

## 다차원 2계 중성자 수송방정식의 방향근사를 위한 영역상수법

노태완†

홍익대학교 기초과학부 응용수학과

(2006년 11월 30일 접수, 2007년 1월 20일 채택)

## Piecewise-Constant Method for Angular Approximation for the Second-Order Multidimensional Neutron Transport Equations

Taewan Noh†

Applied Mathematics, Hongik University, Seoul, Korea

(Received 30 November 2006, Accepted 20 January 2007)

### 요 약

특정한 방향에 대해 방향중성자속(angular neutron flux)을 정의하는 방향차분 방정식(discrete-ordinates or  $S_N$  equation)과 달리 방향변수를 구분된 방향영역에 대하여 적분한 값을 사용하고, 해당 방향영역 내에서 방향중성자속이 일정하다고 가정하는 영역상수법(piecewise-constant method)을 개발하였다. 기존 방향차분법과 본 연구에서 개발된 영역상수법을 1계 수송방정식(1'st-order Boltzmann transport equation)과 2계 우성 방정식(even-parity equation)에 적용하여 방향차분 방정식인  $S_N$  방정식과 유사 방향차분방정식( $S_N$ -like equation)인  $PC_N$  방정식을 유도하였다. 우성 방정식에 영역상수법을 적용한 경우 기존 방향차분법의 단점인 광침투 현상(ray effect)이 현저히 감소함을 확인하였는데 이는 우성 방정식의 혼합 미분항의 기여도가 작아지기 때문인 것으로 판단된다. 이러한 이론은 우성 방정식에서 혼합 미분항이 제거된 단순우성 방정식(simplified even-parity equation)을 사용하는 경우 광침투 현상이 완전 제거 또는 극단적으로 감소되었던 이전의 결과를 이론적으로 설명한다.

**주요어** : 중성자 수송, 방향차분법, 영역상수법, 광침투 현상, 중성자속, 방향중성자속

**Abstract** — The piecewise constant angular approximation is developed to replace the conventional angular quadrature sets in the solution of the second-order, multi-dimensional  $S_N$  neutron transport equations. The newly generated quadrature sets by this method substantially mitigate ray effects and can be used in the same manner as the conventional quadrature sets are used. The discrete-ordinates and the piecewise-constant approximations are applied to both the first-order Boltzmann and the second-order form of neutron transport equations in treating angular variables. The result is that the mitigation of ray effects is only achieved by the piecewise-constant method, in which new angular quadratures are generated by integrating angle variables over the specified region. In other sense, the newly generated angular quadratures turn out to decrease the contribution of mixed-derivative terms in the even-parity equation that is one of the second-order neutron transport equation. This result can be interpreted as the entire elimination or substantial mitigation of ray effect are possible in the simplified even-parity equation which has no mixed-derivative terms.

**Key words** : Neutron transport, Discrete-ordinates method, Piecewise-constant method, Ray effects, Scalar flux, Angular flux

†To whom correspondence should be addressed.  
Applied Mathematics, Hongik University, Seoul, Korea  
Tel: 02-320-1628  
E-mail: twnoh@hongik.ac.kr

