

대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 擬似(의사) 분석적 사고와 분석적 사고에 대한 분석 - 중학생 대상의 사례 연구 -

박 현 정* · 이 종 희**

본 연구의 목적은 문제해결의 결과로 나타나는 성공과 실패에 대한 학생들의 사고 과정을 유사성의 관점에서 이해하고자 하는 것이다. 따라서 사례연구 방법을 사용하여 정답을 제시한 학생들의 사고과정이 반드시 바람직하지 않을 수 있다는 擬似 분석적 사고와 분석적 사고에 대한 Vinner(1997a, 1997b)의 연구내용을 근거로 학생들의 사고과정을 분석하고자 하였다. 본 사례 연구 분석 결과, 학교 성적이 중상위권인 2명의 연구대상자들은 각각 擬似 분석적 사고와 분석적 사고를 함으로써 대수 문장제 해결에서 성공하거나 실패하였다. 학생들의 擬似 분석적 사고와 분석적 사고의 특징은 구조적 유사성의 구성에서 각 연구 대상자들이 인식한 해법 공식이 변형이 가능한 것인가의 여부와 해법을 적용하는 과정에서 학생 자신의 사고를 통제하거나 조절할 수 있는가의 여부에 따라 구분된다는 것이었다. 따라서 본 연구에서는 학생들이 해법으로 인식하는 공식의 형태가 어떠한 것이며, 그러한 해법을 어떻게 적용하는가를 유사성의 관점에서 문제 해결의 성공 여부와 관련하여 분석할 수 있었다.

I. 서 론

학교 수학에서 학생들이 주로 하는 활동은 수학적 개념에 대한 학습 활동이나 전형적인 문제를 해결하는 활동이다. 이러한 활동에서 대개의 교사들은 자신들이 제기하는 질문이나 문제에 대한 학생들의 결과적인 답안이 정답인지지를 매우 중요시한다. 이때, 학생들이 문제 해결에서 성공하는 경우에 교사들은 학생들의 사고과정에 대하여 다시 재고하지 않는 경우가 대부분이다.

대부분 학생들은 현 문제에서 필요한 해법이 무엇인가에 대하여 생각하지도 않고, 이전 경험에 대한 피상적인 기억만으로 해법을 구할 수 있으며, 그 해법이 교사가 기대하는 정답일

수도 있다. 특히, 문제 해결활동에서 학생들은 이전 경험이나 지식과 현 문제와의 유사성을 근거로 해법을 생각하는 경우가 많다. 이와 같은 유사성은 문제 해결의 성공을 위하여 강조되는 중요한 발견술중의 하나이다. 우정호(2003)는 유사성을 바탕으로 하는 유추적 사고는 일상적 사고나, 수학·과학적 사고에서와 마찬가지로 교수 상황에서도 자연스럽게 나타나는 것이며, 적절하게 사용하면 그것은 매우 뛰어난 사고 방법이며, 발견방법이라고 했다. 그러나 학생들이 이전에 경험한 문제들과 현 문제 간의 유사성을 적용하여 정답을 얻었을 때도, 사실은 잘못된 방법으로 문제를 해결하는 경우도 있다. 그러므로 학생들이 유사성을 근거로 문제를 해결할 때, 결과적인 문제해결의 성공과 실패에 대한 그들의 사고 과정이 어

* 이화여대대학원, hyunjp88@naver.com

** 이화여자대학교, jonghee@ewha.ac.kr

떠하였는가에 대하여 생각해 볼 필요가 있다.

Vinner(1997a, 1997b)는 개념 혹은 문제 해결에 관련된 사고에 대하여, 학생 자신들이 참지식(true knowledge)을 소유하고 있지 않으면서도, 교사들이나 다른 평가체계로부터 참지식을 가지고 있는 것으로 평가받을 수 있는 사고 양식을 두 가지로 구분하였다. 하나는, 기본적인 개념 학습에 관련된 사고 양식인 擬似 개념적 사고(pseudo conceptual thought)¹⁾이며, 다른 하나는 전형적인 문제 해결에 관련된 사고 양식인 擬似 분석적 사고(pseudo analytical thought)이다. 이러한 사고 양식들을 바탕으로 하는 擬似지식은 그 동안 수학교육연구에서 비판의 대상이 되어 온 알고리즘 중심의 학습 등에서 지적되어 오던 것이다(김남희, 1997).

이와 같은 擬似사고들은 모두 이전 문제에 대한 커버스토리와 같은 내용상의 유사성을 바탕으로 하며, 매우 일시적이며 즉흥적인 연상으로 이루어진 것이다. 더군다나 수학 교실에서 흔히 나타날 수 있지만 교사들이 알아채지 못할 수 있는 현상이라는 점이 중요하다. 그렇지만 교사들이 擬似지식에 대한 가능성은 인식하지 않는다면 자신도 모르게 학생들의 참지식이나 擬似지식에 의한 결과에 대해 동일한 평가를 내릴 수 있기에 그 중요성을 간과할 수 없을 것이다. 그러므로 유사성을 근거로 하여 나타나는 학생들의 행동과 그 이면의 사고를 분석해 보는 것은 유의미한 연구라고 생각한다.

Vinner(1997b)는 Skemp(1976)의 관계적 이해와 도구적 이해에 대한 연구 결과물을 바탕으로 擬似 분석적 행동에 대한 예시와 그러한 행동의 원인을 분석적 행동과 비교하여 설명하였

으며, 그때의 문제유형들은 이전 문제와 내용만이 유사하고 다른 공식을 사용하여야 하는 유사 문제(similar problem)였다. 하지만 실제로 학생들의 문제 해결 행동을 분석하여 제시한 것이 아니다. 그리고 문제해결과정에서 학생들이 인식한 유사성이 어떠한 것인지에 대한 구체적이며 세부적인 서술은 거의 없었다. 단지, Vinner는 학생들이 문제들 간의 표면 유사성과 희미한 기억만으로 문제를 해결하였기에 그러한 행동들이 나타났다는 설명과, 각 행동의 예시로서 다른 연구 결과를 사용하여 설명한 것이 전부였다.

본 연구에서는 Vinner(1997a, 1997b)의 연구 결과 내용을 기초로 하여 이전의 문제 해결 경험이나 <예제>를 근거로 유사 문제인 검사과제를 해결하는 사고과정을 유사성의 관점에서 재조명하고자 한다. 박현정, 이종희(2006)는 대부분 문제를 해결하기 위하여 학생들이 인식하는 유사성은 어떠한 것인가를 고찰하고자 사례연구를 실시하였다. 본 연구의 목적은 문제해결 과정에서 학생들이 인식하는 유사성이 어떠한 것인가에 중점을 두고자 하는 것이 아니라, 발견술로 인식한 유사성을 근거로 학생들이 문제 해결에 성공하거나 실패할 때, 문제해결의 성공과 실패 이면에 있는 학생들의 사고과정은 어떠한 것인가를 이해하고자 하는 데 있다. 따라서 본 연구에서는 박현정 등(2006)의 연구에서 사용한 동일한 자료를 토대로 하여, “중학생들이 문제해결에서 성공하거나 실패하는 경우에 나타나는 사고 과정의 특징은 유사성과 어떤 관련이 있는가(분석적 사고와 擬似 분석적 사고의 관점에서)?”라는 연구문제를 해결함으로써 본 연구 목적을 달성하고자 한다.

1) Vinner의 연구들(1997a, 1997b)에서는 擬似 분석적 사고에 대한 영어 표현으로 ‘pseudo analytical thought’라고 하였는데 본 연구에서는 사고를 의미하는 thought(사고의 결과로 마음에 품게 되는 생각)를 교육 연구에서는 사고 과정의 측면을 강조하는 경우에 사용하는 thinking으로 서술하였다.

Vinner(1997b)는 개념적 사고와 분석적 사고를 완전하게 분리하는 것은 불가능하지만 해당 상황의 초점이 어떤 것인가에 따라 그 사고의 유형을 범주화할 수 있다고 하였다. 따라서 본 연구의 초점은 문제 해결 활동이기 때문에 학생들의 분석적 사고와 擬似 분석적 사고 과정의 분석에 초점을 두고자 한다. 그러나 이론적 고찰에서는 擬似 사고에 대한 이해를 위하여 擬似 개념적 사고와 擬似 분석적 사고에 대한 내용을 간단히 설명할 것이다.

II. 이론적 고찰

본 장에서는 Vinner(1997a, 1997b)의 연구 내용을 근거로 하여 개념적 상황과 문제 해결 상황에 대한 사고 유형과 그 관계, 그리고 본 사례 연구의 근원이 되는 분석적 사고와 擬似 분석적 사고에 대한 이론적 내용이 서술된다.

1. 擬似지식과 참지식

유사성에 관련된 문제해결의 추론은 예제를 풀기 위하여 인식한 문제구조가 검사과제의 문제구조와 유사하다는 것을 파악할 수 있는 능력에 관련된 것이며, 이것은 성공적인 문제 해결을 위한 토대라고 할 수 있다. 특히, 대수 문장제 해결 능력과 관련하여 전문가는 해법뿐만 아니라 문제 정보의 구조적인 면을 기억하는 경향이 있는 반면에, 초심자는 문제에 대한 질문 형태나 문맥, 커버스토리와 같은 표면적인 문제 정보의 세부적인 면만을 기억하는 경향이 있다고 했다(예를 들면, English & Halford, 1995; Krutetskii, 1976; Silver, 1981). 이러한 경향 때문에 초심자인 학생들은 전문가와는 다르게 즉흥적이거나 자연스러운 연상을 근거로 주

어진 문제에 대한 해법을 생각할 수 있으며, 또한 올바르게 이해하지 못했으면서도 교사의 질문이나 문제에 대하여 정답을 함으로써 마치 알고 있는 것처럼 행동할 수 있다.

Vinner(1997a, 1997b)는 학생 자신들이 교사가 기대하는 참지식을 소유하고 있지 않으면서도, 교사나 다른 평가체계로부터 그러한 지식을 가지고 있는 것처럼 보이는 擬似지식에 대한 사고 양식을 두 가지로 구분하였다. 하나는, 기본적인 개념 학습에 관련된 사고 양식인 擬似 개념적 사고(pseudo conceptual thought)이며, 다른 하나는 전형적인 문제 해결에 관련된 사고 양식인 擬似 분석적 사고(pseudo analytical thought)이다.

본 연구는 학생들이 주어진 문제의 해법을 구하는 과정에서 나타내는 사고에 대한 연구이다. 따라서 Vinner(1997a, 1997b)의 연구에서 서술된 결과적인 측면을 강조하는 ‘사고(thought)’를 사고과정의 측면을 강조하는 ‘사고(thinking)’로 서술하고자 한다.

