

# 꼭지점에서의 응력 집중 현상을 고려한 자유단 경계조건을 가진 임의 다각형 형상 평판의 자유 진동 해석

Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates  
with Free Edges by Considering the Phenomenon  
of Stress Concentration at Corners

강 상 육†

Sang Wook Kang

(2006년 11월 1일 접수 ; 2006년 12월 2일 심사완료)

Key Words : Non-dimensional Dynamic Influence Function(무차원동영향함수), Free Plate(자유단 평판), Free Vibration(자유 진동), Arbitrarily Shaped Polygonal Plate(임의 다각형 형상 평판), Eigenvalue(고유치), Free Boundary Condition(자유단 경계 조건), Stress Concentration(응력 집중)

## ABSTRACT

Free vibration analysis using the method of NDIF(non-dimensional dynamic influence function), which was developed by the author, is extended to arbitrarily shaped polygonal plates with free edges. Local Cartesian coordinate systems are employed to apply the free boundary condition to nodes distributed along the edges of the plate of interest. Furthermore, a new way for applying the free boundary condition to nodes located at corners of the plate is for the first time introduced by considering the phenomenon of stress concentration at the corners. Two case studies show that the proposed method is valid and accurate when the eigenvalues by the proposed method are compared to those by FEM(ANSYS).

## 1. 서 론

이 논문의 저자에 의해 처음으로 제안된 무차원 동영향 함수법(NDIF법 또는 경계노드법)<sup>(1)</sup>은 경계 요소법<sup>(6)</sup>과 같이 이차원 문제를 일차원 문제로 단순화하여 수치 계산량을 최소화할 수 있는 장점을 가지고 있다<sup>(1~5)</sup>. 더 나아가 NDIF법은 해석 대상 평판의 경계를 이산화하기 위하여 경계요소법과 마찬가지로 노드들을 사용하지만, 경계요소법과는 차별적으로 노드들 사이에 보간함수(interpolation function)를 사용치 않는다. 이러한 이유로 해석 특

이 함수(singular function)의 적분과 같은 복잡한 수치 문제를 해결치 않아도 되며, 적은 개수의 노드들을 사용해도 정확한 해로 신속히 수렴되는 특징을 NDIF법은 가진다<sup>(1)</sup>.

그간 저자의 계속된 연구를 통해 NDIF법은 일차원 문제(현, 빔)에서 이차원 문제(멤브레인, 평판)까지 고정단, 단순지지, 자유단 등의 여러 가지 경계조건을 가진 경우에 대하여 확장되었다<sup>(1~5)</sup>. 더 나아가, 경계에 아주 오목한 부분 또는 내부에 구멍을 가진 임의 형상 멤브레인에 대해서도 NDIF법이 적용되었다<sup>(2)</sup>.

가장 최근에 저자는 자유단 경계조건을 가진 임의 형상 평판에 NDIF법을 적용하는 것을 성공하였지만<sup>(5)</sup>, 평판의 형상이 원이나 타원 등과 같이 곡선형일 경우에만 NDIF법을 적용할 수 있는 한계를 가졌다.

† 교신저자; 정희원, 한성대학교 기계시스템공학과  
E-mail : swkang@hansung.ac.kr  
Tel : (02)760-4228, Fax : (02)760-4329

이 논문에서는 곡선형 평판뿐만 아니라 삼각형, 사각형 등과 같이 평판의 형상이 다각형인 경우에도 NDIF법을 성공적으로 적용할 수 있는 방법이 새로이 제안된다.

이 논문의 주 연구 대상인 다각형 평판은 경계가 직선 모서리(edge)들로 이루어져 있고, 두 모서리가 만나는 지점에는 꼭지점(corner)이 존재하기 때문에, 이전의 곡선형 평판을 위해 개발된 지역 극좌표계(local polar coordinate)<sup>(5)</sup>를 사용하는 것은 불가능하다. 왜냐하면 직선 모서리의 경우 곡률 반경이 무한대이기 때문에, 곡률 반경을 필요로 하는 지역 극좌표계를 정의하기가 힘들어지기 때문이다<sup>(5)</sup>. 또한 다각형 평판의 꼭지점은 두 모서리가 만나는 지점이기 때문에, 두 모서리 중 어느 모서리를 기준으로 해서 접선 및 법선 방향을 정의해야 할지 등의 꼭지점에서의 접선 및 법선 방향의 설정이 매우 모호하다.