### 1. 서 론

원자로 내의 중성자 거동에 대한 정확한 계산은 원자로 설계 및 운영, 안전성 확보에 필수적이다. 중성자 거동은 위치, 방향, 중성자 에너지 및 시간을 변수로 하는 중성자 수송방정식(neutron transport equation)<sup>[1]</sup>으로 기술된다. 1계 편미분방정식인 Boltzmann 수송방정식에 대한 수치해법은 이미 잘 알려져 있지만 우성 방정식(even-parity equation) 또는 기성 방정식(odd-parity equation)과 같은 2계 편미분방정식으로 나타나는 수송방정식에 대해서는 2계 도함수의 근본적인 계산 비효율성 때문에 그 해법에 대한 연구가 적극적으로 시도되지 않았었다. 하지만, 최근 전산기 병렬처리방식(parallel processing)<sup>[2],[4]</sup>이 발전함에 따라, 기존의 1계 수송방정식에 대한 해법이 순차적 직렬계산에 기초하고 있어 영역분리법(domain decomposition)<sup>[4]</sup> 등과 같은 특수한 기법을 사용하지 않고는 병렬계산이 부적합한 반면에 2계 수송방정식은 확산방정식(diffusion equation)의 경우와 같이 최종계산이 행렬계산으로 귀결되어 병렬계산에 유리한 점에 착안하여 그 수치해법에 관한 연구가 활발해지고 있으며, 우성 방정식의 근사로 2계 미분 항 중 혼잡미분항이 제거되어 계산 효율성이 증대된 단순우성 방정식(simplified even-parity equation)이 제안되기도 하였다<sup>[2],[7],[11]</sup>. 수송방정식의 수치 해법에서 방향변수를 처리하는 방법에는 방향변수를 구형조화함수(spherical harmonics)로 근사하는 P<sub>n</sub>법과 방향변수를 차분화(discretization) 하는 방향차분법(discrete-ordinates or S<sub>N</sub> method)이 있다. 방향차분법은 계산된 중성자속(scalar neutron flux)이 비물리적인 값을 갖게 되는 광침투 현상(ray effects)<sup>[9],[10]</sup>이 나타나는 단점은 있으나 이를 기반으로 하는 전산코드에서 방향 근사도 변경이 매우 용이하고 다차원 문제에 대한 계산 효율성이 높아 널리 사용되고 있다. 방향차분법을 1계 및 2계 수송방정식에 적용하는 경우 광침투 현상이 동일하게 나타나게 되는데, 본 논문에서는 수송방정식에 대한 방향변수 처리법으로 영역상수법(piecewise-constant method)을 제안하며 이를 2계 수송방정식의 하나인 우성 방정식에 적용하여 광침투 현상이 현저히 감소됨을 보였다. 개발된 영역상수법은 기존 2계 수송방정식인 우성 및 기성 방정식은 물론 최근에 새로 제안된 2계 수송방정식인 자체수반형 방향중성자속 방정식(SAAF : self-adjoint angular flux equation)<sup>[8]</sup>에 모두 적용이 가능하다.

### 2. 중성자 수송방정식에 대한 방향근사

#### 2-1. 중성자 수송방정식

시간 비종속 1계 수송방정식(1'st-order transport

equation)은 등방성 산란 및 공급(isotropic scattering and source)을 가정하면

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) \quad (1)$$

로 나타난다. 여기서  $\vec{r}$ 과  $\hat{\Omega}$ 는 위치 및 방향을 나타내는 벡터변수이고,  $\psi$ 는 방향중성자속(angular flux), S는 방향에 무관한 중성자 공급원이다.  $\sigma$ 와  $\sigma_s$ 는 거시 총단면적(macroscopic total cross section) 및 거시 산란단면적(macroscopic scattering cross section)이다. 여기서 중성자속  $\phi$ 는 전체 방향영역의 크기를  $\Omega$ 라 할 때

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (2)$$

로 정의한다. 식(1)의 1계 수송방정식은 1계 미분항에 대한 수치 계산의 편리성 때문에 중성자 수송 분야에서 오래 동안 사용되어 왔다. 하지만, 광침투 현상이 나타나고 해의 양수성이 확보되지 못하는 등 계산상의 단점이 학계에 지속적으로 보고됨에 따라 2계 편미분 방정식 형태를 갖는 수송방정식에 대한 연구가 활발히 진행되었다. 본 연구에서는 광침투 현상을 감소시키는 영역상수법을 개발하는 것이 목적이며 이는 2계 편미분 방정식으로 나타나는 모든 수송방정식에 적용이 가능하므로 여기서는 편의상 우성 방정식에 대해서만 소개하기로 한다.

우성 방정식은 식(1)로부터 쉽게 유도할 수 있다. 먼저 식(1)을  $-\hat{\Omega}$  방향에 대하여 적용하여

$$-\hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\psi(\vec{r}, -\hat{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) \quad (3)$$

를 얻고, 식(1)과 식(3)을 가감한 후 2로 나누어

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \beta(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) \quad (4)$$

$$\hat{\Omega} \cdot \nabla \chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\beta(\vec{r}, \hat{\Omega}) = 0 \quad (5)$$

를 얻는다. 여기서  $\chi$ 와  $\beta$ 는 각각 우성 방향중성자속(even-parity angular neutron flux)과 기성 방향중성자속(odd-parity angular neutron flux)으로

$$\chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega})] \quad (6)$$

$$\beta(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \frac{1}{2}[\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) - \psi(\vec{r}, -\hat{\Omega})] \quad (7)$$

와 같이 정의한다. 식(4)와 식(5)에서  $\beta$ 를 소거하면 우성 수송방정식

$$-\hat{\Omega} \cdot \nabla \frac{\hat{\Omega}}{\sigma(\vec{r})} \cdot \nabla \chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) + \sigma(\vec{r})\chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \sigma_s(\vec{r})\phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) \quad (8)$$

을 얻는다. 식(2)로 정의된 중성자속은 식(8)에서 구해

지는 우성 방향중성자속  $\chi(\vec{r}, \hat{\Omega})$  에 의하여

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} \chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (9)$$

로 구한다. 식(8)의 우성 수송방정식은 위치변수에 대하여 2계 편미분방정식이지만, 식(6)에 의한 우성 방향중성자속의 성질  $\chi(\vec{r}, \hat{\Omega}) = \chi(\vec{r}, -\hat{\Omega})$  로 인하여 전체 방향변수의 영역은 1계 수송방정식의 1/2로 감소한다<sup>[7]</sup>.

