

비등방성 얇은 곡선보 및 두꺼운 곡선보의 해석연구

박원태^{1*}

A Study on the Analysis of Anisotropic Curved Thin Beams and Anisotropic Curved Thick Beams

Weon-Tae Park^{1*}

요 약 본 연구에서는 비등방성 두꺼운 곡선보와 얇은 곡선보의 휨문제에 대한 해석결과를 제시하였다. 비등방성재료는 재료의 성질이 각방향으로 다르기 때문에 거동이 복잡하여 해석해를 구하기가 어렵다. 따라서 비등방성 두꺼운 보의 미분방정식의 해를 구하기 위해 본연구에서는 수치해석법인 유한요소법이 사용되었으며, 비등방성 두꺼운 곡선보와 얇은 곡선보의 휨문제에 대한 해석을 위해 두꺼운 보이론과 얇은 보이론이 사용되며, 비등방성 두꺼운 곡선보와 얇은 곡선보의 휨문제에 대한 해석결과를 비교 검토하였다.

Abstract In this study, it is presented analytic results of bending problems in the anisotropic curved thick beam and the anisotropic curved thin beam.

The anisotropy is that the material properties are different in each directions and it is difficult to solve the analytical solutions because the behavior is complex. In applying numerical method to solve differential equations of anisotropic curved beams, this study uses the finite element method. Both thin beam theory and thick beam theory are used as the basic governing equations of bending problems in the anisotropic beams. The analytic results are compared between the anisotropic curved thick beams and the anisotropic curved thin beams.

Key Words : anisotropic curved thin beams, anisotropic curved thick beams, finite element method

1. 서 론

등방성재료의 탄성보의 응력해석은 고전적이론을 바탕으로 많은 사람들의 연구대상이 되어 왔다. 그러나 재질이 비등방성이고, 전단변형의 효과를 무시할 수 없는 두꺼운 보인 경우에는 보다 정확한 해석을 위해 엄밀한 이론이 필요하게 된다.

얇은 보이론에서는 변형전에 중면에 수직인 단면은 변형후에도 평면을 유지하고 중면에 수직이다라고 가정하여 전단변형효과를 무시하였다. 그러나 고강도, 고강성의 비등방성 경량보인 경우, 전단탄성계수에 대한 면내력계수의 비가 아주 큰 관계로 전단변형효과에 대한 새로운 문제를 야기시키고 있다. 따라서 두꺼운 보이론에서는 변형후 단면이 평면을 유지하지만 중면에 수직일 필요는 없다라고 가정하여 전단변형효과를 고려하였다. 또한 최

근에는 보의 재료로서는 단일재료보다 경제적이고 더 강한 재료로서 복합재료의 등장으로 이에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그러나 복합재료로 이루어진 비등방성 보의 역학적 거동이 예측하기 어려울 정도로 복잡하고 건설구조물에 적용하기 위해 보다 많은 연구와 실험이 필요하다. 따라서 본 연구에서는 재질이 비등방성이고, 전단변형효과를 무시한 얇은 보이론과 전단변형효과를 고려한 두꺼운 보이론에 의한 해석결과를 비교 검토하여 건물 및 교량등에 새롭게 등장하는 건설재료에 대한 보다 정확한 해석기법을 제시하여 설계에 반영토록 한다.

2. 기본이론

2.1 보의 변위벡터와 변형률벡터

¹공주대학교 건설환경공학부

*교신저자 : 박원태(pwtat@kongju.ac.kr)

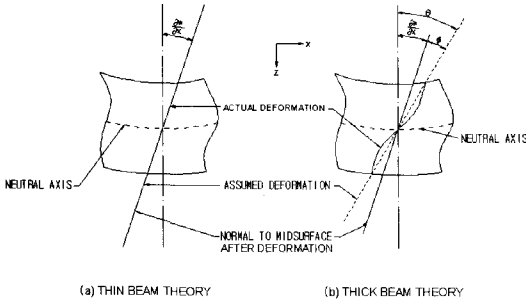


그림 1. Cross-sectional deformation of beam

그림 1과 같이 얇은 보 이론에 의한 보의 변위 벡터 (δ_{BK}) , 변형률 벡터 (ε_{BK}) 를 각각 식(1)과 식(2)와 같이 나타낼 수 있다[1~3].

