

일반 평판의 면내 진동 해석 In-Plane Vibration Analysis of General Plates

최명수 · 여동준 · 변정환 · 서정주 · 양정규

M. S. Choi, D. J. Yeo, J. H. Byun, J. J. Suh and J. K. Yang

Key Words : In-Plane Vibration(면내진동), Natural Frequency(고유진동수), Frequency Response(주파수응답), Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method(유한요소-전달강성계수법), Plate(평판), Dynamic Stiffness Coefficient(동강성계수)

Abstract : In order to analyze accurately the vibration of a structure by using the finite element method (FEM), we have to model a analytical structure as a numerical model with many degrees-of-freedom. However, in this case, the FEM needs much computation time and storage. The authors developed the finite element-transfer stiffness coefficient method (FE-TSCM) for overcoming the drawback of the FEM. In this paper, the authors apply the FE-TSCM to the in-plane vibration analysis of general plates with various shapes. Two numerical examples, a rectangular plate and a triangular plate, are used to compare the results of the FE-TSCM and the FEM. Through the numerical calculation, we confirm that the FE-TSCM can be applied to the in-plane free or forced vibration analysis of the general plates with various shapes and is effective to in-plane vibration analysis of general plates.

1. 서 론

컴퓨터의 발달과 더불어 진동해석 분야에서 가장 많이 이용되는 해석기법이 유한요소법(finite element method)¹⁾이다. 유한요소법을 이용하여 구조물의 진동을 정확하게 해석하기 위해서는 해석 대상 구조물을 많은 자유도를 가지도록 분할하여 모델링할 필요가 있다. 그러나 이 경우에 유한요소법은 계의 전체 자유도를 갖는 대규모 행렬을 일시에 처리해야하므로 수치계산 과정에서 계산 시간이나 계산에 사용될 컴퓨터의 기억용량이 급증하게 된다²⁾. 따라서 이러한 유한요소법의 취약점을 극복하기 위하여 전달행렬법(transfer matrix method)³⁾, 유한요소-전달행렬법(finite element-transfer matrix method)⁴⁾, 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)⁵⁾, 전달스펙트럴 유한요소법(transfer spectral finite element method)⁶⁾ 등이 제안된 바 있다.

저자들은 유한요소법의 장점은 그대로 유지하면서 그 취약점을 효과적으로 해결하기 위하여 유한

요소-전달강성계수법(finite element-transfer stiffness coefficient method)^{7~9)}을 제안한 바 있다. 이 방법은 유한요소법의 요소 모델링 과정은 그대로 이용하나 유한요소법처럼 일시에 전체 자유도를 갖는 행렬들을 직접 계산하지 않고, 소규모의 강성계수행렬을 전달하면서 계산하므로 유한요소법과 동일한 계산 정도를 유지하면서 계산시간과 계산에 사용될 기억용량을 크게 줄일 수 있다.

그러나 지금까지의 해석 대상이었던 평판은 모두 일정한 형상의 직사각형 평판에 국한되어 있었으므로, 전달과정에서 강성계수행렬의 크기도 항상 일정하였다^{7~9)}. 구조물의 설계 및 제작 시에 이용되는 실제 평판은 다양한 형상을 가지므로 이러한 일반적인 평판에 기존의 해석 알고리즘을 그대로 적용할 경우에는 전달과정에서 강성계수행렬의 크기가 수시로 변하게 되므로 기존의 계산 프로그램에서는 문제가 발생할 우려가 있다.

본 연구에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 다양한 형상을 갖는 일반적인 평판의 면내 자유진동 및 강제진동 해석을 수행하기 위한 알고리즘을 정식화한 후 전산 프로그램을 개발한다. 그리고 수치계산 모델에 대하여 유한요소-전달강성계수법으로 면내 자유진동 및 강제진동 해석을 수행한

접수일 : 2007년 10월 29일, 채택확정 : 2007년 11월 13일
최명수(책임저자) : 전남대학교 해양경찰학과
E-mail : engine@chonnam.ac.kr, Tel : 061-659-3183
여동준, 변정환, 서정주, 양정규 : 전남대학교 해양기술학부

후, 기존의 유한요소법의 계산 결과와의 비교를 통해 본 해석기법이 다양한 형상을 갖는 일반 평판의 면내 진동 해석에서도 효과적임을 확인한다.

2. 일반 평판의 면내 진동해석 알고리즘

Fig. 1에 나타낸 형상의 평판을 대상으로 유한요소-전달강성계수법으로 면내 강제진동 해석 알고리즘을 먼저 정식화한 후, 면내 자유진동 해석을 위한 알고리즘을 추가로 기술한다.

