는지 알고, 학생에게 실제로 가르칠 수 있는 상황이 왔을 때 그 학생의 사전 지식과 관련하여 적절한 방법을 취사 선택하여 가르칠 수 있어야 한다. 정규 교육과정 내용의 심화 중심의 초등 수학 영재교육이 활성화되고 있는 상황에서 더욱 그러한 능력이 교사에게 요구된다고 하겠다. 위에 제시한 구체화 방법 모두가 보통 수준의 초등 6학년 수준의 학생에게 이해 가능한 것은 아니라고 하더라도, 초등교사는 그 내용에 대해서 잘 알고 있어야 한다. 이와 같은 교과 지식에 대한 전문적 이해는 예비 교사 교육에서도 중시되어야 한다(김민경 2003; 서관석, 전경순, 2000)

우리나라 초등학교 6학년 2학기 교과서의 분수 나눗셈 단원에서 카테시안 곱의 역 맥락은 도입부나 중간 부분에는 나오지 않고, 단원 정리 단계에 넓이가 $5\frac{1}{4}\,m^2$인 직사각형 모양의 꽃밭의 가로가 $2\frac{2}{5}\,m$일 때 세로의 길이를 구하는 문제(교육인적자원부, 2002c: 21)가 하나 나온다. 이 논문에서 논의한 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘이 어떻게 다양하게 구체화될 수 있는지 알지 못하는 교사는 이 문제를 단순히 직사각형의 넓이 공식과 분수 나눗셈 알고리즘의 기계적인 적용 연습 문제로 삼을 가능성이 높다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘이 어떻게 구체화되는지 잘 알고 있는 교사라면 이 문제를 분수 나눗셈 알고리즘을 재구성해보는 기회, 기존의 학습 내용과 관련하여 분수 나눗셈 알고리즘을 재음미해 보는 기회로 삼도록 학습 지도를 할 수 있을 것이다.

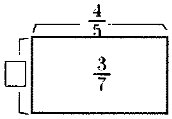
교재 구성과 관련하여, 현재 우리나라 6학년 교과서에서는 대체로 포함제 맥락에서 제수가 분수인 나눗셈의 알고리즘을 도입하고 있다. 이에 대하여 임재훈·김수미·박교식(2005)은 분수 나눗셈을 다양한 맥락에서 풍부한 의미로 전달할 것을 권고하였다. 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈의 알고리즘을 이해하게 하는 것은 분수 나눗셈의 풍부한 의미를 전달하는 한 방편이 될 것이다. 또한 그들은 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 보다 명확하게 드러내는데 유리한 단위비율 결정 맥락에서 분수 나눗셈을 도입하는 방안을 검토할 필요가 있음을 제안하였다. 앞 장의 논의는 카테시안 곱의 역 맥락이, 단위비율결정 맥락과 유사하게, 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 잘 드러낼 수 있음을 보여준다. 그러므로 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈을 도입하는 것 역시 긍정적으로 검토할 필요가 있다고 하겠다.

카테시안 곱 모델, 곧 직사각형의 넓이 모델은 분수 곱셈 알고리즘을 설명하는데 사용된다(Flores, 2002). 우리나라 교과서에서도 "가로가 $2\frac{2}{5}\,m$이고 세로가 $1\frac{3}{5}\,m$인 돗자리의 넓이는 얼마인가"라는 문제로 분수 곱셈에 카테시안 곱 모델을 사용하고 있다(교육인적자원부, 2002a). 분수의 곱셈에서 카테시안 곱 모델이 사용되었으므로, 그 역연산인 나눗셈에서도 카테시안 곱 모델을 사용하는 것을 연계성 측면에서 고려할 수 있다.

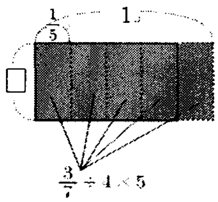
그러나 Sinicrope et al.(2002)과 이용률(2001)의 구체화는 보통의 초등 6학년 학생이 이해하거나 나눗셈 알고리즘을 기계적으로 적용하지 않고 카테시안 곱의 역 맥락의 문제를 풀 때 착안하기 쉽지 않은 것이다. 이를테면, 넓이를 보존하면서 가로의 길이를 1로 만드는 방법은

직사각형을 여러 조각으로 나눈 후 재조합하는 과정의 복잡성 때문에 보통 학생들이 이해하기에 어려울 것이다. 그러므로 이와 같은 선행연구의 구체화를 사용하여 6학년 학생들에게 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하기는 어렵다. 그러나 본 논문에서 제시한 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1 또는 자연수로 만드는 방법이나 넓이를 1로 만드는 방법은 6학년 학생들이 이해할 수 있는 상대적으로 쉬운 방법이다. 이 방법을 사용하여 다음과 같이 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 교재를 구성할 수 있다([그림 III-1]).

♣ 넓이가 $\frac{3}{7}m^2$이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}m$인 직사각형의 세로의 길이를 구하시오.