유한요소법<sup>(9)</sup> 및 경계요소법<sup>(6)</sup>의 경우는 노드와 노드 사이에 생성된 요소(element)에 경계조건을 적용하기 때문에, 이 논문에서와 같이 꼭지점에 위치한 노드에 경계조건을 적용하는 과정은 필요치 않다. 반면에 NDIF법이 자유단 경계조건을 가진 다각형 평판에 성공적으로 적용되기 위해서는 꼭지점에 위치한 노드들에서의 경계조건이 반드시 고려되어야 한다는 사실이 이 논문에서 새로이 밝혀졌다. 자유단 평판의 경우, 꼭지점에 노드를 할당하지 않고 모서리에만 노드를 할당할 경우에는 타당한 고유치 해석 결과가 나오지 않음이 이 연구에서 확인되었다. 반면에, 고정단 평판에 NDIF법을 적용하는 저자의 과거 연구<sup>(3)</sup>에서는 꼭지점에 노드를 할당하지 않아도 고유치 결과에는 별 차이가 없었다.

이 논문에서는 상기와 같은 문제점을 해결하기 위해 모서리와 꼭지점을 분리하여 별도의 경계조건을 적용하는 방안을 제안한다. 직선 모서리에 대해서는 극좌표계 대신에 곡률 반경을 정의할 필요가 없는 직각좌표계(cartesian coordinate)를 사용하는 방안을 이용하였다. 그리고, 꼭지점에 대해서는 양쪽 모서리에서 발생하는 비틀림 모멘트가 합쳐지는 과정에서 집중응력<sup>(8)</sup>이 생기게 되므로, 꼭지점에서의 경계 조건은 모서리에서의 경계조건과는 다른 경계 조건을 이용하는 방안이 이 논문에서 개발되었다.

마지막으로, 이 논문에서 제안된 방법의 검증을

위해 자유단 경계조건을 가진 스타디움(stadium) 형상 평판과 임의 사각형 평판에 대해 NDIF법이 적용되었으며, 구해진 고유치들은 FEM(ANSYS) 결과 비교되어 이 논문의 타당성이 검증되었다.

## 2. 이론 정식화

### 2.1 자유 진동해 가정과 경계조건

자유단 경계를 가진 평판의 자유진동에 관한 지배방정식과 자유단 경계조건은 다음과 같이 주어진다<sup>(7)</sup>.

$$\nabla^4 W - \Lambda^4 W = 0 \quad (1)$$

$$\Lambda = (\rho\omega^2 / D_E)^{1/4} \quad (2)$$

$$M_n(W) = 0 \quad (3)$$

$$V_n(W) = 0 \quad (4)$$

여기서  $W$ 는 평판의 진동 변위,  $\Lambda$ 는 주파수 파라미터(frequency parameter),  $\rho$ 는 평판의 밀도,  $\omega$ 는 각주파수(angular frequency),  $D_E$ 는 판강성(flexural rigidity of plate),  $M_n$ 은 모서리에서의 모멘트,  $V_n$ 은 모서리에서의 수직력(vertical force)을 뜻한다.

이 연구에서는 평판의 자유 진동 해를 Fig. 1과 같이 평판의 경계를 따라 설정된  $N$ 개의 노드들  $P_1, P_2, \dots, P_N$ 에 대해 정의된 무차원 동영향 함수(NDIF)들의 선형 결합으로 다음과 같이 가정한다<sup>(3)</sup>.

$$W(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \{A_k J_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|) + B_k I_0(\Lambda |\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|)\} \quad (5)$$

여기서  $J_0$ 와  $I_0$ 는 각각 제 1종 및 제 2종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며,  $A_k$ 와  $B_k$ 는 미지 상수이다. 그리고 Fig. 1에서 알 수 있듯이  $\mathbf{r}$ 은 평판 내부의 임의 점에 대한 위치 벡터,  $\mathbf{r}_k$ 는 평판 경계에 위치한 노드에 대한 위치 벡터를 뜻한다.