**2-2. 방향차분법(discrete-ordinates or  $S_N$  method)**

1계 수송방정식에 대한 방향차분법을 여기에서는 식(1)의 양변에 Dirac delta 함수

$$\delta(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}_m) = \begin{cases} \infty, & \Omega = \hat{\Omega}_m \\ 0, & \Omega \neq \hat{\Omega}_m \end{cases}$$

을 곱하여 전체 방향영역으로 적분하는 것으로 설명하겠다. 즉,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}_m) \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \\ & + \int_{\Omega} \delta(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}_m) \sigma(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \\ & = \int_{\Omega} \delta(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}_m) \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\hat{\Omega} \\ & + \int_{\Omega} \delta(\hat{\Omega} - \hat{\Omega}_m) S(\vec{r}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (10)$$

에 대하여  $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_m$  일 때의 방향중성자속을

$$\psi_m(\vec{r}) = \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}_m) \quad (11)$$

으로 나타내고, 전체방향항을

$$\int_{\Omega} d\hat{\Omega} = \sum_{m=1}^M W_m = 1 \quad (12)$$

로 규격화(normalization) 하면 식(10)은 1계 수송방정식의 방향차분 방정식( $S_N$  equation)

$$\hat{\Omega}_m \cdot \nabla \psi_m(\vec{r}) + \sigma(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (13)$$

이 된다. 여기서, Dirac delta 함수의 성질  $\int_{\Omega} \delta(t-a) dt = 1$ ,  $\int_{\Omega} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$ 를 이용하였다. 방향차분법에서는 식(2)의 중성자속이 수치적분

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{m=1}^M W_m \psi_m(\vec{r}) \quad (14)$$

로 대체된다. 식(13) 및 식(14)를 이용하는  $S_N$  법은  $P_N$

법에 비하여 계산 효율성이 증대되고, 동일한 전산코드 내에서 단순히 방향계수를 바꿈으로 방향근사 정도를 쉽게 변화시킬 수 있으며 다차원 문제에 대해 탁월한 우월성을 보이지만, 방향차분에서 비롯되는 광점두 현상이 나타나는 것이 단점으로 지적된다.

**2-3. 영역상수법(piecewise-constant method)**

방향차분법에서 특정한 방향에 대한 방향중성자속을 정의한 것과 달리 영역상수법에서는 전체 방향을 몇 개의 영역으로 나누어 각각의 영역에 대하여 방향중성자속이 일정하다고 가정하고, 수송방정식을 해당 방향영역에 대하여 적분하여 방향계수(angular quadrature)를 결정한다. 여기서  $\hat{\Omega}$ 가 속하는 n번째 영역의 크기  $\Omega_n$ 은

$$W_n = \int_{\Omega_n} d\hat{\Omega} \quad (15)$$

이고, 전체 방향영역을

$$\int_{\Omega} d\hat{\Omega} = \sum_{n=1}^N W_n = 1 \quad (16)$$

로 규격화 한다. 이제 식(1)을 방향영역  $\Omega_n$ 에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \hat{\Omega} \cdot \nabla \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} + \int_{\Omega_n} \sigma(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \\ & = \int_{\Omega_n} \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d\hat{\Omega} + \int_{\Omega_n} S(\vec{r}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (17)$$

이다. 여기서,  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}_n$  일 때 방향중성자속  $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega})$  를 방향영역  $\Omega_n$ 에서의 평균 방향중성자속

$$\psi_n(\vec{r}) = \frac{1}{W_n} \int_{\Omega_n} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} \quad (18)$$

로 근사하면 [즉,  $\hat{\Omega} \in \hat{\Omega}_n$  일 때,  $\psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) \approx \psi_n(\vec{r})$ ] 식(17)은 방향차분 방정식과 형태가 유사한

$$\hat{\Omega}_n \cdot \nabla \psi_n(\vec{r}) + \sigma(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (19)$$

이 된다. 식(19)에서  $\hat{\Omega}_n$  은

$$\hat{\Omega}_n = \frac{1}{W_n} \int_{\Omega_n} \hat{\Omega} d\hat{\Omega} \quad (20)$$

로 계산하는데  $S_N$  방정식에서 나타나는 특정 방향  $\hat{\Omega}_m$  과는 달리 방향벡터를 방향영역  $\Omega_n$ 에 대하여 적분한 값이다. 여기에서는 식(19)를  $PC_N$  방정식으로 부르겠다. 영역상수법을 사용하는 경우 식(2)의 중성자속은 식(18)에 의해

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\Omega} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \psi(\vec{r}, \hat{\Omega}) d\hat{\Omega} = \sum_{n=1}^N W_n \psi_n(\vec{r}) \quad (21)$$

로 계산할 수 있다.

