대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 17 권 제 1 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 17, No. 1, 51-66. Feb 2007

수학영재들이 NIM 게임 과제에서 만든 문제 만들기 사례 분석[1)]

송 상 헌* · 정 영 옥* · 임 재 훈* · 신 은 주** · 이 향 훈***

본 연구의 목적은 초등학교 수학영재들이 NIM 게임이라는 특수한 과제가 주어졌을 때 그것의 정보 또는 구조를 변경하여 만든 문제들의 사례들을 분석하는 것이다. 그 결과 우수한 수학영재들은 정보 구성 요소를 일관성 있게 변화시키거나 문제를 재구조화하였다. 교육청부설 과학영재교육원 소속 학생들은 대부분 Brown & Walter가 설정한 'What-if-not'전략에 따른 문제 만들기의 Ⅲ수준에서 머물고 있지만, 대학부설 과학영재교육원 소속 학생들 중에는 Ⅳ수준에 도달하는 학생들도 있었다. 특히, 학생들의 사고 수준이 높을수록 표면적으로 드러난 특정한 수치를 다른 값으로 변경하거나 수치 값의 범위를 변경하는 방법에 치중하지 않고 문제의 구조를 파악하고 또 메타인지적 과정을 통해 각각의 요소를 체계적으로 분류하면서 보다 다양하고 확장된 유형의 문제를 만들어 간다는 점을 밝혔다. 그리고, 문제 만들기 수업에서 활용할 수 있는 2가지의 지도방안을 제안하였다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학에 재능이 있는 학생들은 주어진 문제를 수동적으로 해결하는 것을 초월하여 보다 능동적으로 자신이 직접 문제를 만들어 보는 경험을 할 필요가 있다. 문제 만들기(problem posing)란 문제해결(problem solving)에 도움이 될 뿐 아니라 문제를 만드는 과정 그 자체에도 의의가 있다(Brown & Walter. 1990, 1993; Kilpatrick, 1987; Polya, 1981; Silver, 1994; NCTM, 2000). 학생들은 문제를 만들어보면서 수학 학습에 대한 불안감을 줄이고 보다 유연한 사고를 기를 수 있으며, 창조적이고 활동적인 학습자가 될 수 있다. 또한 다양한 전략으로 확장된 문제를 만들어봄으로써 기존의 문제 뿐 아니라 새롭게 만든 문제를 해결하는 발견술을 개발할 수 있다(Brown & Walter, 1990, 1993; English, 1998; Silver, 1933). 일반적으로 문제 만들기에 도움이 되는 전략으로는 보조문제 만들기, 조건변경 전략, 결합과 분해를 들 수 있다. 이 가운데 가장 널리 활용되어 온 전략이 Brown과 Walter(1990)가 제시한 조건변경(What if not?) 전략이다.

문제 만들기와 창의성이 상관관계가 있다는 점이 밝혀지거나(Ellerton, 1986; Silver, 1994),

* 경인교육대학교, shsong@ginue.ac.kr, yochong@ginue.ac.kr, jhyim@ginue.ac.kr
** 경인교육대학교 산학협력단 전임연구원, eunjushin@dreamwiz.com
*** 석천초등학교, suhoon22@hanmail.net
1) 이 논문은 2005년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음(KRF-2005-079-BS0123)

우수아를 위한 교육에서도 문제해결보다 문제 만들기가 수학을 발견하거나 창조한다는 측면에서 그 중요성이 강조되고 있다. 그러나 수학적 능력이 있는 학생들을 대상으로 수학 문제 만들기 과정을 심층적으로 연구하여 그들이 문제를 만들어가는 전략이나 사고 과정을 밝히거나 문제 만들기를 지도하기 위한 방안을 제안한 연구는 미흡하다. 이러한 점을 고려하여 본 연구의 내용은 다음과 같다. 첫째, 수학적으로 능력이 있는 학생들이 NIM 게임에서 문제를 만들고 확장해 가는 과정에서 주어진 문제의 정보 또는 구조를 변경한 사례들을 분석한다. 둘째, 수학적으로 능력이 있는 학생들에게 조건변경 전략을 활용하여 문제 만들기를 지도하는 방안을 제안한다.

II. 이론적 배경

1. 문제 만들기의 의의

문제 만들기는 학자들에 따라 다양하게 정의되어 왔으나 그 의미는 일맥상통하다고 볼 수 있다. 또한 문제해결 전이나 후에 만드는 문제에 초점을 둔다는 측면에서는 다를 수 있지만 그 의미나 교육적 의의의 측면에서는 공통점을 발견할 수 있다. Kilpatrick(1987)은 문제 형식화하기(problem formulation)로, Silver(1994)는 문제 생성하기(problem generation)로, Brown과 Walter (1990)는 문제제기(problem posing)로 제시한 바와 같이 다양한 형태로 사용되었다. Kilpatrick (1987)에 의하면, 문제를 만드는 전략으로 새로운 문제가 나올 수 있도록 문제의 조건의 일부 또는 전부를 변경시키거나, 문제가 만들어진 후에 문제를 다양하게 수정하였을 때 학생들은 문제의 해답이 어떻게 영향을 받는지를 반성할 수 있다. Polya(1981)는 문제 만들기는 문제를 해결하기 위한 수단으로서의 문제 만들기와 문제를 해결한 후 새로운 문제를 만들기라는 두 가지 측면에서 설명하였다.