$$\delta_{BK} = \begin{Bmatrix} w \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{BK} = \{ \chi_{BK} \quad \Phi_{BK} \} \quad (2)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \chi_{BK} &= \{ \chi_x \} = \left\{ -\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\}, \\ \Phi_{BK} &= \{ \Phi' \} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \Theta \right\} \end{aligned} \quad (3-a, b)$$

두꺼운 보 이론에 의한 보의 변위벡터 (δ_{BM}) 와 변형률벡터 (ε_{BM}) 는 각각 식(4)와 식(5) 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta_{BM} = \begin{Bmatrix} w \\ \Theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \Phi \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{BM} = \{ \chi_{BM} \quad \Phi_{BM} \} \quad (5)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \chi_{BM} &= \{ \chi_x \} = \left\{ -\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right\}, \\ \Phi_{BM} &= \{ \Phi \} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \Theta \right\} \end{aligned} \quad (6-a, b)$$

얇은보 이론과 두꺼운보 이론에 의한 비등방성 보요소의 모멘트, 전단력과 변형률과의 관계는 식(7)~식(9)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{BK} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ \Phi' \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_{BM} = \begin{bmatrix} \overline{D}_{11} & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ \Phi \end{Bmatrix} \quad (8)$$

여기서,

$$\overline{D}_{11} = (D_{22} D_{66} - D_{26} D_{26}) / D^*,$$

$$D^* = D_{11} D_1 + D_{12} D_2 + D_{16} D_3$$

$$D_1 = D_{22} D_{66} - D_{26} D_{26}, \quad D_2 = D_{16} D_{26} - D_{12} D_{66}$$

$$D_3 = D_{12} D_{26} - D_{22} D_{16},$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [\overline{Q}_{ij}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (9)$$

D_{ij} 는 휨강도, S 는 전단강도를 나타내고, 또한 $[\overline{Q}_{ij}]$ 는 재료축에서의 구조축으로 좌표변환하여 구한 재료강도를 나타낸다.

2.2 요소내 변위와 형상함수

본 연구에서는 자연좌표계 (ξ) 를 사용하여 직각좌표계 (x) 와 요소변위를 같은 보간함수 $N_i(\xi)$ 로 나타낼 수 있는 3절점 "Iso-parametric 요소"를 사용하였으며, 보요소내의 임의 점 (x) 에서의 위치와 얇은보 이론과 두꺼운보 이론에 의한 보요소내의 임의 점 (x) 에서의 변위는 형상함수를 이용하여 요소절점의 변위로 나타내면 식(10)~식(12)과 같다.

$$\begin{aligned} x(\xi) &= N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 + N_3(\xi)x_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)x_i \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \delta_{BK} &= \begin{Bmatrix} w(\xi) \\ \Theta(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3 \\ N_1(\xi)\Theta_1 + N_2(\xi)\Theta_2 + N_3(\xi)\Theta_3 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)\delta_{BK}^i \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta_{BM} &= \begin{Bmatrix} w(\xi) \\ \Theta(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1(\xi)w_1 + N_2(\xi)w_2 + N_3(\xi)w_3 \\ N_1(\xi)\Theta_1 + N_2(\xi)\Theta_2 + N_3(\xi)\Theta_3 \end{Bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^3 N_i(\xi)\delta_{BM}^i \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, $N_i(\xi)$, Π , δ_{BK}^i , δ_{BM}^i 는 식(13)~식(14-a, b)와 같다.