擬似 개념적 사고와 擬似 분석적 사고에 대해, Vinner(1997b)는 매우 자발적이며, 자연스러운 사고이지만 통제가 되지 않는 연상들(associations)이라는 점에서 공통점을 갖는다고 강조하였다. 그러나 이러한 擬似 사고는 각각 다른 의미에 초점을 두고 두 개의 상황들로 구분된다. 먼저 擬似 개념적(또는 개념적)이라는 상황의 초점은 개념에 있다. 이때 개념은 수학 학습에서 대상이 되는 단어들의 의미나 기호, 그리고 수학적 의미에 대한 것이다. 그리고 두 번째 상황인 擬似 분석적 상황(또는 분석적)은 문제 해결 과정에 초점을 둔 사고이다. 그러나 개념적 상황과 분석적인 상황이 항상 구분된다 고는 볼 수 없다. 그럼에도 불구하고 개념적 상황과 분석적인 상황을 구분해야 하는 이유는 해당 상황에서는 항상 강조되는 하나의 개념이

있기 때문이라고 Vinner(1997a, 1997b)는 서술하였다. 따라서 Vinner(1997b)는 주어진 문맥의 초점이 문제 해결에 있다면, 그 문맥에서의 주된 활동은 학생들이 주어진 문제 상황을 분석하여 적합한 해법 절차를 찾는 것이기에 그 상황은 분석적이거나 擬似 분석적인 사고에 대한 것이라고 하였다. 반면에 주어진 상황의 주된 과정이 개념이나 그 개념들의 상호관계, 그리고 적용에 초점을 둔다면, 그 상황은 개념적이거나 擬似 개념적인 사고에 대한 것이라고 볼 수 있다. 본 사례 연구의 초점도 문제 해결 과정에 기여 분석의 대상을 문제 해결 과정에 대한 사고인 분석적이거나 擬似 분석적 사고에 초점을 두고자 한다.

그 밖에 중요한 것은 擬似 개념과 오개념은 매우 관계가 깊다는 사실이다. 대개 두 개념 사이에 선을 긋는다는 것이 어렵다. 그렇지만 오개념 이론의 한 부분으로서 擬似개념을 생각할 이유는 없다는 사실에 주목해야 한다 (Vinner, 1997b). Vinner(1997b)는 오개념은 인지적 기본연구 내에서 일어나지만, 擬似개념은 인지적인 기본연구 밖에서 일어난다는 점에서 차이가 있다고 하였다. 오개념은 인지적인 연구의 결과이며, 인지적 노력의 결과이다. 이러한 인지적 노력은 잘못된 생각을 만들게 할 수 있으며, 그것이 오개념이다. 반면에 擬似 개념적인 행동이 일어날 때, 거기에는 인지적인 노력이나 시도가 없다. 단지 擬似개념은 사고 과정이 통제되지 않은 연상과 이전에 경험한 문제 해결에 대한 희미한 기억을 근거로 하는 즉흥적인 사고라고 볼 수 있기 때문이다. 이러한 사고는 피상적인 유추와 피상적인 일 반화로 결론이 날 수 있다. 이와 같이 擬似개념과 오개념 사이의 구별은 결과적인 학생들의 행동자체만으로는 판단할 수 없는 것이다. 그러므로 많은 경우에서 특정 사건이 오개념

의 결과인가, 아니면 擬似 개념적 사고 과정의 결과인가를 결정하는 것이 불가능할 수 있다. 그것은 누군가의 마음속에서 정말로 무엇이 일어났는가, 우리가 확실히 알 수 없는 어떤 것에 달려있다. Vinner(1997b)는 다음과 같은 두 개의 시나리오를 제안하였다. 첫 번째 시나리오는 오개념으로 생각될 수 있는 경우에 대한 것이다. 예를 들면, $(A+B)^2=A^2+B^2$ 과 같은 실수에 대한 가정적인 사고 과정은 다음과 같을 수 있다. $(A+B)^C$ 을 전개하는 과정에 $(A+B)C=AB+BC$ 의 규칙이 유사하게 적용될 수 있다. 즉, $(A+B)^C=A^C+B^C$ 과 같이 말이다. 만일 사고 과정이 이러했다면, 그것은 오개념으로 보는 것이 불가능하다. 이러한 사고에는 인지적인 부분이 포함되지만, 학생들은 틀림없이 학급에서 여러 번 보았던 공식에 문자대신에 수를 대입해서 계산하고 그 숫자로 표현되는 결과를 비교해 볼 수 있는 통제 절차가 부족했던 것이라고 볼 수 있다(Vinner, 1997b). 이런 부분에 초점을 맞춘다면, 이것은 擬似 분석적 사고 과정이라고 볼 수 있다. 반면에, 다음과 같은 사고 과정도 일어날 수 있다. 예를 들면, 예제에서 $(A+B)C=AC+BC$ 을 학습하고, 그 다음 제시되는 연습 문제에서 $(A+B)^2=A^2+B^2$ 으로 해결하였다면, 이 사고과정은 擬似 분석적 사고 과정에 해당된다고 보는 것이 Vinner의 입장인 것이다. Matz(1980)는 “실수는 비록 전에 습득한 지식을 새로운 상황으로 적용하기 위한 성공하지 못한 시도이다. 그렇지만 타당한 결과이다.”라고 주장했다. Vinner (1997a)는 이러한 부류에 속하지 않는 실수, 즉 이전 경험을 근거로 새로운 상황으로 적용하는 과정에서 저지른 실수가 성공하는 경우를 擬似 개념적이거나 擬似 분석적이라고 생각하였다. 이와 같은 擬似사고는 대부분 어떠한 식의 응용과정보다는 직사각형의 넓이를 구하는 공식

과 같이 전형적인 경우에 가능할 것이라고 하였다. 그렇지만 대부분 擬似 개념적인 것에서 개념적인 것으로의 통로는 ‘연속적’일 수 있다. 그러므로 그들 간의 경계선에 속하는 경우들은 문제를 해결할 수 없는 상태로 남아있을 수 있다.

2. 擬似 분석적 사고와 분석적 사고

Vinner(1997b)는 ‘분석적’이라는 용어의 의미를 설명하기 위하여 전형적인 문제를 해결하는 학생들의 분석적 사고과정을 [그림 II-1]과 같이 제시하였다.

[그림 II-1]과 같이, 만일 학생들에게 문제(X)를 제시하면, 그때 학생들은 주어진 수학 문제의 유형과 특정한 구조를 보고 정신적 도식(schema)을 결정하는 (B)를 활성화하며, 문제(X)에 대한 유형과 구조를 결정하기 위해 분석 할 것이다. 이때 결정된 문제의 유형과 구조를 (Y)라고 한다. 그렇게 결정된 (Y)에 의해서 관련된 해법절차들의 모임(pool)인 (A)에서 해법 절차를 선택하며, 그 단계를 (Z)라고 한다. 마지막으로 (Z)를 (X)에 적용하는 과정이 이뤄진다.

이러한 분석적 사고에 반하여, 擬似 분석적 사고 과정은 [그림 II-2]와 같이, 문제(X)를 제시하면, 학생들은 ‘전형적인 질문과 그 해법 절차들에 대한 모임(A’에 속하는 질문들 중에서 주어진 질문과 유사하다고 생각하는 이전에 경험했던 어떤 문제와 그 해법에 대한 정신적 도식을 결정하는 (B’)을 활성화한다. 그것은 현 문제(X)와 이전 문제와의 표면 유사성을 근거

로 이전에 경험한 문제(Z’)에 동일시하는 과정이다. 따라서 (A’)인 해법 절차를 현 문제(X)에 적용할 것이다.

Vinner가 분석적 사고와 擬似 분석적 사고 과정을 설명하기 위하여 사용하였던 Skemp(1976)의 직사각형 면적 문제 해결 과정을 [그림 II-1]의 각 단계에 대한 기호와 연관시켜서 유사성의 관점에서 설명하자면 다음과 같다. 각 변의 길이가 7cm, 5cm인 직사각형의 면적을 구하는 문제(X₁)와, 한 변의 길이가 7cm이고, 둘레가 24cm인 직사각형의 면적을 구하는 문제(X₂)를 학생들에게 제시하는 경우, 가능한 분석적인 사고 과정은 다음과 같다. 우선, 학생들은 해당 문제가 면적 문제이며, 그 면적은 직사각형에 대한 것이라는 생각부터 문제를 풀기 시작할 것이다(B단계). 여기서 ‘면적 문제’란 생각은 문제 내용에서 공통적으로 서술된 대상의 속성 즉, 직사각형이나 주어진 길이를 통하여 유사한 문제라는 생각을 하게 되는 표면 유사성²⁾을 구성함으로써 가능한 것이다. 제시된 정보의 관계를 분석하면 그러한 생각을 할 수 있을 것이다(Y단계). 여기서 구조적 유사성³⁾이 구성된다. 그 다음에는 해답을 구하기 위한 구체적인 과정이 필요한데 즉, “직사각형의 면적은 두 변의 곱이지만 문제에서 주어진 변은 단 하나이다. 그리고 또 다른 것은 둘레이다. 둘레는 가로와 세로의 합의 두 배이다. 그러므로 둘레를 2로 나누면 가로와 세로의 합이 나온다. 그 값에서 주어진 한 변의 길이를 빼면 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있다.”와 같은 해법을 구하는 과정에 대하여 생각할 것이다.

2) 표면 유사성은 해당 문제의 해법과는 관련이 없지만, 문제 내용을 구성하는 다양한 대상들(objects)과 대상들의 속성(feature), 그리고 대상이나 속성들을 서술하거나 표현하는 방식과 문제 상황에 대한 서술 내용에 대한 유사성을 말한다(Gentner et al., 1997).

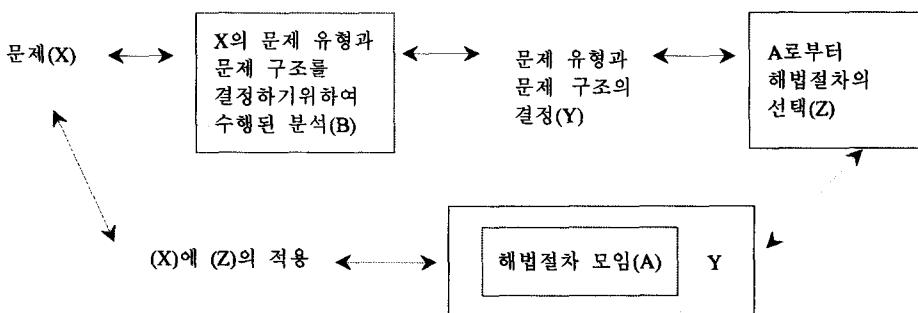
3) 구조적 유사성은 문제 해결자가 주어진 문제를 해결할 수 있다고 생각하는 해법 원리나 공식이 이전에 경험하였던 문제의 해법 원리와 유사하다고 생각하는 것을 말한다(Gentner et al., 1997).

이와 같이 주어진 문제 정보와 서술된 내용을 근거로 학생이 생각하게 되는 직사각형의 면적을 구하는 해법들의 모임에 대한 생각들 가운데서 해당 문제에 적합한 해법을 결정하게 되는 단계가 (Y)에서 (A)를 결정하는 단계와 (Z)의 단계에 해당된다. 이때 그 세부적인 과정을 ‘절차’라고 하며, 문제들 사이에서 이러한 절차에 대하여 구성되는 유사성이 절차적 유사성⁴⁾이다.