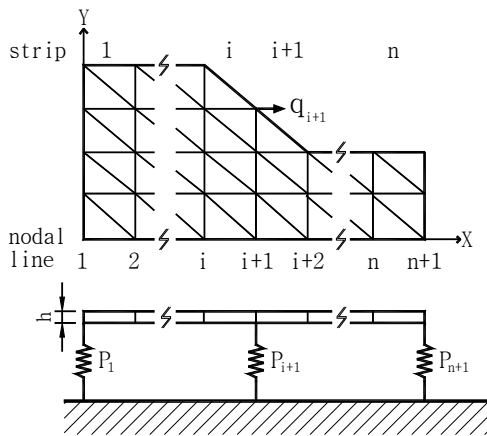


Fig. 1 Analytical model

2.1 모델링

평판은 X축과 Y축에 평행한 직선과 대각선에 의해 다수의 삼각평판요소로 분할된다. 본 연구에서 전달의 방향을 X축으로 정할 경우, Y축에 평행한 분할선을 절선(nodal line)이라 부르고, 가장 좌측의 절선을 절선 1, 가장 우측의 절선을 절선 (n+1)이라 한다. 절선으로 나누어진 평판의 각 영역을 스트립(strip)이라 하면, Fig. 1의 평판은 좌측에서 우측까지 총 n개의 스트립으로 구성된다.

각 선들의 교차점은 삼각평판요소의 절점이 되고 각 절점은 X축과 Y축 방향의 2자유도를 가진다. 그리고 각 절점은 기초로부터 평판을 지지하는 기초 지지스프링이 부착될 수 있고, 일부의 절점에는 조화외력(q)이 작용한다.

평판의 경계조건은 해당 절점의 기초지지스프링으로 모델링한다. 예를 들면, 한 절점이 구속되어 있다면, X축과 Y축 방향으로 무한대의 스프링상수를 갖는 기초지지스프링이 해당 절점을 기초로부터 지지하는 것으로 모델링한다.

2.2 삼각평판요소와 스트립의 질량 및 강성행렬

Fig. 2는 3개의 절점과 총 6자유도를 갖는 삼각평

판요소이다. 각 절점(\$j = 1, 2, 3\$)의 변위벡터 \$\hat{\mathbf{d}}_j\$는 X축과 Y축 방향의 절점변위 \$u\$와 \$v\$로 구성되고, 각 절점의 힘벡터 \$\hat{\mathbf{f}}_j\$는 X축과 Y축 방향의 절점력 \$f_x\$와 \$f_y\$로 구성된다.

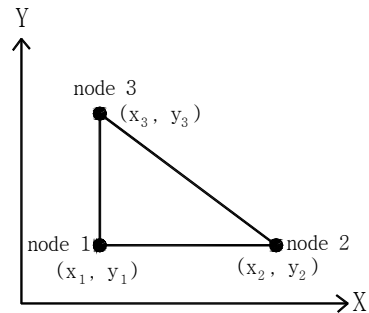


Fig. 2 A triangular element

밀도가 \$\rho\$, 탄성계수가 \$E\$, 프아송비가 \$\nu\$, 두께가 \$h\$, 면적이 \$A\$인 3절점 삼각평판요소의 질량행렬(\$\hat{\mathbf{M}}\$)과 강성행렬(\$\hat{\mathbf{K}}\$)은 유한요소해석을 통해 다음 식과 같이 구할 수 있다¹⁰⁾.

$$\hat{\mathbf{M}} = \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 \$\alpha = \rho Ah / 12\$이다.

$$\hat{\mathbf{K}} = \beta \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} & k_{55} & k_{56} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{46} & k_{56} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 \$\beta = Eh / 8A(1 - \nu^2)\$이고, 나머지 강성행렬의 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} k_{11} &= 2a_1^2 + b_1^2(1 - \nu), \\ k_{12} &= a_1b_1(1 + \nu), \\ k_{13} &= 2a_1a_2 + b_1b_2(1 - \nu), \\ k_{14} &= 2a_1b_2\nu + a_2b_1(1 - \nu), \\ k_{15} &= 2a_1a_3 + b_1b_3(1 - \nu), \\ k_{16} &= 2a_1b_3\nu + a_3b_1(1 - \nu), \\ k_{22} &= 2b_1^2 + a_1^2(1 - \nu), \\ k_{23} &= 2a_2b_1\nu + a_1a_2(1 - \nu), \\ k_{24} &= 2b_1b_2 + a_1a_2(1 - \nu), \\ k_{25} &= 2a_3b_1\nu + a_1b_3(1 - \nu), \\ k_{26} &= 2b_1b_3 + a_1a_3(1 - \nu), \\ k_{33} &= 2a_2^2 + b_2^2(1 - \nu), \\ k_{34} &= a_2b_2(1 + \nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{35} &= 2a_2a_3 + b_2b_3(1-\nu), \\
 k_{36} &= 2a_2b_3\nu + a_3b_2(1-\nu), \\
 k_{44} &= 2b_2^2 + a_2^2(1-\nu), \\
 k_{45} &= 2a_3b_2\nu + a_2b_3(1-\nu), \\
 k_{46} &= 2b_2b_3 + a_2a_3(1-\nu), \\
 k_{55} &= 2a_3^2 + b_3^2(1-\nu), \\
 k_{56} &= a_3b_3(1+\nu), \\
 k_{66} &= 2b_3^2 + a_3^2(1-\nu), \\
 a_1 &= y_2 - y_3, \quad a_2 = y_3 - y_1, \\
 a_3 &= y_1 - y_2, \quad b_1 = x_3 - x_2, \\
 b_2 &= x_1 - x_3, \quad b_3 = x_2 - x_1
 \end{aligned}$$