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \\ N_2(\xi) &= (1-\xi)(1+\xi), \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \end{aligned} \quad (13)$$

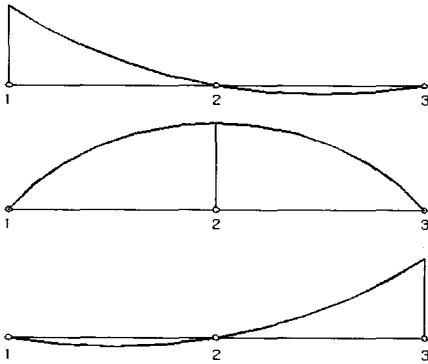


그림 2. 비등방성 곡선보 요소의 형상함수

$$\delta_{BK} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{w_i}{\Theta} \right\}, \delta_{BM}^i = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{w_i}{\Theta} \right\} \quad (14-a,b)$$

2.3 변형률 매트릭스

얇은보 이론에 의한 보의 변형률과 변위관계는 식(15)과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{BK} = \{ X_{BK} \} &= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ \Theta \end{pmatrix} \\ &= [B_{BK}^1 \ B_{BK}^2 \ B_{BK}^3] \delta_{BK}^i = \sum_{i=1}^3 B_{BK}^i \delta_{BK}^i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{여기서, } B_{BK}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \end{bmatrix} \quad (16)$$

두꺼운보 이론에 의한 보의 변형률과 변위관계는 식(17)과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{BM} = \{ X_{BM} \} &= \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_i \\ \Theta \end{pmatrix} \\ &= [B_{BM}^1 \ B_{BM}^2 \ B_{BM}^3] \delta_{BM}^i = \sum_{i=1}^3 B_{BM}^i \delta_{BM}^i \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{여기서, } B_{BM}^i = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

식(15)과 식(17)에서 변형률매트릭스 B_{BK}^i, B_{BM}^i 에 있는 형상함수 N_i 는 자연좌표계(ξ)로 정의 되어 있기 때문에 직각좌표계로 편미분하기 위해서 좌표변환을 해야 한다. 형상함수의 직교좌표계에 대한 편도함수는 Jacobian 매트릭스를 사용하여 자연좌표계에 대한 편도함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} &= [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, jacobian 매트릭스

$$\begin{aligned} [J] &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \xi\right)x_1 - 2\xi x_2 + \left(\frac{1}{2} + \xi\right)x_3 \\ &= \frac{x_3 - x_1}{2} + \xi(x_1 + x_3 - 2x_2) \\ &= \frac{x_3 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

2.4 요소강도 매트릭스

본 연구에서의 보요소강도 매트릭스는 전Potential energy(=π)의 정류조건으로부터 구할 수 있다[4-7]. 즉.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta} = \frac{\partial \pi_e}{\partial \delta_e} = 0 \quad (21)$$

얇은보이론과 두꺼운보이론에 의한 보의 total potential energy는 식(22)과 식(23)로 나타낼 수 있다.

$$\Pi_{BK} = \frac{1}{2} \int_A M^K M_{BK} + Q\Phi' dA - \int_A qwdA \quad (22)$$

$$\Pi_{BM} = \frac{1}{2} \int_A M^K M_{BM} + Q\Phi dA - \int_A qwdA \quad (23)$$

결국 얇은보 이론 및 두꺼운보 이론에 의한 보요소강

도 매트릭스는 식(24)과 식(25)과 같다.

$$K_{BK}^e = \int_{Ae} B_{BK}^T D_{BK} B_{BK} dx = \int_{-1}^{+1} B_{BK}^T D_{BK} B_{BK} \|J\| d\xi \quad (24)$$

$$K_{BM}^e = \int_{Ae} B_{BM}^T D_{BM} B_{BM} dx = \int_{-1}^{+1} B_{BM}^T D_{BM} B_{BM} \|J\| d\xi \quad (25)$$

식(24)와 식(25)에서

$B_{BK}^T D_{BK} B_{BK} \|J\| d\xi$, $B_{BM}^T D_{BM} B_{BM} \|J\| d\xi$ 는 대단히 복잡하기 때문에 직접 적분하지 않고 수치적분을 하게 되며 일반적으로 식(26)와 같은 Gauss-Legendre의 구적법을 사용하게 된다.