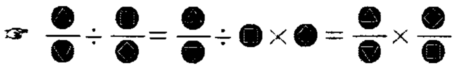
철수의 풀이



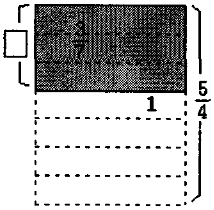
세로의 길이 $\square = \frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \div 4 \times 5$$

$$= \frac{15}{28}\ (m)$$



민수의 풀이



세로의 길이 $\square = \frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

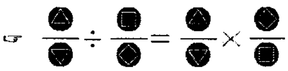
넓이가 1일 때 세로의 길이는 $\frac{5}{4}$이다.

세로의 길이와 넓이가 비례하므로

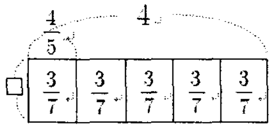
$$\frac{3}{7} : \square = 1 : \frac{5}{4}$$

따라서 $\square \times 1 = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4}$

$$= \frac{15}{28}\ (m)$$

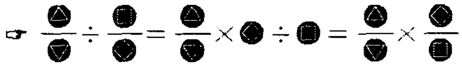


영희의 풀이



세로의 길이 $\square = \frac{3}{7} \div \frac{4}{5}$

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times 5 \div 4$$
$$= \frac{15}{28}\ (m)$$

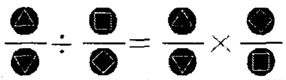


♣ 세 학생의 풀이를 비교해 보자. 또 분수 나눗셈을 어떻게 계산하면 될지 생각해보자.

[분수 나눗셈]

넓이가 $\frac{3}{7}\,m^2$이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}\,m$인 직사각형의 세로의 길이는 $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5}\,(m)$이다.

이때, 누구의 방법을 따라 계산하여도 $\frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{4}\ (m)$이다.



[그림 III-1] 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘 도입

철수의 방법은 제수를 1로 만드는 것이 분수 나눗셈 풀이의 핵심이라는 것을 음미할 수 있는 기회가 된다. 제수를 1로 만드는 것이 분수 나눗셈 풀이법의 핵심이라는 것은 포함제 맥락에서는 경험하기 어려우며, 단위비율결정 맥락에서 잘 드러나는 것이다(임재훈 · 김수미 · 박교식, 2005). 그런데 이것이 철수의 방법에서처럼 카테시안 곱의 역의 맥락에서도 단위비율결정 맥락만큼이나 잘 드러난다. 영희의 방법에서는 (분수)÷(분수)가 (분수)÷(자연수)로 환원된다. 5학년에서 (분수)÷(자연수)를 학습한 영희는 6학년에서 (분수)÷(분수) 문제를 보고 '이전에 배운 내용을 이용할 수는 없을까'를 생각하여 가로의 길이를 자연수로 만든다. 가로의 길이를 자연수로 만드는 이 방법은 아동들로 하여금 제수가 분수인 나눗셈을 5학년에서 학습한 제수가 자연수인 분수의 나눗셈과 관련하여 생각할 수 있는 기회를 제공한다. 아동들은 영희와 같이 유추적 사고를 통해 5학년의 학습 내용을 토대로 제수가 분수인 나눗셈의 계산법을 스스로 발견할 수도 있을 것이다. 민수의 방법도 6학년 2학기의 학습 내용인 제수가 분수인 나눗셈을 6학년 1학기 내용인 비와 비례와 연결하여 생각할 기회를 제공한다.

철수의 방법과 영희의 방법은 공통적으로 '줄이고 늘이는 연산자'라는 제수의 역수의 의미를 잘 드러내고 있다. 연산자로서의 제수의 역수의 의미 역시 단위비율결정 맥락에서 잘 드러나는 것이다. 철수의 방법과 영희의 방법에는 가로의 길이를 $\frac{1}{4}$배 줄이고 5배 늘이거나, 5배 늘이고 $\frac{1}{4}$배로 줄이는 과정이 들어 있어, 연산자로서 제수의 역수의 의미를 학생들이 이해할 수 있는 기회를 제공한다. 곧, 카테시안 곱의 역의 맥락은 단위비율결정 맥락과 마찬가지로, 제수를 1로 만드는 것이 중요하다는 것이나 제수의 역수의 의미를 음미하는 기회를 학생들에게 제공할 수 있다. 카테시안 곱의 역 연산 맥락은 분수 나눗셈의 의미를 이해하기 쉽게 한다는 점, 제수의 역수의 의미를 음미하는 기회를 제공한다는 점, 이전에 학습한 내용과 폭넓게 연결되어 있다는 점, 다양한 방법으로 접근할 수 있는 점 등 여러 가지 장점을 지니고 있다. 그러므로 위와 같은 접근법을 음미하고 비교하는 가운데 제수가 분수인 나눗셈 알고리즘을 형식화하여 도입하는 것을 긍정적으로 고려할 수 있다고 하겠다.