(3)

Fig. 1에 나타난 임의의 i 번째 스트립은 좌측 절선에 m 개의 절점을 가지고 우측 절선에 $(m-1)$ 개의 절점을 가지며, 다수의 삼각평판요소로 구성된다. 유한요소해석의 조립과정을 통해 식 (1)과 (2)에 나타난 삼각평판요소의 질량행렬과 강성행렬을 가지고 스트립의 질량행렬(\mathbf{M}_i)과 강성행렬(\mathbf{K}_i)을 각각 구한다. 그러면 스트립의 동강성행렬(\mathbf{D}_i)은 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{f}}_i = \mathbf{D}_i \tilde{\mathbf{d}}_i \quad (4)$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_i &= \mathbf{K}_i - \Omega^2 \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ {}^t\mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \end{bmatrix}, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_i &= {}^t\{\tilde{\mathbf{f}}_i^L, \tilde{\mathbf{f}}_i^R\}, \quad \tilde{\mathbf{d}}_i = {}^t\{\tilde{\mathbf{d}}_i^L, \tilde{\mathbf{d}}_i^R\}, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_i^L &= {}^t\{\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_m\}_i^L, \\
 \tilde{\mathbf{f}}_i^R &= {}^t\{\tilde{\mathbf{f}}_1, \tilde{\mathbf{f}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{f}}_{m-1}\}_i^R, \\
 \tilde{\mathbf{d}}_i^L &= {}^t\{\tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_m\}_i^L, \\
 \tilde{\mathbf{d}}_i^R &= {}^t\{\tilde{\mathbf{d}}_1, \tilde{\mathbf{d}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_{m-1}\}_i^R
 \end{aligned} \quad (5)$$

이고, Ω 는 조화외력의 각진동수, 하첨자 i 는 i 번째 스트립을 뜻하고, 상첨자 L과 R은 각각 스트립의 좌측과 우측을 의미한다. 그리고 상첨자 t는 행렬의 전치(transpose)를 뜻한다. 부분행렬 \mathbf{A}_i 및 \mathbf{C}_i 는 각각 $2m$ 및 $2(m-1)$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 되고, 부분행렬 \mathbf{B}_i 는 $2m$ 의 행과 $2(m-1)$ 의 열을 갖는 행렬이 된다.

2.3 절선동강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식
 절선에서 좌측과 우측의 변위벡터는 연속이므로 동일하나, 조화외력이 작용할 경우나 기초지지스프링이 존재할 경우에 절선 좌측과 우측의 힘벡터는 달라지므로 하나의 절선을 절선 좌측과 절선 우측으로 나누어서 생각한다.

절선 i 의 우측에서 힘벡터(\mathbf{f}_i)와 변위벡터(\mathbf{d}_i) 사

이의 관계를 절선동강성계수행렬(\mathbf{S}_i)과 힘보정벡터(\mathbf{e}_i)를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i + \mathbf{e}_i \quad (6)$$

여기서 절선 i 에 m 개의 절점이 존재할 경우, \mathbf{S}_i 는 $2m$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 되고, \mathbf{e}_i 는 $2m \times 1$ 의 열벡터이다.

절선 $(i+1)$ 의 좌측에서 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_{i+1}$)와 변위벡터(\mathbf{d}_{i+1}) 사이의 관계를 절선동강성계수행렬($\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$)과 힘보정벡터($\bar{\mathbf{e}}_{i+1}$)를 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_{i+1} = \bar{\mathbf{S}}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} + \bar{\mathbf{e}}_{i+1} \quad (7)$$

절선 $(i+1)$ 의 우측에서 힘벡터(\mathbf{f}_{i+1})와 변위벡터(\mathbf{d}_{i+1}) 사이의 관계를 절선동강성계수행렬(\mathbf{S}_{i+1})과 힘보정벡터(\mathbf{e}_{i+1})을 이용하여 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{S}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} + \mathbf{e}_{i+1} \quad (8)$$

그리고 절선 $(i+1)$ 에 $(m-1)$ 개의 절점이 존재할 경우, $\bar{\mathbf{S}}_{i+1}$ 및 \mathbf{S}_{i+1} 는 각각 $2(m-1)$ 의 행과 열을 갖는 정방행렬이 되고, $\bar{\mathbf{e}}_{i+1}$ 및 \mathbf{e}_{i+1} 은 $2(m-1) \times 1$ 의 열벡터가 된다.