2-4. 1계 수송방정식에 대한 방향근사

1계 수송방정식에 대한 식(13)의  $S_N$  근사의 2차원 형태는 방향단위벡터  $\hat{\Omega}_m$ 의 성분을  $(\mu_m, \eta_m)$ 이라 할 때 (즉,  $\hat{\Omega}_m \cdot \hat{i} = \mu_m, \hat{\Omega}_m \cdot \hat{j} = \eta_m$ )

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\partial \psi_m}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial \psi_m}{\partial y} + \sigma(x,y) \psi_m(x,y) \\ = \sigma_s(x,y) \phi(x,y) + S(x,y), \quad m=1, 2, \dots, M \quad (22) \end{aligned}$$

이다. 여기서  $\mu_m$ 과  $\eta_m$ 은 Fig. 1과 같이 각  $\theta$  및 각  $\omega$ 와

$$\mu_m = \cos\theta, \quad \eta_m = \sqrt{1-\mu_m^2} \cos\omega \quad (23)$$

의 관계를 갖는다. 여기서, 3차원 전체 방향영역은  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

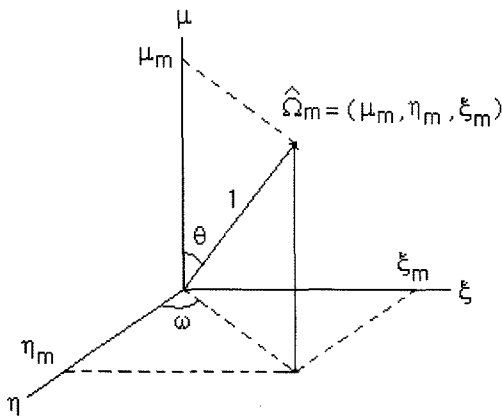


Fig. 1. Direction coordinate.

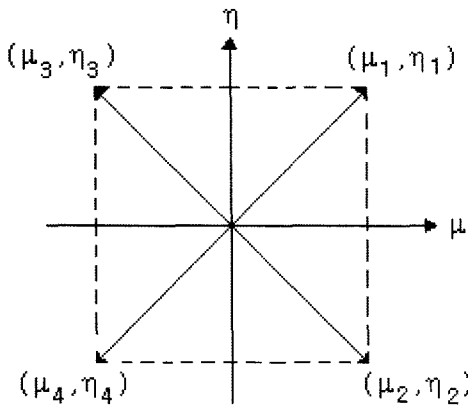


Fig. 2. Angular quadrature for 1st-order equation.

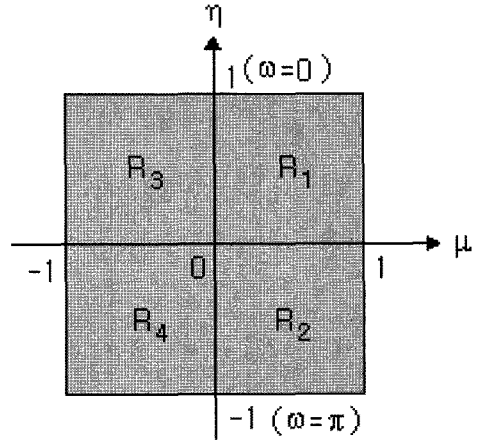


Fig. 3. PC<sub>2</sub> angular quadrature for 1st-order equation.

$0 \leq \omega \leq 2\pi$ 로 나타나지만 2차원 전체 방향영역은  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \omega \leq \pi$  즉,  $-1 \leq \mu \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$ 로 나타남에 유의해야 한다.

$S_2$  근사의 경우 Fig. 2와 같이  $(\mu_m, \eta_m), m=1, 2, 3, 4$ 의 네 방향이 사용되며 Gaussian 방향계수(Gaussian quadrature set)를 사용하는 경우  $\mu_i = \eta_i = 1/\sqrt{3}$  이고 4개의 사분면에 대칭으로 나머지가 존재한다.