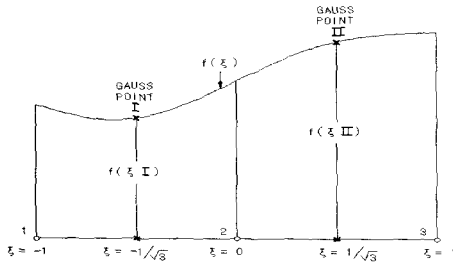


그림 3. 비등방성 곡선보 요소의 2절점 가우스 적분법

$$\Pi = \int_{-1}^{+1} \Phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n a_i \Phi(\xi_i) \quad (26)$$

여기서, ξ_i 는 i 번째 Gauss point의 ξ 의 좌표이다 [8~13].

3. 수치해석의 적용

본 연구의 해석방법에 의한 수치해석을 위해 MIDAS/CIVIL 6.1.1 프로그램을 사용하였으며 수치해석 예로 그림4와 같은 모델을 사용하여 해석을 수행하였으며 직사각형단면 형상을 가진 집중하중 $P = -1.0^{bf}$ 이고, 재료의 물성치가



그림 4. 비등방성 곡선보의 해석모델

표 1. 등방성재료 및 비등방성재료의 공학상수

	engineering constants
isotropic material	$E = 1.0 \times 10^7 \text{ lb/in}^2$ $R = 4.12''$ $b = 0.2''$ $t = 0.1''$ $\nu = 0.25$
anisotropic materials	$E_1 = 20.83 \times 10^6 \text{ lb}/\text{ft}^2$, $E_2 = 10.94 \times 10^6 \text{ lb}/\text{ft}^2$ $G_{13} = 3.71 \times 10^6 \text{ lb}/\text{ft}^2$, $G_{12} = 6.10 \times 10^6 \text{ lb}/\text{ft}^2$ $G_{23} = 6.9 \times 10^6 \text{ lb}/\text{ft}^2$, $\nu_{12} = 0.44$, $\nu_{21} = 0.23$

표 2. 등방성 곡선보의 자유단에서의 최대처짐 [14].

	Displacement
Theoretical	0.0873
SAP2000	0.0852
STAAD/PRO	0.0890
GENw	0.0854
Thin beam theory	0.0854234
Thick beam theory	0.0854343

표1와 같이 비등방성재료로 구성된 곡선 캔틸레버보를 대상으로 하였으며, 해석결과와 타당성을 알아보기 위해 재질 이 등방성인 경우, 얇은보 이론 및 두꺼운 보이론에 의한 해석결과를 해석해와 비교 검토하였다. 표 2에서 같이 보의 자유단에서 수직처짐(D_2)은 전단변형효과를 고려한 두꺼운보 이론에 의한 해석결과와 전단변형효과를 무시한 얇은보 이론에 의한 해석결과를 비교했을 때 보의 두께 $t = 0.1''$ 인 경우 차이를 거의 보이지 않았다.

비등방성인 재질 경우에는 표 1 과 같은 재료의 물성치를 사용하여, 보의 두께가 각각 $t = 0.1''$ 와 $t = 1''$ 인 경우, 얇은보 이론과 두꺼운 보이론에 의한 해석결과를 그림 5와 그림 6에서 제시하였다.

보의 두께가 $t = 0.1''$ 인 경우 얇은 보이론과 두꺼운 보이론에 의한 자유단에서 최대 수직처짐(D_2)에 대한 해석결과는 약 3.9% 차이를 보였으며, 보의 두께가 $t = 1''$ 인 경우에는 최대 수직처짐(D_2)에 대한 해석결과 차이가 약 4.6% 차이를 보였다. 따라서 재질이 등방성일 경우보다 비등방성일때 전단변형효과가 더 크게 나타나며, 또한 보의 두께를 달리한 경우 보의 두께가 두꺼울수록 전단 변형효과가 더 크게 나타남을 알 수 있다.