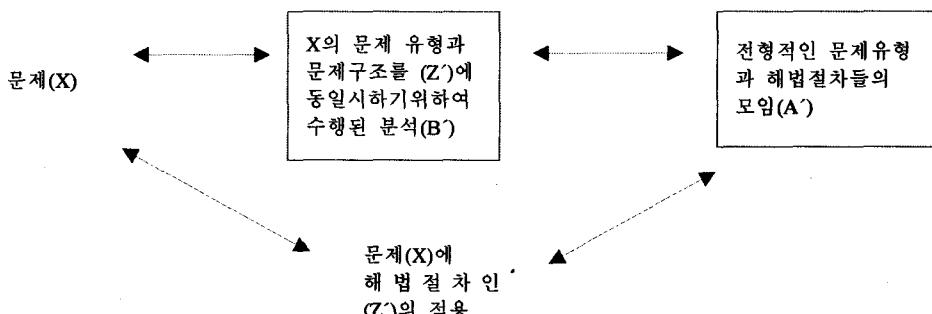
그리고 문제 해법을 구하기 위하여 관련된 원리를 적용하고, 구체화하기 위한 식을 세우고 전개하는 과정, 즉 직사각형의 나머지 변의

길이를 구하기 위한 산술 과정과 그 길이의 필요성을 인식하여 정보를 동원하고 조직화, 분류하는 과정은 절차적 유사성이 구성되는 것이다. 그러한 단계들을 거쳐서 마지막으로 그 결정한 해법을 적용하여 구체적인 산술과정을 통하여 해답을 구하는 것이 Vinner가 말하는 분석적 사고라고 볼 수 있다.

주어진 직사각형 면적 문제(X_2)는 Reed(1993, 1999)의 문제 유형 분류에 의하면, 표면적인 정보는 유사하지만 문제 구조가 다른 문제(X_1)의 유사문제이다. 여기서는 두 번째 변을 구하기 위한 전략을 결정하는 것이 필요하다. 그러한



[그림 II-1] 유사 문제 해결에서의 분석적 사고 과정(Vinner, 1997b)



[그림 II-2] 유사 문제 해결에서의 擬似 분석적 사고 과정(Vinner, 1997b)

4) 절차적 유사성(procedural similarity)은 해당 문제에서 제시한 자원들과 결과물에 대한 인과관계인 해법 원리나 관련된 아이디어를 목표달성을 위하여 구체적인 연산들로 변형하는 구체적인 연산과정에 대한 유사성을 말한다(Chen, 2002)

구체적인 전략을 수행하는 과정이 절차에 해당된다. 擬似 분석적 사고의 경우는 문제(X_1)과 문제(X_2)를 동일시하여 문제를 해결할 것이다. 이때 동일시하는 과정이 (B')단계에 해당된다. 그렇게 생각함으로써 이전에 해결했던 문제인 (X_1)과 주어진 (X_2)를 동일시하여 해당 문제를 ‘직사각형의 문제’라고 생각할 것이다. 따라서 문제(X_2)를 문제(X_1)와 동일한 문제라고 생각하여, (X_1)에 적용하였던 해법, 즉 문제에서 주어진 두 수의 곱이라고 생각을 해당 문제의 해법이라고 결정할 것이다. 이 과정이 (A')단계이다. 따라서 문제에서 주어진 둘레와 길이를 곱하는 (Z')단계를 수행할 것이다. 여기서 擬似 분석적 사고를 하는 학생은 우선 피상적인 정보를 바로 자신이 이전에 풀었던 문제들과 동일한 범주의 문제라고 생각하여 동일한 해법 절차를 적용한다. 이때 처음으로 구성된 표면 유사성은 직사각형과 길이라는 단어만으로 동일한 문제로 생각하는 구조적 유사성과 두 수의 곱이라는 단순한 해법 절차 즉, 절차적 유사성의 구성이 이뤄졌다고 볼 수 있다. 그 결과로서의 해답은 문제 조건에 따라 정답이나 오답이 될 수 있다.

[그림 II-1]의 경우에는, 현 문제에 적합한 해법 절차를 선택하는 과정에서 ‘재구성’의 단계가 포함된다. 그것은 문제 유형과 구조를 표시하기 위한 작성(Y)에 의하여 구성된 유사성을 바탕으로 생각해낸 ‘관련된 문제 해법들에 대한 모임’에서 현 문제에 적합한 해법 절차를 선택하기 위한 단계였다. 그리고 절차가 선택된다. 그러나 擬似 분석적 사고 과정을 나타낸 [그림 II-2]에서는 그러한 과정이 없다. 학생 자신이 구성한 유사성을 바탕으로 이전의 해법 절차가 그대로 적용되었다. 하지만 결과적인 답은 정답이 된다.

이러한 분석적 사고 과정은 선형적인 단계들

을 거친다고 볼 수도 있지만 보통은 그렇지 않다. 주어진 문제(X)의 구조와 유형은 학생들이 기억하는 해법 절차들의 모임에 의해서 결정된다. 하지만 문제의 유형과 구조의 선택이나 그 다음의 과정도 한 방향으로만 진행되는 것이 아니다. 잘못된 과정이 있다고 생각되면 되돌아올 수 있다. 이러한 분석적 사고 과정에서의 순환 과정은 Carlson & Bloom(2005)의 수학자들의 문제 해결에 대한 사고 과정의 연구 결과와 유사하다고 볼 수 있다. 수학자들은 문제 이해, 식의 계획과 실행, 그리고 반성이라는 1차적인 문제 해결 과정과, 문제 이해나 식의 계획 단계에서 이뤄지는 ‘상상-추측-검토’라는 2차 순환과정에 의해서 다시 순환된다는 연구 결과가 그것이다. 또한 문제들 간의 어떤 친숙한 특징을 인식함으로써 관련된 문제의 해답이나 그 해결 방법이 회상된다는 부분은 Polya (1971/2002, 1964/2005)의 발견술에서 유사성을 바탕으로 문제를 해결하는 과정과도 유사하다고 볼 수 있다.

그러므로 지금까지 목인되어왔다고 볼 수 있는 문제 해결에 대한 결과적인 성공과 실패 이전의 학생들의 사고과정을 현 문제와 이전 경험이나 지식과의 유사성의 관점에서 학생들의 사고가 무엇 때문에 어떠한 과정으로 전개되는가에 대한 이해는 학생들의 사고를 파악하는 중요한 자료를 제공한다고 볼 수 있을 것이다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 및 절차

본 연구의 목적은 Vinner(1997a, 1997b)의 연구 내용을 바탕으로 문제 해결에 대한 결과인 성공과 실패에 대한 학생들의 사고를 유사성의 관점

에서 분석하고자 하는 것이다. 이러한 연구 목적을 달성하기 위해서는 학생들의 사고를 심층적으로 분석하는 과정이 필요하다. 그 과정은 어떠한 표준화된 질문지에 대한 학생들의 반응에 대한 결과적인 서술만 아니라, 학생들의 문제 해결 과정을 이해할 수 있는 보다 세부적이며, 미리 정해지지 않은 범주의 발견을 가능하게 하는 질적인 연구 방법이 필요하다고 볼 수 있다.

그러므로 본 연구에서는 연구 목적에 부합되는 자료를 수집하고, 수집된 자료를 근거로 학생들이 문제 해결 과정에 대한 사고 과정을 심층적으로 분석하고 기술하기 위해서 각각 학생 개인들 간의 차이를 바탕으로 심층적인 정보와 체계적이며, 내포적인 정보를 이해할 수 있는 사례연구 방법(Patton, 2002)⁵⁾과 문제 해결 과정에서 학생들의 사고 과정이 분석적인 경우와 擬似 분석적인 경우에 대한 그 과정과 특징에 대한 이해와 통찰을 얻기 위하여 사례들을 선택하는 의도적 표본 추출(purposeful sampling)을 사용하였다. 특히, 결과보다는 유사성을 구성하는 과정과 해법을 구하는 과정을 충실히 이해하기 위하여 사례에 대한 심층연구를 위하여 선택된 이슈에 대하여 상세히 기술하는 심층적인 서술(thick description)을 하였다.

사례연구에 대한 면담은 2005년 11월 말에서 12월 초순까지 2명의 학생들을 대상으로 2시간 동안 한 차시에 걸쳐서 시행하였다. 면담 내용

과 과정은 처음에는 연구자의 소개와 본 면담의 목적을 설명하고, 연구 대상자들이 자신들이 이전에 학습하였던 일 문제에 대한 기억을 다시 해 낼 수 있도록 <예제>를 제시하였다. 그 <예제>는 <7-가 단계>와 <8-가 단계> 수학교과서에서 제시하는 문제 구조와 동일한 단순구조이다. 학생들이 주어진 문제에 대한 경험을 기억할 수 있도록 학생들의 질문에 대한 간단한 설명을 하고 <예제>를 해결할 수 있도록 하였다. 그리고 본 연구자의 역할은 관찰자의 역할에 중점을 두었으며, 안내자나 조언자의 역할을 최소화하였다.

자료 분석과정에서 자료들은 독자들에게 의미를 주는 하나의 해석 안에서 압축되고 함께 연결하여 해석하기 위하여 본 연구자는 연구대상자들을 면담한 모든 면담 내용을 전사하였고, 그 전한 내용물인 전사본과 연구 대상자들이 문제 해결 과정을 기록한 노트들, 그리고 연구자의 메모나 기록물들을 준비하여, 각 사례에 대한 사실을 전술하는 내러티브 기술(narrative description)을 사용하고, 사례내 분석(within-case analysis)과 사례간 분석(cross-case analysis) 방법(Creswell, 2006)을 사용하여 분석하였다.

특히, 사례 간 분석에서 발견된 범주에 명명하고 발전시키기 위해서는 텍스트 안에 포함되어 있는 생각과 사고 및 의미가 드러나도록 하는 분류 체계인 범주적 집합(categorical aggregation)⁶⁾을

5) 사례 연구는 정성적 연구의 전형 또는 정성적 연구의 동의어로 사용되는 경우가 있고, 이를 민족 지학적 연구, 참여관찰 연구, 근거이론 등과 동일시하는 경우가 있어서 그 의미이해에 혼란이 있다. 따라서 여러 연구들에서는 사례 연구를 다른 정성적 연구와 구별하여 그 특징을 분명하게 규명한다. Strauss & Corbin(1994)은 다원적인 방법을 사용하여 이론의 검증과 확인의 목적으로 수행되는 연구를 사례 연구라고 하였다. Creswell(1998)은 사례 연구를 시간과 장소가 한정된 연구해야 할 사례(프로그램, 사건, 활동, 개인 등)를 관찰이나 면담, 그리고 오디오-비디오 자료, 문서 자료 등의 수집된 다양한 정보원들을 탐구함으로써 사례가 속해 있는 부류의 특징적 양상을 파악하는 연구라고 정리할 수 있다 는 것이라고 하였다. 결국 사례연구의 특징은 연구하려는 현상에 대해 얻은 지식이 좀 더 구체적이고, 맥락적이며, 독자의 해석에 의해 발전할 수 있음을 시사한다(우정호외, 2006).

6) 범주적 집합은 자료 분류 단계에서 사용하는 사례 연구 용어이며, 근거이론에서 말하는 개념을 발견하고, 명명하고 발전시키기 위해서는 텍스트를 열어 젖혀서 그 안에 포함되어 있는 생각과 사고 및 의미가 드러나도록 하는 개방형 코딩과 유사하며, 현상학에서 전술을 분류하는 가장 첫 단계와 유사한 분류 단계에서 사용하는 용어이다(Creswell, 2006).

사용하여 그 설례를 찾았다. 이러한 방법들을 사용하여 자료를 분석함으로써 연구 대상자들의 사고가 분석적인 경우와 그렇지 않은 擬似 분석적인 경우로 범주화하여 그 특징을 서술할 수 있었다.