스트립의 관점에서 절선의 관점으로 전환하면 식 (4)의 동강성행렬(\mathbf{D}_i)은 다음과 같은 부분행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \bar{\mathbf{f}}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_i & -\mathbf{B}_i \\ {}^t\mathbf{B}_i & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \end{bmatrix} \quad (9)$$

식 (6)과 식 (9)로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i \quad (10)$$

여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{A}_i \quad (11)$$

이다.

식 (7), (9), (10)으로부터 다음 식과 같은 절선동강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 필드(field) 전달식이라 부른다.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}}_{i+1} &= \mathbf{C}_i + {}^t\mathbf{B}_i \mathbf{V}_i, \\ \bar{\mathbf{e}}_{i+1} &= -{}^t\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (12)$$

$(m-1)$ 개의 절점을 갖는 절선 $(i+1)$ 선상의 임의의

절점 j 에 기초지스프링 (k_{xj}, k_{yj})이 존재하거나 또는 조화외력 (q_{xj}, q_{yj})이 작용하면, 절선 ($i+1$)에서 힘의 평형식은 다음 식과 같다.

$$\mathbf{f}_{i+1} = \bar{\mathbf{f}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{q}_{i+1} \quad (13)$$

여기서 기초지스프링의 스프링상수로 구성되는 포인트 강성행렬 \mathbf{P}_{i+1} 과 조화외력의 복소진폭으로 구성되는 열벡터 \mathbf{q}_{i+1} 은 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i+1} &= \text{diag}(k_{x1}, k_{y1}, \dots, k_{ym-1})_{i+1}, \quad (14) \\ \mathbf{q}_{i+1} &= \text{diag}(q_{x1}, q_{y1}, \dots, q_{ym-1})_{i+1} \end{aligned}$$

식 (7), (8), (14)로부터 다음 식과 같은 절선동강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 포인트(point) 전달식이라 부른다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i+1} &= \bar{\mathbf{S}}_{i+1} + \mathbf{P}_{i+1}, \quad (15) \\ \mathbf{e}_{i+1} &= \bar{\mathbf{e}}_{i+1} - \mathbf{q}_{i+1} \end{aligned}$$

식 (12)를 식 (15)에 대입하면 다음 식과 같은 절선동강성계수행렬 및 힘보정벡터의 필드-포인트 전달식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{i+1} &= \mathbf{C}_i + {}^t\mathbf{B}_i \mathbf{V}_i + \mathbf{P}_{i+1}, \quad (16) \\ \mathbf{e}_{i+1} &= - {}^t\mathbf{B}_i \mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{e}_i - \mathbf{q}_{i+1} \end{aligned}$$

2.4 강제진동 변위 계산

좌단의 경계조건을 절선 1의 기초지스프링으로 모델링하였으므로 절선 1 좌측의 힘벡터 $\bar{\mathbf{f}}_1$ 는 해석적으로 영벡터가 된다. 따라서 식 (8)과 (13)의 i 에 0을 대입한 식으로부터 절선 1 우측의 절선동강성계수행렬 \mathbf{S}_1 및 힘보정벡터 \mathbf{e}_1 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{q}_1 \quad (17)$$

식 (17)을 시작으로, 식 (16)의 i 에 1, 2, ..., n 을 순차적으로 대입하면, 최종적으로 우단(끝단)인 절선 ($n+1$) 우측의 절선동강성계수행렬 \mathbf{S}_{n+1} 및 힘보정벡터 \mathbf{e}_{n+1} 을 계산할 수 있다.

우단에서도 경계조건을 절선 ($n+1$)의 기초지스프링으로 모델링하였으므로 절선 ($n+1$)에서 \mathbf{f}_{n+1} 은 해석적으로 영벡터가 된다. 식 (8)의 i 에 n 을 대입한 식으로부터 다음 식을 구할 수 있고,

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (18)$$

따라서 식 (19)로부터 우단인 절선 ($n+1$)의 조화응답을 구할 수 있다.

$$\mathbf{d}_{n+1} = -(\mathbf{S}_{n+1})^{-1} \mathbf{e}_{n+1} \quad (19)$$

식 (19)로부터 마지막 절선의 각 절점의 조화응답을 계산한 후, 나머지 절점의 조화응답은 식 (10)으로부터 우단에서 좌단으로 전달하면서 계산한다.

2.5 자유진동 해석 알고리즘

자유진동 해석은 외력이 존재하지 않으므로 앞선 강제진동 해석에서 기술한 힘보정벡터가 사용되지 않는다. 따라서 자유진동 해석에서는 절선동강성계수행렬(\mathbf{S}_i)을 다음 식과 같이 정의한다.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{d}_i \quad (20)$$

Fig. 1과 같은 해석모델의 자유진동 해석은 식 (17)로부터 절선 1의 절선동강성계수행렬(\mathbf{S}_1)을 구한 후, 필드-포인트 전달식인 식 (16)을 반복적으로 적용하여 마지막 절선인 절선 ($n+1$)의 절선동강성계수행렬(\mathbf{S}_{n+1})을 구한다. 이 과정은 강제진동해석과 완전히 동일하다.