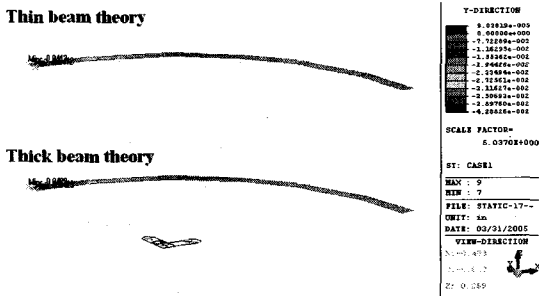


그림 5. 비등방성 곡선보의 수직처짐 ($t = 0.1$)

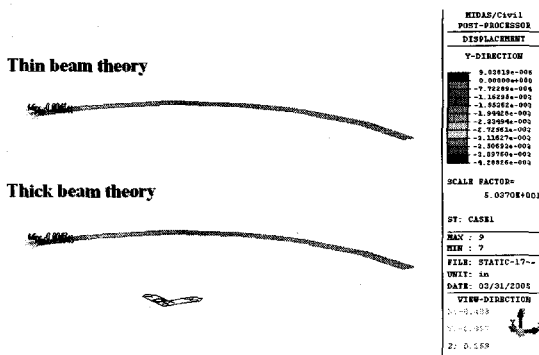


그림 6. 비등방성 곡선보의 수직처짐 ($t = 1$)

4. 결론

본 연구는 비등방성 재료로 구성된 캔틸레버보에 자유단에 집중하중을 재하 하였을 때 얇은보 이론과 두꺼운보 이론을 이용하여 보의 거동을 분석하였다. 재질에서는 등방성보다는 비등방성으로 구성된 보에서 전단변형효과의 영향이 크게 나타났으며, 두께를 달리한 경우, 즉 보의 두께가 두꺼울수록 전단변형효과가 더 크게 나타남을 알 수 있다. 따라서 재질이 비등방성이고, 두꺼운 보인 경우 본 논문에서 제시한 두꺼운 보 이론을 적용하는 것이 더 정확한 해를 기대할 수 있으며, 보다 다양한 형태의 비등방성 보구조물의 해석 및 설계에 본 연구에서의 해석기법 적용될 수 있을 것으로 본다.

참고문헌

1. M. HETENYI, "Beams on Elastic Foundation", Michigan Press, pp38~47, 1961.
2. Robert M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill, 1975.

3. J. N. Reddy, "Mechanics of Laminated Composite Plates," CRC press, 1997.
4. S. P. Timoshenko & S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill 2nd Ed., 1959, pp.118~120
5. Rudolph Szilard, "Theory and Analysis of Plates", Prentice-Hall, Inc, pp.28~90, 1974
6. Hou-Cheng Huang, "Static and Dynamic Analyses of Plates and Shells", Springer-Verlag Berlin Heidelberg Company, Inc., pp.10~18, 1989.
7. J. N. Reddy, "Energy and Variational Methods in Applied Mechanics", John Willy & Sons, New York, pp.233~247, 1995.
8. William Weaver, Jr, Paul R. Johnston, "Finite Element Analysis", Prentice -Hall, Inc., pp.103~141, 1984.
9. K. C. Rockey, H. R. Evans, D.W.Griffiths, D.A. Nethercot, "The Finite Element", William Clowers, pp.7~107, 1975.
10. William Weaver, JR.,Paul R. Johnston, "Finite Element for Structural Analysis", pp.103~141, 1984.
11. Kenneth H. Huebner, "Finite Element Method for Engineers", John Wiley & Sons, pp.123~191, 1975.
12. Zienkiewicz, O.C. and Talyor, R.L. (1989), "The Finite Element Method: Basic Formulatin and Linear Problems", Vol.I, McGraw-Hill, New York.
13. E.Hinton & D.R.J. Owen, "FiniteElement Programming", Academic Press, pp.68~94, 1977.
14. 강영주의 57인, "Midas Civil User's Manual Volume III", MIDAS Information Technology Co., Ltd. 2003.

박 원 태(Weon-Tae Park)

[정회원]



- 1983년 2월 : 부산대학교 토목공학과 (공학석사)
- 1993년 2월 : 서울시립대학교 토목공학과 (공학박사)
- 2006년 10월 ~ 현재 : 공주대학교 건설환경공학부 교수

<관심분야>
구조공학, 강구조공학, 복합재료