2. 연구 대상

본 연구 수행을 위한 표집 방법은 연구자가 탐구하고자 하는 과정, 사건 등에 대하여 접근 할 수 있는 사례를 선택하는 의도적 표본 추출이다. 따라서 연구자가 의도하는 연구를 위한 적절한 사례를 찾기 위해서는 먼저 사례 선정을 위한 기준이 마련되어야 한다. 그리고 누구를 면담하고 무엇을 관찰할 것인지를 결정하기 위해서도 판단의 기준이 필요한 것이다(우정호 외, 2006). 이러한 기준 선정은 사례 연구의 신뢰성과 타당성을 증진시키기 위한 기준과 절차를 정립하는 것이기 때문이다.

본 연구 문제 설정의 맥락과 그 맥락에서 요구되는 사례에 대한 정보를 수집하기 위한 의도적 표본 추출 전략의 근거를 서술하면 다음과 같다.

먼저, 본 연구에서는 유사문제를 해결하는 과정에서 유사성을 근거로 문제를 해결하는 경우에 나타나는 분석적 사고와 擬似 분석적 사고에 대한 이해를 목적으로 하는 것이다. 그러므로 학습의 효과를 검증하고자 하는 연구가 아니기에, 검사 도구로 제시하는 검사과제들(일차 방정식과 연립 일차 방정식의 활용)에 대한 학습이 이뤄진 상태이어야 한다. 또한 주어진

문제에 대한 답을 제시할 수 있어야 하며, 그 답안은 擬似 분석적인 경우와 분석적인 경우를 찾을 수 있는 학생들이어야 한다.

그러므로 연구 대상자들은 주어진 문제에 대한 정답을 제시할 수 있어야 하며, 동시에 그 정답을 제시하는 학생들의 사고가 擬似 분석적인 경우와 분석적인 경우를 찾을 수 있는 경우 이어야 한다. 따라서 수학 성적이 너무 상위권이거나 하위권의 학생들보다는 중위권 범위에 속하는 학생들이 대상이 되는 경우에 보다 풍부한 자료 수집이 가능할 것이라고 볼 수 있다.

본 연구자는 위에서 제시한 표본 추출에 대한 2가지 근거를 만족하는 학생들을 선정하기 위하여 본 연구자가 연구가 가능한 경기도 소재의 B중학교 2학년 담당 수학교사들에게 본 연구의 목적과 연구 문제, 그리고 본 연구자의 개념적 틀에 대하여 상세히 설명을 하고 본 연구에 적합한 사례를 찾을 수 있는 학생들을 선정해 줄 것을 부탁하였다. 수학 교사들은 5명의 여학생을 선정하여 주었다. 선정된 5명의 여학생들을 대상으로 면담을 한 결과, 문제 풀이 과정이 너무나 기계적이거나 본 연구의 자료로 적합하지 않은 경우를 제외하고 2명의 여학생들⁷⁾을 본 연구 대상자로 선정하여 사례 연구를 수행하였다.

3. 검사 도구

학생들의 문제 해결 활동에 대한 결과인 성공과 실패에 대한 사고 과정을 유사성의 관점

7) 학생A는 수학을 매우 좋아했으며, 초등학교 때는 아주 잘하는 편이었지만 중학교에 와서는 영어 공부 때 문에 그렇게 공부를 많이 하는 것은 아니라고 하였다. 학생A는 학교 수학 성적이 1학기와 2학기 모두 90 점 이상이었으며, 중위권에서도 상위권에 속하는 학생이었다. 그리고 학생B는 수학을 매우 잘하고 싶어 하는 학생이었으며, 학교 수학 성적은 85점에서 90점이며, 90점을 넘는 경우도 있었다. 학생B는 수학 문제를 해결하다가 만일 자신이 이해하지 못하는 수학 문제는 수학을 잘하는 학생의 풀이 과정을 그대로 따라한다고 했다. 그리고 중위권 학생들 가운데서도 중위권에 속하는 학생이었다.

에서 분석하기 위하여 유사성에 대한 문제 해결에 관련된 실험 연구들(예를 들면, Reed, 1993, 1999; Reed, Dempster, & Ettinger, 1985; Silver, 1981)에서 사용되었던 검사과제들을 조사하였다. 그 결과, 그 과제들은 혼합물 문제와 일 문제, 그리고 다른 영역의 일차 방정식의 활용 문제들로 우리나라 제 7차 수학교육과정의 <7-가 단계>와 <8-가 단계>의 ‘일차방정식의 활용’과 ‘연립방정식의 활용’에 수록된 문제들과 유사한 문제들이라는 것을 알 수 있었다. 또한 우리나라에서 수행된 유사성에 관련된 연구들(예를 들면, 이종희, 김진화, 김선희, 2003; 이종희, 김부미, 2003)의 검사과제들도 일 문제와 혼합물 문제 등을 포함하는 것이었다.

이러한 유사성에 대한 과거 연구들에서 사용되었던 검사과제 이외에도 학생들이 구성하는 유사성에 관련된 연구인 Lobato(1997)와 Wagner(2003)의 연구에서 사용된 문제들이 있다. 그러나 Lobato(1997)는 학생들이 구성하는 유사성의 구성에 초점을 둔 연구였지만 ‘기울기 개념’에

대한 이해에 중심을 둔 연구였으며, Wagner(2003)는 통계나 확률의 기본 개념에 대한 학생들의 이해 발달에 초점을 둔 연구였다. 본 연구는 수학적 개념보다는 문제 해결 과정 자체에 초점을 둔 연구이기에 개념에 관련된 과제들은 적합하다고 볼 수 없다. 그 이외에 다른 문제를 사용한 유사성에 대한 최근 연구들은 찾을 수 없었다.

따라서 이러한 연구들과 수학교과서 분석을 근거로 검사과제를 제작하고, 그 타당도를 확인하기 위하여 서울지역에 소재한 중학교에서 수학 성적이 중상위권에 속하는 학생 2명을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 그 결과, 혼합물문제의 경우는 두 학생 모두에서 획일화된 방식을 사용하였으며, Silver(1981)의 문제들인 ‘예금액 구하기’와 ‘나이 계산’이나, ‘동물 다리 수’와 같은 문제들은 너무 쉽게 해결하였기 때문에 풀이과정에 대한 유의미한 해석이 불가능하다고 판단하였다. 그리고 <7-가, 8-가 단계>의 ‘일차방정식의 활용’과 ‘연립방정식의 활용’

<표 III-1> 검사 도구로 사용된 과제

예 제	방의 페인트칠을 완성하는데 아버지는 4시간 걸리고 아들은 6시간이 걸린다고 한다. 그렇다면 만일 그들이 함께 일한다면 몇 시간 걸리겠는가?		
검 사 과 제	아버지와 아들(S-1)	형과 동생(S-2)	어머니와 딸(S-3)
	아들이 거실의 페인트칠을 완성하는 시간은 12시간이며, 아버지는 8시간이다. 이때 먼저 아버지가 전체 거실의 $\frac{1}{4}$ 을 먼저 페인트칠을 하시고 난후에 나머지 거실을 아버지와 아들이 함께 페인트칠을 하려고 할 때, 그 일 마치는데 몇 시간이 걸리겠는가?	형은 그의 집 정원에 있는 문의 페인트칠을 완성하는데 9시간이 걸리고, 동생은 12시간이 걸린다. 형과 동생이 4시간 동안 함께 페인트칠을 한 뒤 동생은 쉬고, 형 혼자서 나머지를 페인트칠하였다. 형이 혼자서 페인트칠을 마치는데 걸린 시간은 얼마인가?	어머니와 딸이 대문을 페인트칠 하려고 한다. 딸이 혼자서 페인트칠을 마치는데 6시간 걸리고 어머니 혼자서 하시면 4시간 걸린다. 그렇다면 쉬지 않고, 어머니와 딸이 둘이서 함께 대문을 페인트칠을 한다고 할 때, 완성하는데 걸린 시간을 얼마인가?(단, 어머니가 혼자서 1시간 먼저 페인트칠을 하신 후에, 나머지를 딸과 함께 페인트칠을 하셨다.)

단원에 수록된 예제와 익힘 문제, 그리고 연습 문제 유형들⁸⁾ 중에서 속력문제나 농도문제와 일문제의 수록 횟수를 분석한 결과, 너무 많이 다뤄지지 않은 일문제가 적합하다고 판단하여, 우리나라에서 수행된 유사성에 대한 연구들(예를 들면, 이종희, 김진화, 김선희, 2003; 이종희, 김부미, 2003)에서 사용한 일문제를 수정 및 보완하여 <예제>와 <유사문제> 3문제⁹⁾를 본 연구의 검사과제로 선정하였다.

IV. 사례 연구 결과 및 논의

본 사례연구 결과를 통하여 II장의 이론 고찰에서 언급되었던 분석적 사고와 擬似 분석적 사고는 유사한 문제를 해결하는 경우에서 발견할 수 있다는 Vinner(1997b)의 주장을 확인할 수 있었다. 그리고 분석 결과, 학생A는 분석적 인 사고에 의해 문제를 해결하였으며, 학생B는 擬似 분석적 사고로 문제를 해결한 것으로 나타났다.

1. 학생A의 사례연구 분석 결과 : 분석적 사고의 특징

학생A의 문제 해결에 대한 사고는 분석적 사고라고 볼 수 있다. 자신의 해법에 대한 타당성과 그 이유를 명확하게 설명할 수 있었으며, 어떤 알고리즘만을 근거로 하는 것이 아니었다. 또한 결과적으로 모든 검사과제 해결에

서 성공적으로 해법을 구할 수 있었다.

가. 표면 유사성과 차이점 비교

학생A는 모두 주어진 문제 해결의 문제의 정보를 이해하는 단계에서 주어진 문제와 이전에 경험하였던 문제들인, <예제>나 관련된 이전에 경험한 문제들과 현 과제에서 서술된 표면 정보들 사이의 표면 유사성을 인식하면서도, 동시에 ‘차이점’에 대하여 생각하였다. 주로 그러한 차이점의 인식은 문제 구조의 인식에 영향을 미쳤으며, 자신이 관련되어 생각하는 해법에 대한 통제와 반성을 가능하게 한 근원이 되었다.

<에피소드1>에서 제시하는 바와 같이, 학생A는 모두 해법을 구하는 과정에서 먼저 자신이 적용하려는 해법의 문제의 서술 내용상의 표면적 정보의 차이를 유사성과 함께 인식하였다.

<에피소드1: 문제(S-2) 해결>

연구자 : 이 문제는 이전에 풀었던 문제와 비교 할 때 어떤 생각이 들어요?

학생A : 이 문제도 비슷한 것 같아요. 이 문제 도 일을 다 하는데 걸리는 시간이구, 같이 하면 얼마나 걸리겠는가를 묻는 것인데, 다른 점은 동생은 쉬고 나머지를 형이 혼자서 다하는 것인니까.. 비슷해요.

연구자 : 그런 생각을 하면서 또 다른 생각은 안하나?

학생A : 그런 생각할 때 형이 한 시간하는데 걸리는 것을 구하고 동생도 구하고 그

8) 블랙, 교학사, 금성, 두산, 디딤돌 출판의 (7-가, 8가 단계) 수학교과서에서 “일차 방정식의 활용” 단원의 예제, 익힘, 연습문제의 문맥 내용을 분석한 결과, 속력이나 혼합물 문제보다는 일문제의 수록횟수가 가장 적었다.