IV. 결 어

학생들이 분수 나눗셈을 이해하기 어려워하는 이유 중 하나는 분수 나눗셈의 각 맥락에 따른 구체화가 쉽지 않고 불충분하다는 데에 있다. 이에 이 연구에서는 분수 나눗셈에 대한 카테시안 곱의 역 맥락에서의 구체화에 대해 논의하였다. 먼저 카테시안 곱의 역 맥락에서 이루어져 있는 기존의 구체화를 재음미하고, 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1 또는 자연수로 만드는 방법과 넓이가 1인 직사각형을 이용하는 방법을 제시하였다.

본 논문의 분석은 초등 교사 및 예비 교사들이 분수 나눗셈이라는 초등 수학의 교과 지식에 대한 이해를 깊게 하는 데에 도움이 될 것이다. 또한 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1이나 자연수로 만드는 방법, 넓이를 1로 만든 직사각형을 이용하는 방법은 선행연구에서 이루어진 구체화에 비해서 복잡하지 않다. 뿐만 아니라 포함제를 중심으로 하는 교과서 설명에 비해, 제수의 역수의 의미나 제수를 1로 만드는 것의 중요성, 기존 학습 내용과의 연결성, 다양한 접근 가능성 면에서 장점이 있다. 이와 같은 장점을 살려 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입하는 것을 대안으로 고려할 수 있다.

본 연구의 후속 연구로 카테시안 곱 모델의 실제적인 교육적 가능성과 효과를 알아볼 수 있다. 여기에는 아동들이 '넓이가 $\frac{3}{7}m^2$이고 가로의 길이가 $\frac{4}{5}m$일 때, 세로의 길이는 얼마인가?'와 같은 문제를 어떻게 그림으로 해결하는지 그리고 아동들이 스스로 찾아낸 방법으로부터 나름의 분수 나눗셈 알고리즘을 어떻게 구성하는지 알아보는 것이 포함될 것이다.

참고문헌

교육인적자원부(2002a). **수학 5-가**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002b). **수학 5-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2002c). **수학 6-나**. 서울: 대한교과서주식회사.

김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. **학교수학** 5(2), 223-240.

민인영(2003). **분수의 나눗셈에서 나타나는 오류 분석**. 부산교육대학교 대학원 석사학위논문.

박재우(2004). **측정 활동을 통한 분수 계산 알고리즘의 이해에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

박혜경(2003). **분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

백선수(2004). **비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

서관석 · 전경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. **수학교육학연구, 10**(1), 103-114.

송정화(2005). **분수의 곱셈, 나눗셈 문제 해결 과정에서 나타난 장애 요인 분석**. 전주교육대학교 대학원 석사학위논문.

우정호 · 정영옥 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 나귀수 · 임재훈(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

이용률(2001). **지도내용의 핵심과제 99**. 서울: 경문사.

임재훈 · 김수미 · 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2). 103-121.

Behr, M. & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Bitter, G. G., Hatfield, M. M., & Edwards, N. T. (1989). Mathematics methods for the elementary and middle school. MA: Allyn and Bacon

Flores, A. (2002). Profound understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 237-246). Reston, VA: NCTM.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary School Mathematics.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Musser, G. L. & Burger, W. F. (1988). *Mathematics for elementary teachers.* NY: Macmillian Publishing Company.

Sharp, J. (2002). Children's constructions of knowledge for fraction division after solving realistic problems. *The Journal of Educational Research, 95*(6). 333-347.

Siebert, I. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Sinicrope, R. Mick, H. W., & Kolb, J. R. (2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 153-161). (2002 Yearbook). VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, C. (1979). Teaching division of fractions with understanding. *Arithmetic teacher, 26*(5). 24-27.

Van de Walle, J. A. (1994). *Elementary and middle school mathematics : Teaching developmentally* (3rd ed.). NY: Addison Wesley Longman, Inc.

Division of Fractions in the Contexts of the Inverse of a Cartesian Product

Yim, Jae Hoon (Gyeongin National University of Education)

Division of fractions can be categorized as measurement division, partitive or sharing division, the inverse of multiplication, and the inverse of Cartesian product. Division algorithm for fractions has been interpreted with manipulative aids or models mainly in the contexts of measurement division and partitive division. On the contrary, there are few interpretations for the context of the inverse of a Cartesian product.

In this paper the significance and the limits of existing interpretations of division of fractions in the context of the inverse of a Cartesian product were discussed. And some new easier interpretations of division algorithm in the context of a Cartesian product are developed. The problem to determine the length of a rectangle where the area and the width of it are known can be solved by various approaches: making the width of a rectangle be equal to one, making the width of a rectangle be equal to some natural number, making the area of a rectangle be equal to 1.

These approaches may help students to understand the meaning of division of fractions and the meaning of the inverse of the divisor. These approaches make the inverse of a Cartesian product have many merits as an introductory context of division algorithm for fractions.

* key words: Division of fractions(분수 나눗셈), algorithm(알고리즘), the inverse of Cartesian product(카테시안 곱의 역), area of a rectangle(직사각형의 넓이)

논문접수 : 2007. 2. 20
심사완료 : 2007. 3. 7