반면에 식(19)로 나타나는 PC<sub>N</sub> 방정식의 2차원 형태는

$$\begin{aligned} \mu_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \eta_n \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \sigma(x,y) \psi_n(x,y) \\ = \sigma_s(x,y) \phi(x,y) + S(x,y), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (24) \end{aligned}$$

이다. 식(24)에 대한 PC<sub>2</sub> 근사에서는  $(\mu_n, \eta_n), n=1, 2, 3, 4$ 를 먼저 계산하여야 하는데 이를 위해 식(20)을 성분별로 사용한다. 방향영역을 Fig. 3과 같이 분리하는 경우 영역  $R_1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \mu d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \mu d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{2} \\ \eta_1 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \eta d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos\omega d\omega = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이고, 같은 방법으로 네 개의 사분면에 대칭인 나머지 방향계수를 구한다.

2-5. 우성 방정식에 대한 방향근사

식(8)의 우성 방정식을 2차원 형태로 쓰면

$$\begin{aligned} -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \mu \eta \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \\ - \eta^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \chi}{\partial y} + \sigma(x,y) \chi(x,y, \mu, \eta) \end{aligned}$$

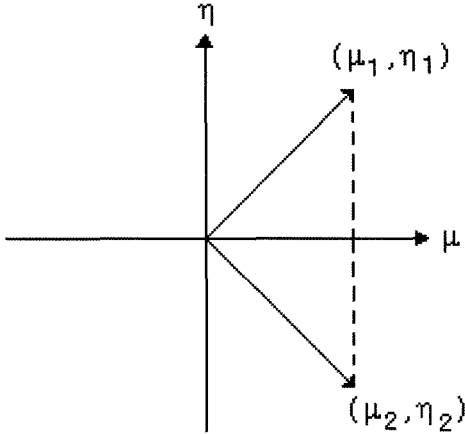


Fig. 4.  $S_2$  angular quadrature for even-parity equation.

$$= \sigma_s(x, y) \phi(x, y) + S(x, y), \quad (0 \leq \mu \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1) \quad (25)$$

이며, 여기서  $\chi(x, y, \mu, \eta)$ 는 우성 방향중성자속이다. 식 (25)에 대한 식(13)과 같은  $S_N$  방정식은

$$\begin{aligned} & -\mu_m^2 \frac{\partial}{\partial x \sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial x} - \mu_m \eta_m \left( \frac{\partial}{\partial x \sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y \sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial x} \right) \\ & - \eta_m^2 \frac{\partial}{\partial y \sigma} \frac{\partial \chi_m}{\partial y} + \sigma(x, y) \chi_m(x, y) \\ & = \sigma_s(x, y) \phi(x, y) + S(x, y), \\ & (m=1, 2, \dots, M/2) \end{aligned} \quad (26)$$

이다. 우성 방정식의 방향영역은 1계 수송방정식의 방향영역의 1/2이므로  $S_2$  근사의 경우 식(26)에 Fig. 4와 같은 방향계수  $\mu_1 = \eta_1 = 1/\sqrt{3}$ ,  $\mu_2 = 1/\sqrt{3}$ ,  $\eta_2 = -1/\sqrt{3}$ 을 사용한다. 여기서, 식(26) 좌변의 첫째, 둘째, 셋째 항의 방향계수  $\mu_m^2$ ,  $\mu_m \eta_m$ ,  $\eta_m^2$ 의 값이 모두 1/3이 됨에 주목한다.

영역상수법을 우성 수송방정식에 적용하기 위하여 식 (25)에 식(19)와 같은  $PC_N$  근사를 하면

$$\begin{aligned} & -\mu_n^2 \frac{\partial}{\partial x \sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial x} - \mu_n \eta_n \left( \frac{\partial}{\partial x \sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y \sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial x} \right) \\ & - \eta_n^2 \frac{\partial}{\partial y \sigma} \frac{\partial \chi_n}{\partial y} + \sigma(\vec{r}) \chi_n(\vec{r}) \\ & = \sigma_s(\vec{r}) \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}), \quad (n=1, 2, \dots, N/2) \end{aligned} \quad (27)$$

을 얻는다. 여기서는 편의상 방향계수  $\mu_n^2$ ,  $\mu_n \eta_n$ ,  $\eta_n^2$ (경계 격자 계산 시에는  $\mu_n$ ,  $\eta_n$ 의 값도 필요함.) 들을  $\mu_n$ ,  $\eta_n$ 의 곱의 형태로 표시 하였으나, 실제로 이들은 방향영역에 대하여 개별적으로 구해져야 한다. 예를 들면  $PC_2$ 의 경우 방향영역을 Fig. 5와 같이 구분하였을 때, 영역  $R_1$ 에