가정된 자유진동해 식(5)가 평판 경계 위의 노드들  $P_1, P_2, \dots, P_N$ 에서 자유단 경계 조건을 만족하도록 하기 위해서, 모서리를 따라 연속적으로 정의된 경계 조건인 식(3)과 (4)를 다음과 같이 이산화한다.

$$M_n(W(\mathbf{r}_k)) = 0, V_n(W(\mathbf{r}_k)) = 0 \quad (6,7)$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

## 2.2 모서리에서의 이산 경계조건

앞의 서론부에서 언급한 바와 같이 모서리에 위치한 노드에 자유단 경계 조건을 적용하기 위해서는 직각좌표계에 대해 표현된 경계조건식이 사용된다. 이를 위해 Fig. 1과 같이 각각의 모서리에 대한 지역 직각좌표계(local Cartesian coordinates)가 이용된다.

예를 들면, 첫 번째 모서리 위에 있는 노드  $P_1$ 에 자유단 경계 조건을 적용하기 위해서는 Fig. 1과 같이 직각좌표계  $(x_1, y_1)$ 을 사용한다. 이 경우 좌표축  $x_1$ 의 방향은 모서리 방향과 일치하도록 설정된다. 또 다른 예로 두 번째 모서리 위에 위치한 노드  $P_6$ 에 경계조건을 적용하기 위해서는 직각좌표계  $(x_2, y_2)$ 를 사용한다. 상기와 같은 지역 직각좌표계에 대해 자유단 경계조건 식 (6)과 (7)를 표현하면 각각 다음과 같다<sup>(7)</sup>.

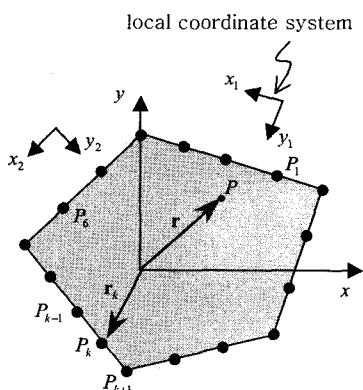
$$M_n(W(\mathbf{r}_k)) = -D_E \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y_i^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} \right) = 0 \quad (8)$$

$$V_n(W(\mathbf{r}_k)) = -D_E \left( \frac{\partial}{\partial y_i} \nabla^2 W + (1-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial^2 x_i \partial y_i} \right) = 0 \quad (9)$$

$\mathbf{r}_k$  : 모서리노드의 위치벡터

## 2.3 꼭지점에서의 이산 경계조건

앞에서 언급한 바와 같이 NDIF법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 노드와 노드 사이에 보간함수(interpolation function)을 사용치 않기 때문에, 노드에 직접 경계조건을 적용해야 한다. 결과적으로 유한요소법과 경계요소법은 평판의 꼭지점에



## 2.4 시스템 행렬과 고유치 유도

고유치를 얻기 위한 시스템 행렬을 유도하기 위하여, 앞에서 가정한 자유 진동해 식(5)에 이산 경계 조건이 적용된다. 이를 위해 모서리에 위치한 노드들에는 경계조건 식(8)과 식(9)를 적용하고, 꼭지점에 위치한 노드들에는 경계조건 식(12)를 적용하면, 다음과 같은 하나의 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{plate}(\Lambda) \mathbf{C} = \mathbf{0} \quad (13)$$

여기서  $\mathbf{SM}_{plate}(\Lambda)$ 은 해석 대상 평판의 시스템 행렬을 뜻하며, 이 행렬은 주파수 파라미터  $\Lambda$ 의 함수이다. 그리고  $\mathbf{C}$ 는 식(5)에서 설명한 미지 상수들로 구성된 시스템 벡터로 다음과 같다.

$$\mathbf{C} = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]^T \quad (14)$$