9) 본 연구의 검사과제를 작성하는 과정에서 예비 검사를 한 결과, 학생들이 하나의 예제 문제에 대하여 3 문제를 초과한 상태부터는 해법에 대한 훈련의 효과가 나타났다. 따라서 본 연구는 어떤 교수 학습 방법에 대한 효과를 검증하는 것이 아니라, 학생들이 문제를 해결하는 그 상황에서 구성하는 유사성을 근거로 문제를 해결하는 현상에 대한 이해가 목적이었기에 훈련의 효과는 의미가 없는 것이다. 따라서 유사 문제 3문제를 검사도구로 선정하여 수행하였다.

리고 같이하는 시간을 구하고 그리고 다음에 남은 양을 형이 혼자서 하는 것이니까 형이 혼자서 하는 시간을 구해서...하면 되겠다는 생각을 동시에 해요.

나. 구조적 유사성: 변형이 가능한 열린 공식¹⁰⁾

학생A는 모두 주어진 문제와 표면적으로 유사한 문제들을 떠올리면서 동시에 그 문제들을 해결하기 위하여 사용하였던 해법들에 대하여 생각하였다. 학생A는 문제들 사이의 표면 유사성을 근거로 관련된 해법들에 대하여 생각하면서 각 문제에 적합한 형태의 해법으로 구성하였다. 학생A가 기억하는 해법은 알고리즘적인 형태의 것이 아니라, 발견술이었다. 따라서 학생A가 이전 경험을 근거로 해당 문제의 해법으로 생각하는 해법 공식은 자신이 생각하는 문제 상황과 연결되어 구성된 변형이 가능한 열린 공식이었으며, 그것이 구조적 유사성의 형태였다.

학생A가 기억하는 것은 <에피소드1>에서 서술된 바와 같이, 문제 해결의 절차나 순서에 대한 일련의 지식이었다. 특히 그러한 지식이 활성화되는데 필요한 것은 문제 이해 과정에서 단지 문제에서 서술된 단어나 문구의 뜻만이 아니라, 그 상황에 대한 이해이며, 문제에서 제시된 양적 정보들 간의 관계는 그 계산 순서나 절차와 같은 열린 공식의 개념이었다.

<에피소드2: 문제(S-1) 해결>

연구자 : 그러면 학생A는 문제를 읽을 때, 어떤 유사하다는 생각이 들면, 전에 풀었던 문제의 공식을 를처럼 머릿속에 딱 찍어놓고 푸는 스타일이에요? 아니면...

학생 A: 거의 그런 것 같은데...

연구자 : 그런데 전체 일이 아까 공식에서는 1이었는데 어떻게 4분의 3으로 되지?

학생A : 용용해서(웃는다)..

연구자 : 머릿속에 무슨 분의 x 플러스 무슨 분의 뭐는 1과 같이 집어넣는 것이 아니라 부분 부분을....

학생A : 네! ...하는 방식 같은 것을...

연구자: 그럼 예를 들어 무슨 분의 일이 해당되는 것은 들어가는 것이 뭐다. 뭐.. 이런 공식 같은 $x =$, 이나 $y =$, 이런 식으로 외우는 게 아니라, 이 부분에 들어가는 것은 뭐고, x는 뭐고 이런 식으로 생각해요?

학생A : 네!

연구자 : 말로 설명하면... 다시 해보면?

학생A : 그러니까 무슨 화학원소 외우듯이, 그리고 원주를 구하는 것을 외우듯이 그렇게 막 외우는 것이 아니라, 이런 문제가 나왔을 때는 이렇게 해서 풀어야 하고, 이것하고 저것을 더했을 때는 모가 되구... 이런 식으로 해야 하고 그러니까 계산 순서 같은 것을 기억하는 것 같아요. 그러니까 이것을 먼저하고 그러면 뭐가 나오고 그런 식으로 순서를 기억해요..

그것은 Reed(1999)가 문제 해결 과정에 적용하는 기본 공식은 알고리즘이 아닌 발견술로 적용하는 경우에만 문제 해결에 대한 수행을 올바르게 할 수 있다는 주장과 같은 의미라고 볼 수 있다.

다. 절차적 유사성: 문제 내용에 대한 정신적 모델과 표현 구성

학생A는 해법 원리에 대한 적용 과정에는 표기 과정과 그 표기에 대한 사고가 조합으로 구성되었다. 따라서 학생A의 사례 분석에서 문

10) 본 사례 연구에서는 연구 대상자가 주어진 문제를 해결하기 위하여 해법으로 문자나 숫자가 하나의 알고리즘 형태로 정해진 완성된 공식의 형태가 아니라 부분 부분으로 구성되는 발견술 개념으로 적용되는 공식을 열린 공식이라고 서술하였다.

제 해결에 대한 성공에 결정적인 요인을 과거 수행되었던 대부분의 유추 연구들에서 언급하였던 구조적 유사성만이라고는 볼 수 없을 것이다.

[그림IV-1, 2, 3]에서 제시하는 바와 같이, 학생A는 문제를 이해하는 과정에서 자신의 생각을 기록하고 다시 그 기록을 대상으로 사고하여 자신의 사고를 다시 기록하는 과정으로 문제 해결 과정을 표현하였다.

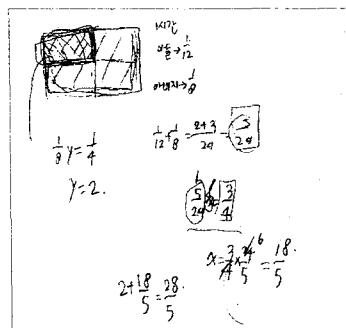
또 하나의 특징적인 사실은 학생A가 문제를 이해하는 과정에서 문제에서 서술된 문구나 단어를 근거로 그 상황을 ‘일을 하는 상황’이라고 생각하여 그 구체적인 세부 내용에 대하여 정신적 모델¹¹⁾을 구성하였다는 사실이다. 예를 들면, 학생A는 문제에 대한 내용을 설명하는 과정에서 양적 정보인 숫자 표현과 의미적으로 수학적 언어라고 볼 수 있는 ‘함께’나 ‘혼자서’와 같은 문구를 바탕으로 상황을 구체화하였다. 그 과정에서 기본 원리로 작용한 것이 ‘일의 비율’에 대한 공식이었으며, 그것은 열린 공식의 구성을 가능하게 하였다. 그러한

과정에서 가장 중요한 것은 자신의 사고와 그 사고에 대한 기록을 단계적으로 표현하는 절차적 유사성을 구성하였다는 것이다.

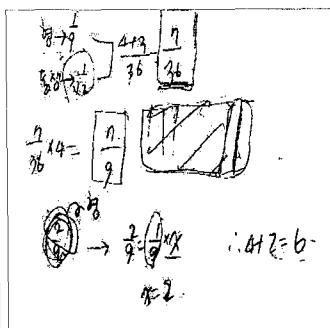
또한 그러한 사고과정에서는 [그림IV-1]에서와 같이 숫자나 문자의 표기와 그리기 식의 표기가 혼합되어 문제에서 서술되는 상황을 구체화하는 과정은 문제 해결 과정에 대한 통제의 과정으로 작용한 것으로 볼 수 있을 것이다. 그러한 표시 과정에 대한 근거는 문제에서 서술된 상황을 정신적으로 구성하면서 그 구체적인 세부 사항을 생각하는 과정에서 ‘일의 비율’에 관련된 원리를 바탕으로 하였다는 사실이다. 이러한 과정은 문제(S-2)나 문제(S-3)도 동일하며, [그림IV-2]와 [그림IV-3]에서도 확인할 수 있다.

2. 학생B의 사례연구 분석 결과 : 擬似 분석적 사고의 특징

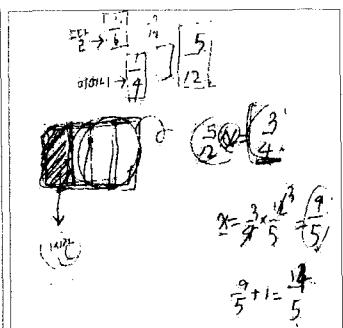
학생B의 문제 해결 과정에 대한 결과를 성공과 실패로 나눠볼 때, 문제(S-1)의 경우에서



[그림IV-1] 학생A: ‘문제(S-1)’ 풀이 과정



[그림IV-2] 학생A: 문(S-2) 풀이 과정



[그림IV-3] 학생A: 문제(S-3) 풀이 과정

11) 정신적 모델은 추상적인 표상(abstract representations)이며, 문제 내용에서 서술하는 상황들과 그 상황 안에 있는 문제에서 서술된 행위자나 대상들을 포함한다. 이러한 표상은 문장이나 공식, 그 표현에 대한 연산 등으로 구성되며, 그것은 새로운 표현들을 만들거나 그 이전 표현들을 변화시킬 수 있다.

는 성공하였으며, 문제(S-2, 3)의 경우는 실패하였다.

학생B가 문제해결에서 성공한 경우, 주어진 검사과제와 학생B의 사고 과정은 모두 ‘일을 하는 상황’이라는 문제에 대한 해법 공식을 달힌 공식¹²⁾으로 생각하여 그 공식을 구체화하기 위하여 자신만의 규칙을 그대로 적용하였는데, 그러한 규칙만으로도 정답을 낼 수 있는 문제(S-1)에서 성공을 한 것이다. 이때 학생B가 생각한 것은 주어진 과제가 ‘일을 하는 상황’이라는 표면 정보에 대한 확인과 문제에서 제시된 숫자 정보를 이전 문제를 푸는 과정에서 사용하였던 방법을 그대로 적용하는 것이다.

이러한 사고과정은 교사가 기대하는 참지식을 근거로 하는 분석적 사고라고 볼 수 없다. Vinner(1997b)는 타당한 시도가 아닌 타당한 결과에 대하여만 擬似 분석적 사고를 생각하였으며, 오개념으로 보일 수 있는 경우가 아닌 전형적인 경우만을 언급하고자 하였다. 따라서 오답을 제시한 문제(S-2, 3)의 경우는 擬似 분석적 사고의 경우라고 볼 수 없다.

그렇지만 본 사례연구를 통하여, 학생B의 사고가 擬似 분석적 사고라는 것을 문제 해결에서 실패한 경우를 통하여 파악할 수 있었다는 것은 중요한 사실이다. 만약에 직사각형의 넓이를 문제에서 제시된 두 수의 곱이라고 생각하는 학생이 있다고 했을 때, 만약 그 학생에게 가로와 세로의 길이가 주어진 문제들만을 제시한다면 그 학생은 모든 문제에 정답을 제시할 것이다. 그러나 만약 둘레와 한 변의 길이가 주어진 문제를 제시한다면 그 학생은

해당 문제에 대한 정답을 제시하지 못할 것이다.

하지만 그 학생이 정답을 제시하지 못한 그 문제에 대한 풀이 과정이 가로와 세로의 길이가 제시된 문제의 경우와 함께 서술되었다면 그것은 그 학생의 사고가 擬似 분석적 사고라는 것을 교사가 발견할 수 있는 단서가 될 수 있다.

그러므로 擬似 분석적 사고 과정에 대한 특징을 분석하는 과정에서 문제(S-2, 3)의 경우를 언급하고자 한다.

가. 표면 정보의 유사성을 근거로 동일한 자리지기 개념의 달힌 공식 적용

학생B는 자신이 생각하는 공식의 적용이 가능한 문제인 경우에는 교사가 기대하는 해답을 구할 수 있지만, 문제에서 제시된 양적 정보 구성이 학생B가 생각하는 공식을 그대로 적용해서는 해결할 수 없는 문제(S-2, 3)과 같은 경우에는 해답을 구할 수 없었다. 하지만 학생B가 제시한 답이 어떠한 것인가에 대한 문제보다는 그 해결 과정에 먼저 초점을 둘 필요가 있을 것이다.