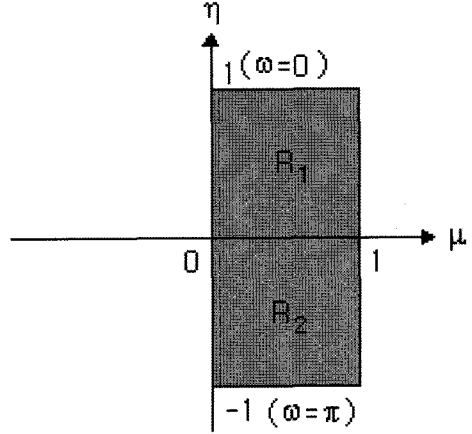


Fig. 5.  $PC_2$  angular quadrature for even-parity equation.

해당하는 방향계수는

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \mu^2 d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu^2 d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{3} \\ \eta_1^2 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \eta^2 d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-\mu^2) d\mu \int_0^{\pi/2} \cos^2 \omega d\omega = \frac{1}{3} \\ \mu_1 \eta_1 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \mu \eta d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega = \frac{2}{3\pi} \\ \mu_1 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \mu d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \mu d\mu \int_0^{\pi/2} d\omega = \frac{1}{2} \\ \eta_1 &= \frac{2}{\pi} \iint_{R_1} \eta d\mu d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-\mu^2} d\mu \int_0^{\pi/2} \cos \omega d\omega = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이 되고, 여기서  $\mu_1^2$ ,  $\eta_1^2$ ,  $\mu_1 \eta_1$ 은 각각  $\mu_1 \cdot \mu_1$ ,  $\eta_1 \cdot \eta_1$ ,  $\mu_1 \cdot \eta_1$ 이 아니며  $\mu_1$ ,  $\eta_1$ 과는 무관한 새로운 값을 갖는 계수이다. 영역 2에 대해서도 같은 방법으로  $\mu_2^2 = \eta_2^2 = 1/3$ ,  $\mu_2 \eta_2 = -2/3\pi$ ,  $\mu_2 = 1/2$ ,  $\eta_2 = -1/2$ 을 얻는다.

## 2-6. 단순우성 방정식

2차원 단순우성 방정식(simplified even-parity equation)은

$$\begin{aligned} & -\mu^2 \frac{\partial}{\partial x \sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \eta^2 \frac{\partial}{\partial y \sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \sigma(x, y) \zeta(x, y, \mu, \eta) \\ & = \sigma_s(x, y) \phi(x, y) + S(x, y), \quad (0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1) \end{aligned} \quad (28)$$

으로 식(25)의 우성 방정식에서 혼합 미분항이 제거된 형태를 갖는다. 식(28)에서  $z(x, y, \mu, \eta)$ 는 단순우성 방향중성자속(simplified even-parity angular flux)으로

$$\zeta(\vec{r}, \mu, \eta) = \frac{1}{2} [\chi(\vec{r}, \mu, \eta) + \chi(\vec{r}, \mu, -\eta)] \quad (29)$$

이고, 식(25)에서

$$\chi(\mu, \eta) = \chi(\mu, -\eta) \quad (30)$$

를 가정하여 구해지는 식이다. 식(28)을 식(25)와 비교하면 식(28)에서는 x와 y에 대한 혼합 미분항이 제거되었으며 방향영역은 우성 방정식의 1/2, 1계 수송방정식의 1/4로 감소한다. 1계 수송방정식과 우성 방정식은 수학적으로 동일한 식인 반면에 단순우성 방정식은 우성 방정식에 가정을 추가하여 얻어지는 식이므로 정확히 말해 수송방정식은 아니며 단순우성 방정식을 사용하는 경우 광침투 현상이 현저히 감소하거나 완전히 제거됨은 이미 알려져 있으므로<sup>[7]</sup> 본 연구의 계산 대상에는 포함시키지 않겠다.

### 3. 수치계산 결과

수송방정식에 대한 S<sub>2</sub> 및 PC<sub>2</sub> 근사가 광침투 현상에 미치는 영향을 비교하기 위하여 Fig. 6과 같은 국부 중성자원(localized neutron source)을 갖는 문제에 대하여 중성자속  $\phi$ 를 계산하였다. 위치변수의 차별화에서 나타

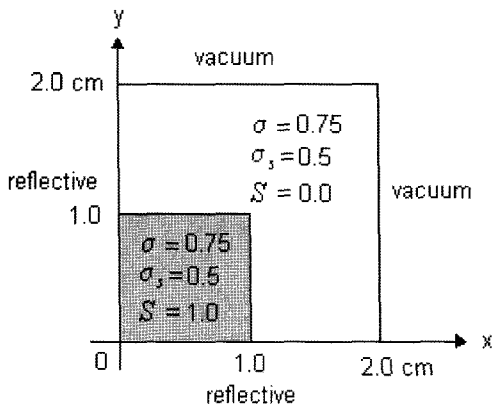


Fig. 6. Sample problem.