평판의 고유치는 시스템 행렬식이 영(zero)이 되게 하는 주파수 파라미터 값으로부터 구해질 수 있다.

$$\det(\mathbf{SM}_{plate}(\Lambda)) = 0 \quad (15)$$

그런데, 식(15)에 의해 구해진 고유치들 중에는 평판의 고유치 뿐만 아니라, 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유치 까지도 포함되어 있음이 지금 까지의 연구에서 밝혀졌다<sup>(3,5)</sup>. 이러한 멤브레인의 고유치를 잉여 고유치(spurious eigenvalue)라 부르며, 잉여 고유치는 식(15)와 같이 해석 대상 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 시스템 행렬식  $\det(\mathbf{SM}_{mem})$ 을 나누어 주는 방법에 의해 제거될 수 있다<sup>(3)</sup>.

$$\frac{\det(\mathbf{SM}_{plate})}{\det(\mathbf{SM}_{mem})} = 0 \quad (16)$$

최종적으로 잉여 고유치를 제외한 평판의 고유치

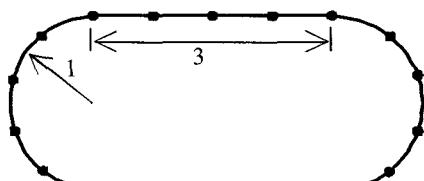


Fig. 3 Plate of a stadium shape discretized with 18 nodes

는 식(16)을 만족하는 주파수 파라미터들로부터 구해진다.

## 3. 비교 예제

이 논문에서 정립한 NDIF법을 검증하기 위하여, 꼭지점 없이 곡선과 직선 모서리로 이루어진 스타디움(stadium) 형상 평판과 꼭지점이 있는 임의 사각형 평판에 대한 고유치 해석을 수행하였다.

### 3.1 스타디움 형상 평판

Fig. 3은 이 예제의 해석 대상인 스타디움 형상 평판의 모양을 보여준다. 그럼에서 확인할 수 있듯이 스타디움 형상은 꼭지점을 가지지 않음을 알 수 있다. 결과적으로 식(12)와 같은 꼭지점 경계조건식은 이 예제 해석에서는 적용되지 않았다.

한편 평판의 양쪽에 있는 곡선 모서리에 위치한 노드에 대한 지역 직각좌표계는 Fig. 4와 같이 설정하였다. 즉, 경계의 접선 방향이 지역 직각좌표계의  $x_k$  방향이며, 법선 방향이 지역 직각좌표계의  $y_k$  방향이다.

Table 1은 총 18개의 노드가 사용되었을 경우의 고유치 해석 결과를 보여준다. 식(15)를 이용하여 구한 잉여 고유치 제거 전의 해석 결과는 Table 1의 두 번째 열에서 확인할 수 있다. 식(16)에 의해 구해진 잉여 고유치 제거 후의 해석 결과는 세 번째 열에서 확인할 수 있으며, 네 번째와 여섯 번째 고유치 1.71과 2.06은 잉여 고유치임을 알 수 있다. 참고로 여기서 잉여 고유치는 해석 대상 평판과 같은 형상을 가진 멤브레인의 고유치에 해당한다<sup>(3)</sup>.

이 논문에서 구한 평판의 고유치들(세 번째 열)을 네 번째 열의 FEM (ANSYS) 해석 결과와 비교해 볼 때 두 결과 사이에 거의 없음을 확인할

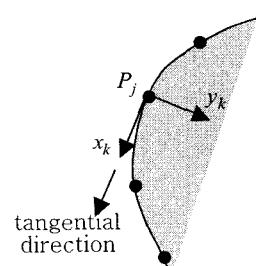


Fig. 4 Local Cartesian coordinates for node  $P_j$

Table 1 Eigenvalues of the stadium plate

Modes	Method of NDIF		FEM by ANSYS (error)
	With spurious eigenvalues	Without spurious eigenvalues	
1	0.97	0.97	0.98 (1.0 %)
2	1.24	1.24	1.25 (1 %)
3	1.64	1.64	1.62 (1.2 %)
4	1.71	-	-
5	1.86	1.86	1.84 (1.1 %)
6	2.06	-	-