우단의 경계조건을 절선 ($n+1$)의 기초지스프링으로 모델링하였으므로 $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}_{n+1} \neq \mathbf{0}$ 가 되고, 식 (20)의 i 에 ($n+1$)을 대입한 식으로부터 다음 식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (21)$$

따라서 진동수 방정식은 다음과 같다.

$$|\mathbf{S}_{n+1}| = 0 \quad (22)$$

고유모드는 식 (22)로부터 고유진동수를 먼저 구한 후, 식 (21)로부터 해당 고유진동수에 대한 절선 ($n+1$)의 고유모드 값을 구한다. 나머지 절선의 고유모드 값은 식(10)에서 힘보정벡터를 제거한 다음 식으로부터 우측에서 좌측으로 전달하면서 계산한다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} \quad (23)$$

3. 수치계산 결과 및 검토

사각평판과 삼각평판을 수치계산 모델로 선정한 후, 유한요소-전달강성계수법(FE-TSCM)과 유한요소법(FEM)으로 면내 자유진동 해석을 수행하여 고유진동수와 고유모드를 각각 구하였다. 강제진동 해석에서는 정상상태 응답인 주파수응답을 양 방법으로 구하여 그 결과를 비교·검토하였다.

3.1 사각평판의 면내 진동 해석

수치계산에 사용된 첫 번째 모델은 직사각형 평

판으로써 평판의 가로 및 세로방향의 길이가 각각 60.96 m, 15.24 m이고, 두께가 22.89 mm, 종탄성계수가 34.474 GPa, 프아송비가 0.11이다. 사각평판은 밑변과 높이가 동일한 삼각형 평판요소로 구성되고, Fig. 3은 한 예로써 계산 모델을 20개의 스트립으로 모델링한 형상을 나타낸다.

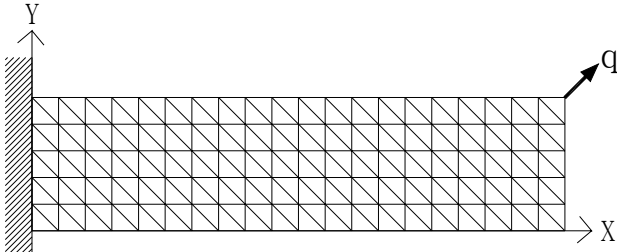


Fig. 3 Computation model 1 with 20 strips

Table 1은 계산모델 1의 사각평판을 8개, 16개, 24개, 32개, 40개의 스트립으로 각각 모델링한 후 유한요소-전달강성계수법으로 고유진동수를 계산한 결과이다. Table 2는 동일 모델링별로 유한요소법으로 고유진동수를 계산한 결과이다. Table 1과 Table 2의 결과는 스트립별로 서로 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 사각평판의 면내 자유진동 해석에서 신뢰성이 있음을 알 수 있었다. 그리고 스트립의 개수가 증가할수록 고유진동수가 수렴해 가고 있음을 알 수 있었다.

Fig. 4는 스트립 수가 20인 계산모델에 대하여 1차부터 3차까지의 고유모드를 계산할 결과이다. 1차 및 2차 모드는 면내 굽힘 진동모드이고, 3차 모드는 종방향의 진동모드를 나타내고 있다.

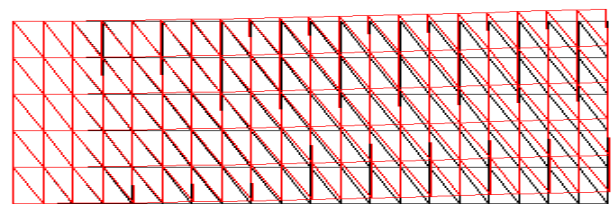
Fig. 3과 같이 모서리에 진폭이 1000 N이고, 수평축에 대해 반시계 방향으로 45도의 방향을 갖는 면내 조화외력이 작용할 때 계산모델 1인 사각평판의 주파수응답을 양 방법으로 계산하였다. 자유진동 해석과 동일하게 사각평판을 8개, 16개, 24개, 32개, 40개의 스트립으로 각각 모델링하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 주파수응답을 계산한 결과는 스트립별로 서로 일치하였다. 그 결과의 하나가 Fig. 5이다. Fig. 5는 사각평판을 40개의 스트립으로 모델링하여 가진점의 조화응답 진폭을 양 방법으로 계산한 결과이다. 자유진동 해석결과인 Table 1과 비교해 보면 고유진동수가 주파수응답에서 모두 공진이 됨을 확인할 수 있다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 사각평판의 면내 강제진동 해석에서도 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 줌을 알 수 있었다.