학생B는 [그림IV-4]에서 나타난 바와 같이, 문제(S-1)을 해결하기 위하여 어떠한 양적 정보에 명칭을 붙이거나 숫자 정보들의 관계에 대한 표기 과정 없이 그대로 $\frac{1}{12}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4} = 1$ 라는 식을 먼저 세우고, x를 구하기 위하여 방정식을 간단히 하였다. 다른 과제의 경우도 마찬가지였다. 특히, 문제(S-1)에서는 학생B가 옳은 답을 제시하였다. 따라서 학생B의 행동은 교사가 기대하는 바람직한 것이라고 생각할 수 있었다.

12) 본 연구에서 서술되는 달힌 공식의 의미는 문제를 해결하기 위한 해법으로 알고리즘적인 공식으로 틀이 처음부터 존재하는 공식으로써 문제내용이나 구조가 어떠한 것이든지 변형이 되지 않는 공식을 말한다.

[그림 IV-4] 학생B: ‘문제(S-1)’ 풀이 과정

그러나 [그림 IV-5]에서 나타나는 바와 같이, 학생B는 문제(S-2)의 해법으로 $\frac{1}{9}x + \frac{1}{12}x + \frac{3}{4} = 1$ 라는 방정식을 세웠으며, 문제(S-3)의 해법으로는 $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{1} = 1$ 라는 방정식을 세웠다.

학생B는 일에 관련된 기본 공식인 “시간1 × 비율1+시간2 × 비율2=전체 일의 양”이라는 알고리즘으로서의 공식을 $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ 의 형태로 기억하고 있었으며, 이 형태를 변형시키지는 않았다. 학생B는 일에 관련된 문제에

어떤 해법 절차를 적용해야 하는지를 알고리즘 형식으로 기억하였으며, 문제들 간의 표면 유사성이 공식의 적용을 위한 근거가 되었다. 이와 같이 학생B는 자신의 문제 해결 과정에 대하여 어떠한 분석이나 통제를 하지 않았고, 자리지기 개념의 변수를 포함하는 공식을 사용하여 문제를 해결하였다. 그러한 과정을 <에피소드3>에서 확인 할 수 있다.

<에피소드3: 문제(S-3) 해결 과정에서>

학생B : 그러니까 이렇게 나누면... 직사각형으로 나누면 한 시간이잖아요! 애가 페인트 칠을 한 일의 양이 1/6이라고 하면.... 1/6 같아요 그냥 플로스..

연구자 : 엑스는 뭔데?

학생B : 애도 시간이요

연구자 : 같이 일한시간?

학생B : 네! 어머니는 1/4을 했을 것 아녜요.

연구자 : 응

학생B : 아까처럼 한다고 하면 근데 여기서 어머니가 한 시간을 먼저 혼자서 했다고 하잖아요. 그러니까 한 시간을 먼저 한 거잖아요. 그러니까 한 시간을 더 해 줘야 해요.

연구자 : 한 시간을 더해줘?

학생B : 한 시간인데, 음 애는 요 6시간이라서 한 시간을 쪼개서 1/6이 된 거잖아요.

[그림 IV-5] 학생B: 문제(S-2)와 문제(S-3) 풀이 과정

그러니까 1을 더해 가지고 1이 나왔다
고 하면....풀어 볼께요!(식을 세워 전
개한다)

연구자 : 왜? 이상해?

학생B : 여기가 x하고 x끼리 계산을 할 수 있
잖아요. 그러면은 $1/12$...그런데 여기서
 $+1$ 이요. 그럼 1이잖아요. 옮기면 -1이
될 것 아니에요? 그럼 0이 되잖아요?
그러면 답이 안 나오잖아요! $1/1$ 을 쓴
것 같은데...

<에피소드3>에서 제시된 바와 같이 학생B는

$\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ 의 공란을 채우기 위하여
마지막 변수에 어머니가 1시간 먼저 했다는 문
구를 근거로 ' $\frac{1}{\Delta}$ '을 기록한 것이다. 학생B에게
는 문제에서 서술되는 내용이 중요한 것이 아
니라, 자신이 생각하는 공식에 대입하기 위
하여 문제에서 서술된 숫자 정보의 제시 순서와
형태만이 중요하였다.

나. 알고리즘과 언어적 표현들 간의 관 계에 대한 이해 부족

학생B는 [그림IV-5]에서와 같이 문제(S-3)을 해

결하기 위한 방정식으로 ' $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ ', 라
는 알고리즘화 되어있는 공식을 생각하였다.
학생B가 생각하는 방정식은 나름대로의 규칙
을 통하여 세워진 것이다. 그러나 자신이 계획
한 방정식은 분석이나 개념적으로 이해한 것이
아니라 단지 이전 문제 해결 경험을 바탕으로
구성된 표면 유사성에 의해서 기억된 공식이기
때문에, 언어나 기호 사이의 관계에 대한 이해
가 완전하게 이뤄졌다고 볼 수 없다. 학생B의
공식과 규칙은 문제들의 해법 절차상에서의 유
사성으로 구성된 것이었다. 예를 들면, 학생B는
“어머니가 혼자서 1시간 일을 더 하셨다.”를 식
으로 나타내는데 자신의 규칙에 의하여 “역수

로 취하여 더 한다”라는 규칙에 의하여 ‘ $+\frac{1}{\Delta}$ ’
로 나타내었지만, 식의 전개에서 계속적으로
오류가 일어나자, 학생B는 산술적인 조작으로
만 그것을 해결하려고 하였다. 학생B의 이러한
행동은 언어적 표현과 이를 기호로 나타내는
표현 간의 이해가 부족하여 나타나는 현상이라
고 볼 수 있다.

다. 숫자 정보를 공식에 대입하기 위한 자신만의 규칙 존재

본 연구의 검사과제를 올바르게 해결하기 위
해서는 <예제>에서 사용하였던 해법 공식을 변
형해야 한다. 그러나 擬似 분석적으로 사고하는
학생B는 자신이 생각하는 해법의 알고리즘을
구현하기 위하여 숫자 정보가 제시된 순서대로
적용하였다. 이전에 경험한 관련된 문제를 성공
적으로 해결한 경험 때문으로 보인다. 학생B은
일의 공식에 대하여 ' $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ ', 과 같
은 알고리즘을 마음속에 가지고 있다.

처음에 주어지는 각각의 시간을 역수로 처음
과 두 번째 항에 대입하고, 마지막으로 주어지
는 항에서는 문제에서 마지막으로 주어지는 숫
자 정보를 대입하는 것이다. 학생B는 문제(S-1)
에서는 $12 \rightarrow 8 \rightarrow 1/4$ 순서로, 문제(S-2)에서는 $9 \rightarrow$
 $12 \rightarrow 1$ 의 순서로, 그리고 문제(S-3)에서는 $6 \rightarrow 4$
 $\rightarrow 1$ 의 순서로 자신이 생각하는 식에 대입하였
다. 그것은 단순히 문제에서 제시하는 언어적
인 정보만을 바탕으로 한 것이 아니라, 숫자
정보의 표면 유사성을 바탕으로 한 것이다.

이와 같이 학생B는 문제 해결의 마지막 단
계로 자신들이 기억하는 <일> 문제에 대한 변
형되지 않는 공식에 주어진 문제에서 제시되는
숫자 정보들을 자신들의 마음속의 규칙에 의해
서 대입하였다. 학생B가 실행하는 적용규칙이
라는 것은 자신들이 기억하는 해법 절차에 숫

자 정보를 대입하는 방법이다. 그것은 어떠한 원리나 개념에 대한 이해를 바탕으로 한 것이 아니라, 문제에서 제시된 순서에 의하여 공식에 대입할 수 있는 형태로 바꾸어 식에 대입하는 것이었다.

처음에 학생B가 문제 해결에서 성공하였던 문제(S-1)에서의 행동은 예로 들었던 그 학생에게 가로와 세로의 변의 길이가 주어진 문제를 제시하는 경우와 동일한 것으로 생각할 수 있다. 학생B는 <아버지와 아들>문제인 문제(S-1)를 해결할 때와 같은 절차를 <어머니와 딸>문제인 문제(S-3)에서 그대로 적용하려고 하였다. 문제(S-1)에서는 아버지가 혼자서 한 일을 ‘시간’으로 제시한 것이 아니라 전체 일에 대한 비율 ($\frac{1}{4}$)로 제시하였다. 따라서 학생B가 기억하는 규칙은 맨 나중에 나오는 양적 정보를 분수 형태로 바꿔서 더하는 것으로 식을 수립한 것이다. 학생B에게 그러한 양적 정보의 차원이 어떠한 것인가는 중요하지 않았다. 따라서 문제(S-3)에서도 ‘어머니가 1시간을 먼저 혼자서 폐인트칠을 하신 후에’라는 언어적 표현을 자신의 규칙에 따라 ‘1시간’의 ‘1’을 역수로 취하여 ‘ $\frac{1}{1}$ ’을 더한 것이다. 학생B는 문제에서 주어진 수의 역수를 더하여 성공하였던 기억을 바탕으로 규칙의 형태로 마음속에 두었던 것을 그대로 적용하는 ‘擬似 분석적 사고 양식’을 선택한 것이었다.

학생B의 ‘ $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ ’는 변형되지 않는 형태의 공식이었으며, 그러한 공식을 구체화하기 위한 자신들 만의 규칙 즉, 문제에서 제시되는 순서(형과 동생:9시간, 12시간, 4시간)대로 모두 역수를 취하여 문제에 대입하는 방식으로 해법을 구하였다. 만약 등식이 해결되지 않는 경우는 숫자의 형태를 바꾸거나 식의 연산을 바꾸는 식으로 식을 수정하였다.

3. 사례연구 분석 결과에 대한 논의

본 연구는 중학생들이 대수 문장제 해결에서 성공하거나 실패하는 경우의 사고 과정을 유사성과 관련하여 Vinner(1997a, 1997b)의 연구를 근거로 분석적 사고와 擬似 분석적 사고의 관점에서 분석함으로써 학생들을 사고를 이해하고자 하였다.

연구 대상자들의 문제 해결 수행에 대한 성공은 크게 두 가지 경우로 나눠서 생각해 볼 수 있다. 하나는, 모든 교사들이 학생들에게 기대하는 바람직한 사고에 의해서 이뤄진 문제 해결의 성공이며, 다른 하나는 바람직하지 않은 즉흥적인 연상에 의하여 문제를 풀었지만 해당 문제가 문제 해결자의 적용 규칙에 맞는 문제 유형이기에 정답을 제시할 수 있었던 경우이다. 이와 같은 경우의 사고에 대하여 Vinner(1997a, 1997b)는 바람직한 사고의 경우를 ‘분석적 사고’라고 언급하였으며, 바람직하지 않은 경우를 ‘擬似 분석적 사고’라고 하였다.