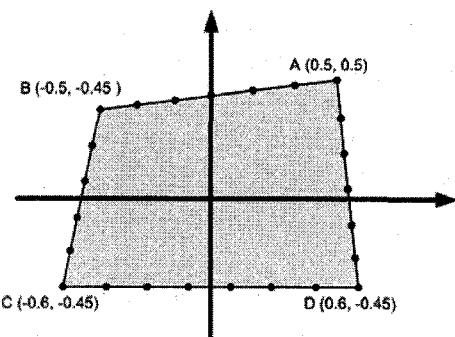


Fig. 5 Arbitrarily shaped quadrangular plate discretized with 20 nodes (unit: m)

수 있으며, 결과적으로 이 논문에서 제안하는 방법은 곡선형 평판에도 유용함을 확인할 수 있다.

### 3.2 임의 사각형 형판

이 예제에서는 앞의 예제와는 달리 꼭지점이 존재하는 다각형 평판에 대한 해석이 이루어졌다. Fig. 5는 이 예제의 해석 대상인 임의 사각형 평판의 모양을 보여준다. 총 20개의 노드를 사용하여 해석 대상 평판의 경계가 이산화되어졌다. 이 예제의 경우 네 개의 꼭지점을 가지고 있기 때문에 네 개의 꼭지점에 위치한 노드들에는 식 (12)의 경계조건이 적용되었으며, 나머지 노드들에 대해서는 식 (8)과 (9)의 경계조건이 적용되었다.

Table 2는 고유치 해석 결과를 보여주며, 표의 두 번째 열은 잉여 고유치(spurious eigenvalues) 제거 전의 해석 결과이고, 세 번째 열은 잉여 고유치 제거 후의 고유치 결과이다. 이들 평판의 고유치와

Table 2 Eigenvalues of the quadrangular plat

Modes	Method of NDIF		FEM by ANSYS (error)
	With spurious eigenvalues	Without spurious eigenvalues	
1	3.67	3.67	3.61 (1.7 %)
2	4.16	4.16	4.13 (0.7 %)
3	4.44	-	-
4	5.12	5.12	5.08 (0.8 %)
5	5.64	5.64	5.7 (1.0 %)
6	6.08	6.08	6.03 (0.8 %)

FEM(ANSYS) 해석 결과를 비교해 볼 때 오차가 거의 없이 아주 정확함을 확인할 수 있다.

## 4. 결 론

이 논문에서는 NDIF법을 이용하여 자유단 경계를 가진 임의 형상 평판에 대한 자유진동해석 기법을 정립하였다. 평판의 직선 및 곡선 모서리에 자유단 경계조건을 적용하기 위하여 지역 직각좌표계를 사용하는 방법이 제안되었다. 특히, 지금까지 기존의 연구에서 다루지 않았던 다각형 평판의 꼭지점에서의 자유단 경계조건을 고려할 수 있는 방안이 새로이 제안되었다. 끝으로 이 논문의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 비교 예제 해석 결과를 제시하였다.

## 후 기

이 연구는 2006년도 한성대학교 교내 연구비지원 과제임.

## 참 고 문 헌

- (1) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, "Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 221, pp. 117~132.

- (2) Kang, S. W. and Lee, J. M. 2000, "Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.
- (3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2001, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions", Journal of Sound and Vibration, Vol. 242, No. 1, pp. 9 ~ 26.
- (4) Kang, S. W., 2002, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamics Influence Function", Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.
- (5) Kang, S. W., et. al., 2003, "Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions", Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.
- (6) Brebbia, C. A., 1978, The Boundary Element Method for Engineers, New York: John Wiley & Sons.
- (7) Meirovitch, L., 1967, Analytic Methods in Vibrations, New York: Nacmillan Publishing, pp. 179~182.
- (8) Timoshenko, S., 1959, Theory of Plates and Shells, New York: McGRAW-HILL, pp. 83~85.
- (9) Hughes, T. J. R., 1987, The Finite Element Method, Englewood Cliffs : Prentice-Hall.