Table 1 Natural frequencies of computation model 1 by FE-TSCM [unit : Hz]

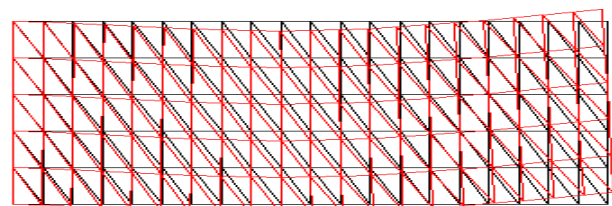
Mode	Number of strips				
	8	16	24	32	40
1	6.630	5.438	5.176	5.080	5.034
2	31.952	27.950	26.704	26.231	26.004
3	33.091	31.978	31.966	31.962	31.960
4	76.205	65.042	62.118	60.972	60.412
5	97.195	96.178	95.977	95.905	95.870

Table 2 Natural frequencies of computation model 1 by FEM [unit : Hz]

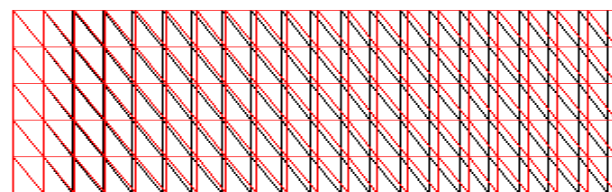
Mode	Number of strips				
	8	16	24	32	40
1	6.630	5.438	5.176	5.080	5.034
2	31.952	27.950	26.704	26.231	26.004
3	33.091	31.978	31.966	31.962	31.960
4	76.205	65.042	62.118	60.972	60.412
5	97.195	96.178	95.977	95.905	95.870



(a) 1st natural mode



(b) 2nd natural mode



(c) 3rd natural mode

Fig. 4 Natural modes of computation model 1

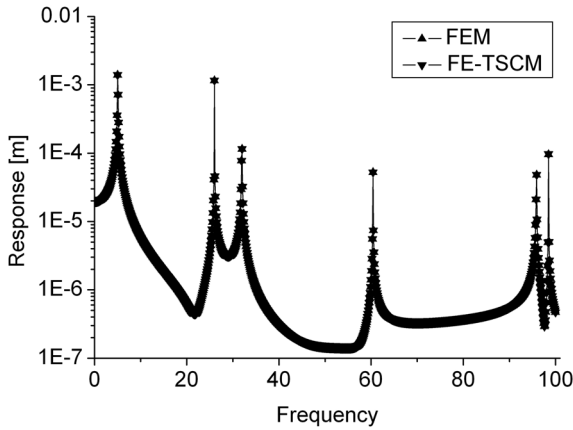


Fig. 5 Response of model 1 with 40 strips

Fig. 6은 계산모델의 분할에 사용된 스트립의 개수에 따른 양 방법의 계산 소요시간을 비교한 결과이다. 여기서는 스트립의 수가 8일 때 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간을 기준으로 하여 계산 시간을 비교하였다. 스트립의 수가 증가할수록 유한요소법의 계산 소요시간은 급격히 증가하였지만 유한요소-전달강성계수법은 상대적으로 그 증가폭이 작았다.

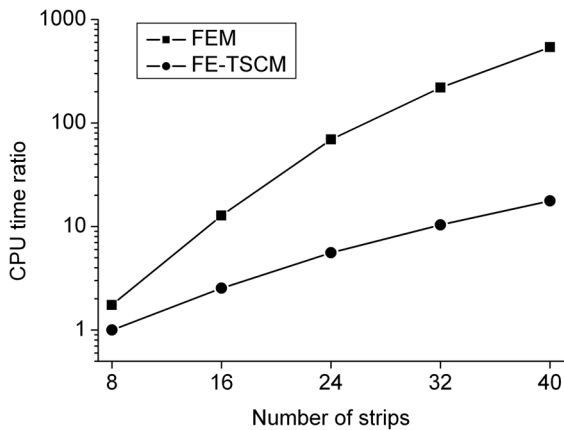


Fig. 6 Comparison of CPU time of model 1

따라서 상기 결과들을 고찰해 보면, 계산 모델의 분할수를 증가시킬수록 진동해석 결과의 정도가 우수해짐을 확인할 수 있었고 이 경우에 계산의 효율성 면에서 유한요소-전달강성계수법이 기존의 유한요소법보다 효과적인 해석기법임을 알 수 있었다.

3.2 삼각평판의 면내 진동 해석

두번째 수치계산 모델은 삼각형 평판으로써 평판의 밑변 및 높이는 모두 5 m이고, 두께가 10 mm,

종탄성계수가 206 GPa, 프아송비가 0.3이다. 평판은 밑변과 높이가 동일한 삼각형 평판요소로 구성되고, Fig. 7은 계산 모델을 10개의 스트립으로 모델링한 형상을 나타낸다.