본 사례 연구 분석 결과, 분석적 사고에 대한 특징은 다음과 같다. 첫째, 주어진 문제에서 문제의 상황을 설명하는 텍스트를 바탕으로 이전에 표상하였던 문제 상황과 유사하다고 생각하는 표면 유사성을 구성하였다. 그리고 그렇게 표상한 문제 상황과 연결된 숫자 정보와 수학적 의미의 언어는 해법 원리로 생각하는 열린 공식을 구조적 유사성으로 구성하도록 한 것이라고 볼 수 있다. 둘째, 숫자 정보 등에 대하여 학생이 인식하는 수학적 원리나 개념은 주어진 문제 상황과 연결된 것이며, 이를 구체화하는 적용 과정은 해법 원리에 대한 자신의 사고 과정을 표시하면서 통제와 조절을 하였다 는 것이다.

Polya(1964/2005)는 문제 해결자가 문제를 사이에서 공통 성분, 즉 유사성을 발견하면 그것

에 관련된 수학적인 전체 정리를 회상하게 된다고 하였다. 이때 문제 해결자는 회상에 관련된 지식을 ‘동원’하여, 관련된 해법에 대한 관련 요소들을 재 조직화하는 과정이 필요하다고 하였다. 이러한 Polya의 발견술에 대한 견해는 분석적 사고의 경우와 같다고 볼 수 있다.

Polya는 문제를 해결하기 위해서는 먼저 문제의 전술 속에서 어떤 친숙한 특징을 ‘인식’해야 하며, 그 특징과 관련된 정리나 이전에 푼 문제의 해답 또는 그 해결 방법 등을 ‘회상’하여야 한다고 하였다(정은실, 1995). 여기서 ‘친숙한 특징’이라는 것은 문제들 간의 표면 유사성이라고 볼 수 있으며, 본 사례 연구의 연구 대상자들이 해당 문제를 이해하는 과정에서 표상한 문제 상황에 대한 정신적 모델을 구성하는 상황이라고 볼 수 있다. 그리고 문제 해결자는 그 문제를 해결하는 데 사용하였던 해법 원리를 그 표상과정에서 동시에 생각한다. 이것은 문제 해결자가 문제를 분석하고 이해하는 과정에서 일어난다. Polya는 그러한 인식과 회상만으로는 문제를 해결할 수 없으며, 관련된 해법 절차들의 요소들이 ‘동원’되고 그 사이를 매울 수 있는 ‘보충’하는 조작이 필요하다고 하였다. 또한 Polya는 새로운 재료의 도입 없이 단지 이미 제시된 요소들의 위치를 바꾸고 새로운 관계를 생각하는 재배열, 재분류를 함으로써 조직화에서 중요한 전전을 이룰 수 있다고 하였다.

이러한 사고과정은 본 사례 연구를 통하여 다음과 같이 해석할 수 있다. 먼저 연구 대상자들이 문제 상황과 연결된 해법 원리를 열린 공식으로 인식함으로써 문제에서 서술된 숫자 정보와 수학적 의미의 언어를 문제 목표와 이전에 사용하였던 해법에 대한 제약 아래, 문제 내용에 대한 자신의 사고를 표시함으로써 해법을 구체화하였다고 볼 수 있다. 문제 해결자가

문제의 해법을 구하는 과정에서 생각하게 되는 것을 기록하면서 문제 해법을 구성하는 요소들을 ‘분해’하고 다시 ‘결합’하면서 문제에 대한 관점을 좀 더 해결 가능성이 있는 모습으로 변해가게 한다는 Polya의 관점을 구체화하는 것이라고 볼 수 있다.

이와 같은 동원, 조직화나 분리, 결합의 과정은 본 연구에서는 이전 해법에 대한 지식들의 회상과 선택, 그리고 시각적으로 표시하는 과정으로의 재구성으로 표현되며, 이것은 문제들 사이의 절차적 유사성을 구성하는 과정이라고 볼 수 있다. 이러한 동원과 조직화, 그리고 결합과 분리는 문제 해결자의 조절이나 통제라는 계획적이고 의도적인 사고과정을 통하여 이뤄진다.

만일 문제에 대한 즉흥적이고 자연스러운 회상만을 따른다면, 그것은 Polya가 언급한 ‘인식’과 ‘회상’만을 따르는 것이 된다. Polya가 서술한 바와 같이, 그것만으로는 옳은 문제 해결에 이를 수 없다. 擬似 분석적 사고가 이러한 경우에 해당된다.

擬似 분석적 사고는 어떤 특징을 비교하거나 분석하는 관점이 아니라, 단서가 되는 단어나 구절만으로 문제 유형을 동일시함으로써 즉, 친숙한 특징만을 인식하고 회상하여 문제 상황과 연결되지 않은 변형되지 않은 단한 공식을 해법으로 구성하는 것이다. 이와 같은 바람직하지 않은 사고로 문제 해결에서 성공하는 경우를 본 사례 연구에서 살펴보면 다음과 같다.

擬似 분석적 행동에 대한 기본적인 인지 기능에는 두 가지가 관여되어있음을 확인할 수 있었다. 하나는 문제에 대한 유사한 부분을 동일시하는 것과, 다른 하나는 모방의 능력이었다. 그 이유는 해당 문제들이 <일> 문제 유형이라는 것을 인식하고 자신들의 알고리즘적인 규칙을 적용하려고 했기 때문이다. 만일 그러

한 인지 능력이 없었다면 擬似 분석적 행동의 요소들이 전개되지 않았을 것이다. 학생B가 나타낸 擬似 분석적 행동의 특징은 자신이 생각하는 해법을 적용하기 위한 규칙과 같은 방법만을 중요시하여 반복적으로 알고리즘을 적용한 것과, 알고리즘을 구체화하기 위한 자신만의 규칙, 알고리즘과 언어적 표현 간의 관계에 대한 이해 부족, 그리고 양적 정보에 대한 표면 유사성의 반영으로 나타났다. 이러한 연구 결과는 Vinner(1997b)가 제시하였던 표면 유사성과 희미한 기억 때문에 나타나는 擬似 분석적 행동들의 유형들을 보다 구체화한 것이다. 또한 연구대상자들이 문제에서 서술된 양적 정보의 제시 순서를 자신이 생각하는 규칙인, $\frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta}x + \frac{1}{\Delta} = 1$ 에 순서대로 적용하는 표면 유사성이 언어적인 측면뿐만 아니라, 숫자 정보를 더욱 중점으로 하여 반영한다는 실례도 찾을 수 있었다.

정리하면, Vinner는 단지 과거에 시행된 연구 결과들에서 제시 하였던 사례들에서 적합하다고 생각되는 것들(예를 들면, Matz, 1980; Nesher & Teubal, 1975)을 예로 제시하였지만, 본 사례연구에서는 실제 수집된 자료 분석을

바탕으로 범주화하고, 구체화할 수 있었다. <표 IV-1>는 Vinner의 분석적 사고와 擬似 분석적 사고에 대한 특징을 본 사례연구 결과와 비교하여 제시한 것이다.

본 연구 결과는 <표 IV-1>에서 제시된 바와 같이, Vinner의 연구에서 언급하였던 괴상적인 정보의 유사성으로 나타날 수 있는 擬似 분석적 사고의 특징이 모방과 표현이나 기호에 대한 이해 부족이라는 특징을 중심으로 제시되었던 단편적인 예를 보다 구체화한 것이다. 실제 경험적인 자료의 분석을 통하여 학생들의 擬似 분석적 사고가 문제들 간의 표면 유사성을 근거로 어떻게 전개되며, 그것은 해법을 구하는 과정에 어떠한 영향을 미치는가에 대한 내용을 관찰할 수 있었다.

본 사례 연구 대상자들이 문제 해결에서 실패하는 경우는 두 가지로 나눠서 생각해 볼 수 있다. 첫째는 문제 해결의 성공의 경우와 같이 표면 유사성과 구조적 유사성을 구성하여 해법을 구체화하는 과정에서 어떠한 계산상의 실수나 아니면, 사고에 대한 표현 구성을 완전하게 구성하지 못함으로써 문제 해결에서 실패하는 경우를 말한다. 그리고 두 번째의 경우는

<표 IV-1> 분석적 사고와 擬似 분석적 사고의 특징

	Vinner(1997b)	본 사례 분석 결과
분석적 사고	<ul style="list-style-type: none"> 통제와 조절, 반성이 가능한 사고 	<ul style="list-style-type: none"> 표면 정보에 대한 유사성과 차이점 인식 변형이 가능한 공식(열린 공식) 구성 문제 정보의 의미를 파악하여 정신적 모델 구성 사고에 대한 표현 구성
擬似 분석적 사고	<ul style="list-style-type: none"> 표면 유사성과 희미한 기억만으로 모방 시각적 표현과 개념 사이의 혼동 시각적 표현에 대한 이해 부족 	<ul style="list-style-type: none"> 표면 정보에 대한 차이점 인식 못함 변형되지 않는 공식(닫힌 공식) 구성 알고리즘을 구체화하기 위한 자신만의 규칙 알고리즘과 언어적 표현들 간의 관계 이해 못함 숫자 정보에 대한 표면 유사성의 구성

자신이 생각하는 알고리즘 지식에 따라 문제를 해결하고자 하였지만 문제 구조나 정보가 학생이 생각하는 구조와 다른 경우이다. 이 경우는 정답을 제시하면 擬似 분석적 사고라고 볼 수 있지만, 정답이 제시되지 않은 경우에는 擬似 분석적 사고라고 볼 수 없다. 그러나 어떤 학생이 擬似 분석적 사고를 하고 있다는 것을 교사가 파악하기 위해서는 다양한 유형의 문제를 해결할 때, 그 학생이 어떤 문제의 경우는 성공하고 다른 경우는 실패를 한다고 할 때, 그 학생이 일관된 해법 과정을 나타낸다면, 그 학생은 擬似 분석적 사고를 하고 있는 것이다.

본 사례 연구에서, 학생B는 문제(S-1)에서는 성공하였지만, 동일한 방법을 적용한 문제(S-2, 3)에서는 실패하였다. 그러한 학생B의 문제 해결의 실패가 연구자로 하여금 문제(S-1)에 대한 학생B의 사고가 擬似 분석적 사고임을 확인할 수 있도록 하였다. 학생B는 문제에서 서술된 상황과 연결되어 숫자 정보를 해법 원리에 적용하지 않았다. 자신이 기억하는 적용의 규칙

으로 해법을 구체화하고자 하였다. 이때 학생B가 구성한 구조적 유사성은 학생 관점에서 그 해법을 사용하면 본 문제를 해결할 수 있을 것이라고 생각하는 것이다. 따라서 연구자 관점의 구조적 유사성과는 동일하지 않은 것이다. 학생들의 문제 해결의 성공과 실패, 그리고 유사성의 구성에 대하여 정리하면 <표IV-2>와 같다.

<표IV-2>에서 제시하는 바와 같이, 유사성에 대하여 연구자의 관점과 학생의 관점은 다를 수 있다. 본 사례 연구에서 모든 연구 대상자들의 경우에 대하여 연구자와 동일한 관점의 유사성을 구성한 경우는 표면 유사성의 경우만이 모두 동일하다고 볼 수 있다.