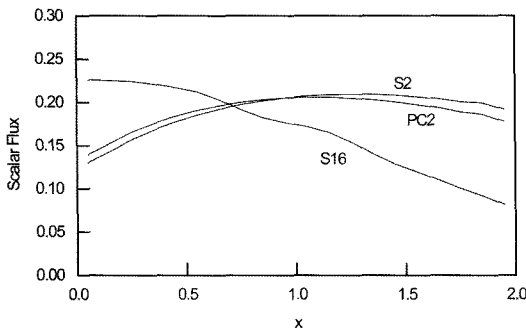


Fig. 7. Ray effects by S<sub>2</sub> and PC<sub>2</sub> for the 1'st-order transport equation.

나는 절단오차(spatial truncation error)를 충분히 줄이기 위하여 위치 격자(spatial cell)의 길이를 0.075 mean-free-path에 해당하는 0.1 cm의 등간격 격자를 사용하였다.

Fig. 6의 문제를 1계 수송방정식을 사용하여 S<sub>2</sub> 및 PC<sub>2</sub> 근사로 계산하였을 때의 중성자속이 Fig. 7에 나타나는데, 영역의 아래쪽 변(y=0)에서의 중성자속 변화를 x의 함수로 보여준다. S<sub>N</sub>과 PC<sub>N</sub>의 광침투 효과를 비교하기 위해 동일한 격자 구조에 대하여 광침투 현상이 비교적 적게 나타나는 것으로 알려진 S<sub>16</sub>의 계산 결과를 함께 도시하였다. 물리적으로 중성자속은 중성자원에 가까울수록 증가하여야 함에도 불구하고 S<sub>2</sub>의 경우 중성자속이 중성자원에 가까이 가면서 줄어드는 광침투 현상을 명백히 보여주며, PC<sub>2</sub>의 경우도 광침투 현상이 크게 줄어들지 않는다. 이는 방향계수가  $\mu$ 와  $\eta$ 의 1차식으로만 나타나는 1계 수송방정식의 경우는 PC<sub>N</sub> 근사의 결과도 S<sub>N</sub> 근사와 마찬가지로 특정 차별방향을 새로 설정한 것에 불과하기 때문이다.

2계 수송방정식의 하나인 우성 방정식에 대한 S<sub>2</sub> 및 PC<sub>2</sub> 근사를 같은 문제에 적용하여 그 결과를 Fig. 8에 도시하였다. 우성 방정식에 대한 S<sub>2</sub> 근사는 1계 수송방정식에 대한 S<sub>2</sub> 근사와 마찬가지로 심한 광침투 현상을 보이지만 PC<sub>2</sub> 근사의 경우는 광침투 현상이 급격히 감소하였음을 볼 수 있다. 이러한 결과는 방향차분법에서 특정 방향에 대해 Dirac delta 함수로 나타나는 방향성분을 영역상수법에서는 상대적으로 넓은 방향영역에 대하여 일정하게 분포시킴으로 일종의 ‘angularly smearing effect’를 부여하기 때문인 것으로 판단된다. 식(26)과 식(27)에서 혼합 미분항의 방향계수  $\mu\eta$ 의 절대값이 S<sub>2</sub> 근사의 경우는 1/3(=0.333), PC<sub>2</sub> 근사의 경우는 2/3 $\pi$ (=0.212)가 되어 PC<sub>2</sub>의 혼합 미분항의 기여도가 다른 항들에 비하여 작아진다. 이러한 점이 PC<sub>N</sub> 근사에 의한 광침투 현상 감소의 원인으로 보이며, 이는 혼합 미분항이 완전히 제거된 식(28)의 단순우성 방정식에 대해

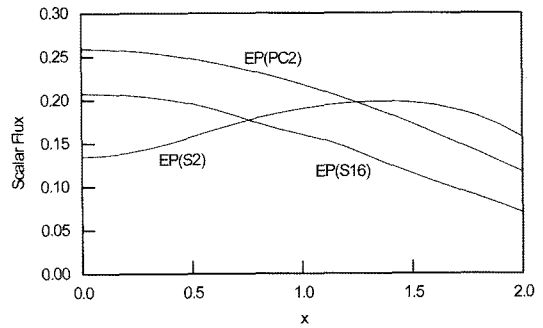


Fig. 8. Ray effects by S<sub>2</sub> and PC<sub>2</sub> for the 2'nd-order even-parity transport equation.