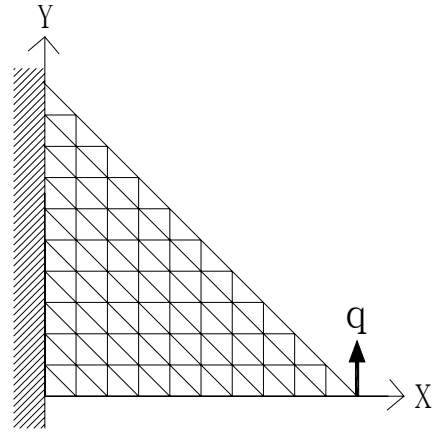


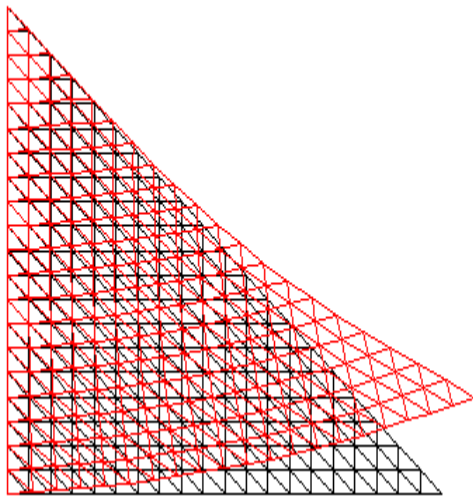
Fig. 7 Computation model 2 with 10 strips

삼각평판을 5개, 10개, 20개, 30개, 40개의 스트립으로 각각 분할하여 모델링한 후 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 고유진동수와 고유모드를 계산한 결과는 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 Fig. 7의 계산모델과 같이 전달과정에서 절선동강성계수행렬의 크기가 변해도 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 줌을 확인할 수 있었다. Table 3은 분할에 사용된 스트립의 개수에 따라 양 방법으로 계산된 고유진동수이다. 여기서도 스트립의 개수가 증가할수록 고유진동수가 수렴해 가고 있음을 알 수 있었다.

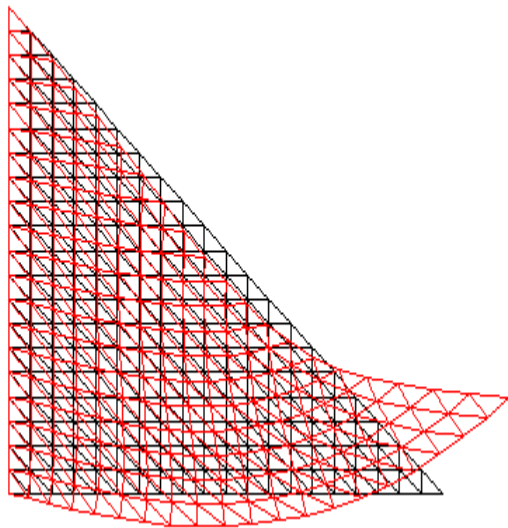
Table 3 Natural frequencies of computation model 2 by FE-TSCM and FEM [unit: Hz]

Mode	Number of strips				
	5	10	20	30	40
1	169.25	157.36	153.50	152.69	152.40
2	350.48	337.00	327.30	324.52	323.42
3	423.50	379.70	368.10	366.02	365.28
4	776.41	633.75	577.55	563.89	558.54
5	809.79	762.28	750.16	747.50	746.46
6	926.55	881.19	827.71	803.46	793.75
7	1122.96	939.68	874.63	871.09	869.90
8	1238.15	1037.43	988.06	969.36	959.86

Fig. 9는 스트립 수가 20인 계산모델에 대하여 1차 및 2차 고유모드를 계산할 결과이다.



(a) 1st natural mode



(b) 2nd natural mode

Fig. 8 Natural modes of computation model 2

Fig. 7과 같이 모서리에 진폭이 1000 N이고, Y 축 방향으로 조화외력이 작용할 때 계산모델 2인 삼각평판의 주파수응답을 양 방법으로 계산하였다. 자유진동 해석과 동일하게 삼각평판을 5개, 10개, 20개, 30개, 40개의 스트립으로 각각 모델링하여 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법으로 주파수응답을 계산한 결과는 분할 스트립별로 서로 일치하였다. 그 결과의 하나가 Fig. 9이다. Fig. 9는 삼각평판을 40개의 스트립으로 모델링하여 가진점의 조화응답 진폭을 양 방법으로 계산한 결과이다. 자유

진동 해석결과인 Table 3과 비교해 보면 고유진동수가 주파수응답에서 모두 공진이 되고 있음을 확인할 수 있었다. 따라서 유한요소-전달강성계수법이 삼각평판의 면내 강제진동 해석에서도 신뢰성 있는 계산 결과를 제공해 줄 수 있었다.

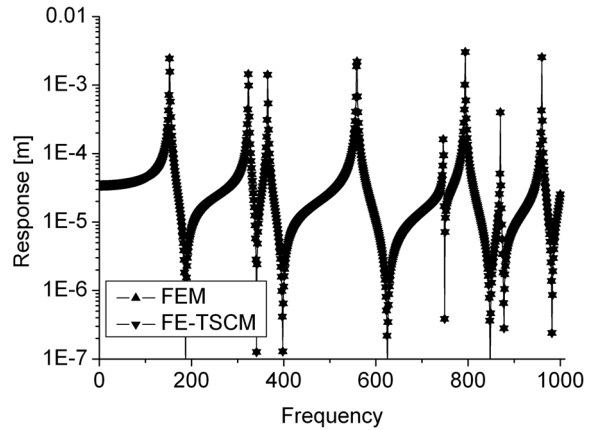


Fig. 9 Response of model 2 with 40 strips

Fig. 10은 계산모델의 분할에 사용된 스트립의 개수에 따른 양 방법의 계산 소요시간을 비교한 결과이다. 여기서는 스트립의 수가 5일 때 유한요소-전달강성계수법으로 계산하는데 소요된 시간을 기준으로 하여 계산 시간을 비교하였다. 여기서도 스트립의 수를 증가할수록 유한요소법의 계산 소요시간은 급격히 증가하였지만 유한요소-전달강성계수법은 상대적으로 그 증가폭이 작았다.