교사들이나 연구자의 관점에서 본다면, 지금까지 유추나 전이 연구에서 서술된 연구 결과에 대한 서술 내용과 유사하게 문제 해결에서 성공하는 경우는 구조적 유사성의 구성이 되며, 실패의 경우는 표면 유사성의 구성이 관련된다고 볼 수 있다. 이러한 해석은 지금까지

<표IV-2> 유사성의 구성과 문제 해결의 성공과 실패

	문제 해결의 성공		문제 해결의 실패
	분석	擬似 분석적	
학생A	문제(S-1, 2, 3)		
	<ul style="list-style-type: none"> • 표면 유사성 (일을 하는 구체적인 상황) • 구조적 유사성 (문제 상황과 연결된 열린공식) • 절차 유사성 (숫자, 문자, 그리기) 	<ul style="list-style-type: none"> 문제(S-1) <ul style="list-style-type: none"> • 표면 유사성 (일하는 상황, 단어나 문장) • 구조적 유사성 (문제 상황과 연결되지 않은 닫힌공식) • 절차적 유사성 (규칙 적용) 	<ul style="list-style-type: none"> 문제(S-2, 3) <ul style="list-style-type: none"> • 표면 유사성 • 구조적 유사성 (문제 상황과 연결되지 않은 닫힌공식)
학생B			

유사성에 관련된 문제 해결에 대한 연구들(예를 들면, Gentner & Markman, 1997; Holyoak & Koh, 1987; Holyoak & Thagard, 1989; Markman & Gentner, 1997; Reed, 1999)에서 문제 해결의 성공에 대한 여부를 문제 해결 능력에 따라 인식되는 유사성의 유형이 다르다는 연구 결과들에 대한 내용과 비교해 볼 수 있다. 즉, 과거 유사성에 따른 문제 해결에 대한 연구에서는 문제 해법을 구하는 과정에서 실패에 대한 원인을 해당 영역의 초심자들이 이전 문제 해결에 대한 경험을 근거로 표면 유사성을 구성하여 문제를 해결하였기 때문이라고 해석하였으며, 문제 해결의 성공에 대한 원인을 전문가들이 구조적 유사성을 근거로 해법을 구했기 때문이고 해석하였다.

그렇지만 본 사례 연구 결과, 문제 해법에 대한 인식과정에서 학생들이 구성하는 구조적 유사성이 문제 상황과 연결되지 않은 닫힌 공식으로 인식한다면 결과적으로는 문제 해결의 성공과 실패의 경우가 다 가능하다는 것을 알 수 있었다. 이 경우에서 만일 학생들이 문제 해결에서 성공한다면 그것은 擬似 분석적 사고의 경우가 되는 것이다. 그러나 문제 해결에서 실패한다면 그것은 규칙을 적용하는 것만으로는 절차적 유사성을 구성할 수 없기 때문이다. 따라서 학생들이 인식과정에서 어떠한 해법 원리를 인식하느냐는 매우 중요한 요인이라고 볼 수 있으며, 그 해법 원리를 가운데 닫힌 공식과 같은 형태가 교사나 연구자에게는 구조적 유사성으로 인정되지 않는 경우였다고 볼 수 있다.

V. 결론 및 제언

본 사례 연구에서는 학생들의 문제 해결에

대한 성공과 실패에 대한 사고 과정을 Vinner (1997a, 1997b)의 분석적 사고와 擬似 분석적 사고의 경우로 구분할 수 있었다. 擬似 분석적 사고는 반복적인 알고리즘의 적용과, 알고리즘을 구체화하기 위한 자신만의 규칙, 알고리즘과 언어적 표현 간의 관계에 대한 이해 부족, 그리고 숫자 정보에 대한 표면 유사성의 반영으로 정리해 볼 수 있다. 이때 구성되는 구조적 유사성은 문제에서 서술되는 문제 상황과 연결되지 않는 일반적인 개념의 수학적 개념과 규칙으로 구체화된다는 것이다. ‘하나의 변형되지 않는 공식’과 학생 자신의 ‘규칙’이 적용되는 절차적 유사성이 구성되었다. 이때 해법 절차인, 공식과 규칙은 정형화되어 변형되지 않았다.

분석적 사고의 경우에는 사고의 모든 단계에서 통제와 조절이 이뤄졌다. 이러한 통제와 조절이 가능했던 이유는 이전 문제와 주어진 문제 사이에서 표면 유사성을 인식하면서도 차이점을 함께 생각하였기 때문이다. 다시 말해서 특정 관점에 대한 유사성과 차이점을 인식함으로써 학생들은 표면 유사성과 구조적 유사성, 그리고 관련된 원리나 개념의 기억과 변형이 가능한 공식의 구성과 적용의 과정으로 절차적 유사성을 구성하게 하였다. 이러한 유사성의 구성은 해법의 관련된 지식을 활성화한 것으로 볼 수 있을 것이다.

결론적으로 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 사고는 지각적인 부분에 의해 쉽게 즉흥적으로 반응할 수 있다고 본다. 인간의 자연스러운 사고 흐름으로 나타나는 현상은 擬似 분석적 사고와 같을 수 있으며, 그러한 擬似 분석적 사고 과정은 심리적인 이유가 어떠한 것이든 간에, 인지적으로는 표면 유사성을 근거로 어떠한 통제과정이 없이 이뤄지는 자연스러운 사고과정이라고 말할 수 있다.

이와 같은 擬似 분석적 사고는 문제 해결과정에서 자주 나타날 수 있는 사고라는 것을 확인할 수 있었다. 학생들은 표면 정보에 즉흥적으로 반응한다. 마찬가지로 그와 같은 직관적인 방법으로 자신의 사고를 반성하는 것은 문제 해결 과정에 대한 사고에 대한 시각적인 표현 과정이 중요하다는 것을 알 수 있었다.

이와 같은 사례연구 결과에 대한 내용을 근거로 다음과 같은 점들을 제언할 수 있다.

첫째, 본 연구에서 적용한 검사과제는 일문제에 한정되어 있다. 그러나 그것은 학생들이 문제를 해결할 때 구성하는 유사성에 대한 유형이나 구성 과정에 대한 한계로 작용하기 보다는 학생들이 민감하게 반응하는 표면적 정보에 관련된 것이라고 볼 수 있다. 따라서 다른 유형이나 내용의 문제를 보다 다양하게 적용함으로써 본 연구 결과에 대한 확장이나 일반화의 가능성을 언급할 수 있을 것이다.

둘째, 본 사례연구는 중상위권의 수학 성적을 가진 학생들의 사례에 대한 것이다. 본 연구에서 이해하고자 하는 사례에 적합한 학생들의 선정이었지만 다른 수학 성적을 가진 학생들에게 나타나지 않는 부분이라고는 단정할 수 없다. 擬似 분석적 사고는 문제 해결과정에서 누구나에게 나타날 수 있는 자연스러운 사고이기 때문이다. 하지만 그 사고의 메카니즘에 대한 일반화를 위해서는 보다 많은 학생들을 대상으로 체계화된 연구 방법도 병행되어야 할 것이다.

그리고 셋째, 본 사례 연구에서 문제 해결 활동에 대한 학생들의 사고를 유사성의 관점에서 분석함으로써 학생들의 분석적 사고와 擬似 분석적 사고에 대한 이해와 통찰을 얻을 수 있었다. 하지만 개념 활동에 대한 사고인 개념적 사고와 擬似 개념적 사고에 대한 심층 연구도 의미 있을 것이며, 가능할 것이라고 본다.

참고문헌

- 김남희(1997). Vinner 이론에 따른 의사 개념적 행동과 의사 분석적 행동에 관한 소고. *대한 수학교육학회 논문집*, 7(2), 337-348.
- 박현정·이종희(2006). 중학생들이 수학 문장제 해결 과정에서 구성하는 유사성 분석, *수학교육학연구*, 16(2), 115-138.
- 우정호(2003). *수학 학습-지도 원리와 방법*. 서울: 서울대학교.
- 우정호·정영옥·박경미·이경화·김남희·나귀수·임재훈(2006). *수학교육학 연구방법론*. 서울: 경문사.
- 이종희·김부미(2003). 문장제 해결에서 구조-표현을 강조한 학습의 교수학적 분석, *학교수학*, 5(3), 223-385.
- 이종희·김진화·김선희(2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이, *수학교육*, 42(3), 353-368.
- 정은실(1995). *Polya의 수학적 발견술 연구*. 교육학 박사학위 논문. 서울대학교 대학원.
- Carlson, Marilyn P., & Bloom, Irene (2005). The cyclic nature of problem solving: an emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics*, 58(1), 45-75.
- Creswell, J. W. (2006). *질적 연구 방법론: 다섯 가지 전통*. (조홍식, 정선옥, 김진숙, 권지성 역). 서울: 학지사. (원저는 1998년 출판).
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: models & processes*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Gentner, D., & Markman, A. B. (1997).

- Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist*, 52, 45-56.
- Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structure similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15, 332-340.
- Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.
- Lobato, J. (1997). *Transfer reconceived: How 'sameness' is produced in mathematical activity*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.
- Matz, M. (1980). Toward a computational theory of algebraic competence, *The journal of mathematics behavior*, 3(1), 93-166.
- Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal cues as an interfering factor in verbal problem-solving. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 41-51.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Sage publication.
- Polya, G. (2002). *어떻게 문제를 풀 것인가? - 수학적 사고 방법-*. (우정호, 역). 서울: 경문사. (원저는 1971년 출판).
- Polya, G. (2005). *수학적 발견(II)*. (우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, 임재훈 역). 서울: 교우사. (원저는 1964년 출판)
- Reed, S. K.(1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg(Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp.39-67). Norwood, NJ: Ablex.
- Reed, S. K. (1999). *Word Problems*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Reed, S. K., & Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogical solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 11, 106-125.
- Silver, H. F. (1981). Recall of Mathematical verbal problem, *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 54-64.
- Skemp, R. (1976). Rational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 7, 20-26.
- Vinner, S. (1997a). From intuition to inhibition mathematics, education and other endangered species. *Proceedings of the 21th International conference for the Psychology of Mathematics Education*, 63-78.
- Vinner, S. (1997b). The pseudo-conceptual and pseudo-analytical thought processes in mathematics learning, *Educational Studies in Mathematics*, 34, 97-127.
- Wagner, J. F. (2003). *The Construction of Similarity: Context Sensitivity and the Transfer of Mathematical Knowledge*. Unpublished doctoral dissertation, University of California, Berkeley.

An Analysis of the Pseudo-analytical Thought and Analytical Thought that Students Do in the Process of Algebra Problem Solving

Park, Hyun Jeong (Ewha womans university, Graduate school)

Lee, Chong Hee (Ewha womans university)

The purpose of this study is to understand students' thinking process in the algebra problem solving, on the base of the works of Vinner(1997a, 1997b). Thus, two middle school students were evaluated in this case study to examine how they think to solve algebra word problems. The following question was considered to analyze the thinking process from the similarity-based perspective by focusing on the process of solving algebra word problems; What is the relationship between similarity and the characteristics of thinking process at the time of successful and unsuccessful problem solving? The following results were obtained by analyzing the success or failure in problem solving based on the characteristics of thinking process and similarity composition.

Successful problem solving can be based on pseudo-analytical thought and analytical thought. The former is the rule applied in the process of applying closed formulas that is constructed structural similarity not related with the situations described in the text. The latter means that control and correction occurred in all stages of problem solution. The knowledge needed for solutions was applied with the formulation of open-end formulas that is constructed structural similarity in which memory and modification with the related principles or concepts.

In conclusion, the student's perception on the principles involved in a solution is very important in solving algebraic word problems.

* **Key word** : pseudo-analytic thought(擬似 분석적 사고), surface similarity(표면 유사성), structural similarity(구조적 유사성), procedural similarity (절차적 유사성), 닫힌 공식(closed formulas), 열린 공식(open-end formulas)

논문접수 : 2007. 1. 8

심사완료 : 2007. 2. 5