방향차분법을 적용하더라도 광침투 현상이 나타나지 않았던 기존의 연구결과<sup>[7]</sup>를 설명한다.

#### 4. 논 의

특정 방향에 대하여 중성자 방향속을 정의하는 방향차분법과 달리 영역상수법에서는 구분된 방향영역 내에서 중성자 방향속이 일정하다는 가정 아래  $S_N$  방정식과 형태가 유사한  $PC_N$  방정식을 유도하였고 이를 2계 수송방정식이 하나인 우성 수송방정식에 적용하여 광침투 현상을 줄일 수 있었다. 우성 방정식에 영역상수법을 적용했을 때 혼합 미분항의 기여도를 감소시키는 점이 광침투 감소효과의 원인으로 보이며, 이는 혼합 미분항이 완전히 제거된 단순우성 방정식에 대해서는 방향차분법을 적용하더라도 뚜렷한 광침투 현상이 나타나지 않았던 이전 연구 결과를 설명한다. 단순우성 방정식은 형태로 보면 단순  $P_N$  방정식(simplified  $P_N$  equation)과 사용되는 방향계수가 다른 점을 제외하고는 완전히 일치하지만 해는 서로 미묘한 차이를 보인다. 단순  $P_N$  방정식은 자체의 회전 독립성(rotational invariance)으로 인하여 광침투 현상을 보이지 않으나 단순우성 방정식이 광침투 현상을 완전히 제거하느냐에 대한 답을 얻기 위해서는 단순우성 방정식과 단순  $P_N$  방정식의 해의 미묘한 차이가 서로 다른 방향계수를 사용함에 기인하는 것인지, 아니면 단순우성 방정식이 회전 종속성을 갖는 것인지에 대한 연구가 진행되어야 할 것이다. 한편, 국부 중성자원 문제 등 광침투 현상이 크게 나타나는 문제에 대해서는 방향차분법 보다 영역상수법이 물리적으로 타당한 해를 제공하나 그렇지 않은 문제에 대해 영역상수법이 해의 정확도에 미치는 영향에 대한 심층적인 연구도 필요하다. 본 연구에서 개발된 영역상수법은 3차원 수송 문제에 대해서도 그대로 적용할 수 있다.

#### 감사의 글

본 연구는 2004년도 홍익대학교 교내연구비에 의하여 지원되었음.

#### 참고문헌

1. Lewis, E.E.; Miller, Jr. W.F. Computational Methods of Neutron Transport, John Wiley & Sons, 1993.
2. Azmy, Y.Y.; "Multidimensional Nodal Transport Methods for Multiple-Instruction Multiple-Data, Distributed Memory Machines", Trans. Am. Nucl. Soc., 1988, 56, 292.
3. Lawrence, R.D. "Progress in Nodal Methods for the Solution of the Neutron Diffusion and Transport Equations", Prog. Nucl. Energy, 1986, 17, 271.
4. Haghghat, A.; Azmy, Y.Y. "Parallelization of a Spherical  $S_N$  Algorithm Based on the Spatial Domain Decomposition", Proceedings of the Conference on Advances in Mathematics, Computation, and Reactor Physics, Pittsburgh, PA, 1991, April 28-May 1.
5. Miller, Jr. W.F.; Noh, T.W. "Finite-Differences versus Finite elements in Slab Geometry, Even-Parity Transport Theory", Transport Theory and Statistical Physics, 1993, 22.
6. Noh, T.W.; Miller, Jr. W.F.; Morel, J.E. "Improved Approximations Applied to the  $S_N$  Even-Parity Transport Equations", Trans. Am. Nucl. Soc., 1993, 69, 214.
7. Noh, T.W., Miller, Jr. W.F.; Morel, J.E. "The Even-Parity and Simplified Even-Parity Transport Equation in Two-Dimensional X-Y Geometry", Nucl. Sci. Eng., 1996, 123, 38.
8. Morel, J.E.; McGhee, J.M. "A Self-Adjoint Angular Flux Equation", Nucl. Sci. Eng., 1999, 132, 312-325.
9. Lathrop, K.D. "Ray Effects in Discrete Ordinates Equations", Nucl. Sci. Eng., 1968, 32, 357.
10. Lathrop, K.D. "Remedies for Ray effects", Nucl. Sci. Eng., 1971, 45, 255.
11. Larsen, E.W.; McGhee, J.M.; Morel, J.E. "The Simplified PN Equations as an Asymptotic Limit of the Transport Equation", Trans. Am. Nucl. Soc., 1992, 66, 231.