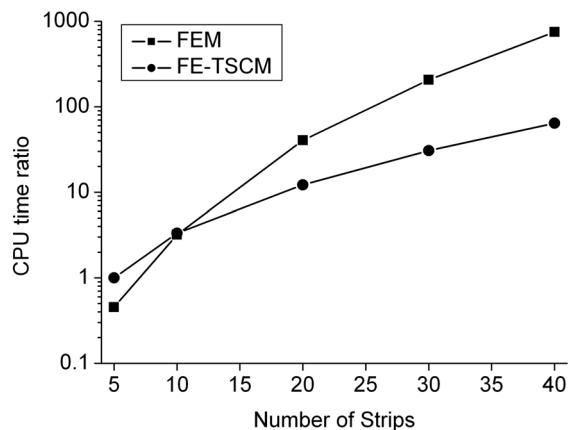


Fig. 10 Comparison of CPU time of model 2

삼각평판에 대한 계산 결과를 고찰해 보면, 유한요소-전달강성계수법이 전달 계산 중에 절선동강성계수행렬의 크기가 변화하여도 계산의 신뢰성 및 우수성을 유지하고 있음을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

다양한 형상을 갖는 평판에 적용할 수 있는 면내 자유진동 및 강제진동 해석 알고리즘을 유한요소-전달강성계수법으로 정식화하였다.

사각평판의 면내 진동 해석에 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법을 적용하여 수치 계산을 수행하였고, 그 결과 정도가 높은 진동 해석 결과를 얻기 위해서는 평판의 분할수를 증가시켜야 하고 이 경우에 유한요소-전달강성계수법이 신뢰성 있는 계산 결과를 제공함과 동시에 계산 시간의 면에서 기존의 유한요소법보다 효과적임을 확인하였다.

삼각평판의 면내 강제진동 수치 계산을 통해서도 유한요소-전달강성계수법이 효과적인 진동해석 기법임을 재차 확인할 수 있었고, 특히 평판의 폭이 변하여 절선동강성계수행렬의 크기가 전달과정에서 변함에도 불구하고 수치계산 시에 전혀 문제가 없음을 확인할 수 있었다. 따라서 이전보다 더욱 다양한 형상의 평판 구조물에 유한요소-전달강성계수법을 효과적으로 적용할 수 있음을 알 수 있었다.

앞으로는 본 해석기법의 기본 개념을 확장하여 다양한 3차원 구조물의 진동해석에 적용할 계획이다.

후 기

이 논문은 2006년 전남대학교 수산과학연구소 Innovation 06사업에 의해 수행된 연구임.

참고 문헌

1. Daryl L. Logan, 1997, "A First Course in the Finite element Method Using Algor", PWS Publishing Company, Boston.
2. Huiyu Xue, 1997, "A Combined Finite Element-Riccati Transfer Matrix Method in Frequency Domain for Transient Structural Response", Computers & Structures, Vol. 62, No. 2, pp. 215~220.
3. 양보석, 2002, "회전기계의 진동", 인터비전, 서울, pp. 389~555.
4. M. Ohga, 1993, "A Finite Element-Transfer Matrix Method for Dynamic Analysis of Frame Structures", Journal of Sound and Vibration, Vol. 167, No. 3, pp. 401~411.
5. 문덕홍, 최명수, 1999, "강성계수의 전달을 이용한 다양한 연결부를 갖는 구조물의 진동해석", 대한기계학회논문집 A권, 제 23권, 제 2호, pp. 344~356.
6. 이우식, 강성훈, 1995, "전달 스펙트럴 유한요소법을 이용한 거대격자구조물의 진동해석", 대한기계학회논문집, 제 19권, 제 12호, pp. 3177~3189.
7. M. S. Choi, 2003, "Free Vibration Analysis of Plate Structures Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", KSME International Journal, Vol. 17, No. 6, pp. 805~815.
8. 최명수, 2003, "유한요소-전달강성계수법을 이용한 평판 구조물의 강제진동해석", 한국소음진동공학회지, 제13권, 제2호, pp. 99~107.
9. 최명수, 2006, "강성계수의 전달에 의한 평판 구조물의 구조해석", 한국동력기계공학회지, 제11권, 제1호, pp. 92~97.
10. Maurice Petyt, 1990, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, pp. 141~175.