Brown과 Walter(1990)에 의하면, 문제 만들기는 두 가지 방식으로 문제해결 과정과 관련된다. 첫째, 문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제를 만들어봄으로써 원래의 문제를 재해석하게 되고 문제를 해결할 수 있는 단서를 얻게 된다. 둘째, 원래 문제와 다른 문제를 만들고 그 문제를 분석해보지 않으면 문제를 해결하고 나서도 그 의미를 이해하지 못하는 경우가 생긴다. Brown과 Walter가 제시하는 문제 만들기의 의의를 요약하면, 첫째, 흥미를 유발하여 학습함으로써 수학 과목의 성적이 좋아진다. 둘째, 생활 속에서 필요한 지식을 얻게 된다. 셋째, 사고력을 도야하고 개념을 적용하는 능력이 길러진다. 넷째, 자율적 · 자기 주도적 학습력이 길러진다.

NCTM(1989)에서도 문제만들기는 학생들을 수동적인 문제 해결자에서 능동적인 문제 해결자로 변화시키고, 수학적 발견의 힘을 제공하는 장점이 있다는 점이 강조된다. 뿐만 아니라 문제 만들기를 하는 수업에서는 단 하나의 정답만이 존재하는 것이 아니기 때문에 학생들에게 수학이 덜 위협적인 과목이 될 수 있다는 점이 제시되고 있다.

수학 능력이 다른 피험자들의 문제 만들기를 비교한 연구(Krutetskii, 1976; Ellerton, 1986)와 문제 만들기와 개인의 창의성의 관계를 조사한 연구(Silver, 1994)들에서 문제 만들기는 창의성 계발에도 긍정적인 영향을 미치며 창조적 활동의 일면 또는 특별한 수학적 능력이라는 점이 주장되어 왔다. Silver(1994)는 일반화된 문제의 수로 유창성을 파악하고, 만들어진 문제의 다른 범주의 수로 융통성을

파악하고, 해법의 참신성으로 독창성을 파악하였다. 이에 따르면 문제 만들기와 창의성이 상관관계가 있다는 것은 밝혔으나 그 관계의 본질이 명확하게 밝혀지지는 않았다. 그러나 수학적으로 능력이 있는 학생들이 문제 만들기를 더 잘한다는 점을 밝힌 연구(Ellerton, 1986)로 미루어볼 때 문제 만들기가 창의성이나 수학적 재능과 관련성이 있음을 알 수 있다.

2. 문제 만들기 단계

Polya(1981)는 문제 만들기를 문제를 해결하기 위한 수단으로서의 문제 만들기와 문제를 해결한 후 새로운 문제를 만들기라는 두 가지 측면에서 설명하였다. 문제를 해결하기 위한 수단으로서의 문제 만들기의 예로서 보조문제가 있다. 보조문제는 다양한 방법으로 원래의 문제를 해결하는데 구체적인 도움을 제공할 수도 있고 구체적인 도움이 나타나지 않을 때 조차도 풀이 방법, 풀이의 윤곽, 풀이를 시작해야 할 방향 등을 제시할 수 있다. 목표를 위한 수단으로서의 보조문제는 그 자체를 위해서가 아니라 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 주기 위해서 다루는 문제이다. 동치인 보조문제 만들기는 가역적인 변형을 하는 것으로서, 동치인 문제들의 계열을 만들어봄으로써 원래의 문제의 해에 접근할 수 있다. Polya는 보조문제를 찾을 수 있는 방법으로 구하고자 하는 것이 무엇이며, 어떤 것을 구하고자 하는지, 미지의 것이 무엇인지 등을 고려하여 목표를 보기, 조건에서 하나의 가정조항을 삭제하거나 첨가하기, 결론에서 하나의 주장을 삭제하거나 첨가하기, 조건의 일부만을 고려하고 다른 부분은 삭제함으로서 조건을 넓히거나 원래의 문제에서 보다 더 좁은 조건을 가진 다른 문제로 이행하여 조건을 좁히기, 더 강하거나 약한 정리를 살펴보기를 제시하였다.

Kilpatrick(1987)이 제시한 문제 형식화 과정은 연합(association), 유추(analogy), 일반화(generalization), 논박(contradiction)으로 구성된다. 연합은 지식을 구성하는 관련된 아이디어의 관계망, 혹은 개념들 간의 구조인 개념도를 활용하여 문제를 만드는 과정이다. 새로운 문제에 풍부한 자원으로서 기능을 하는 유추는 새로운 문제를 만들기 위해 관계나 구조의 유사성을 탐구하는 것이다. 일반화는 하나 또는 그 이상의 사례로부터 새로운 문제를 이끌어 낼 수 있는 경험을 제공한다. 논박은 주장이나 주장의 일부분을 논박함으로써 문제를 해결하는 전략을 탐구하는 것이다.

다케우찌(竹内芳男)와 하시모토(橋本吉彦)는 발전적 전개에 따른 문제 만들기 단계를 제시하였다. 다케우찌(竹内芳男)는 <표Ⅱ-1>과 같은 문제 만들기 단계를 제시하였고, 하시모토(橋本吉彦)는 문제의 발전이 다양하게 이루어질 수 있도록 하기 위한 원 문제에 선택의 비중을 두어 <표Ⅱ-2>와 같이 문제 설정의 단계를 제시하였다(황규애, 1997, 재인용).

<표Ⅱ-1> 다케우찌(竹内芳男)의 발전적 전개에 따른 문제 만들기 단계

제1 단계	제2 단계	제3 단계	제4 단계	제5 단계
원 문제의 해결	문제 만들기	만든 문제의 발표, 분류, 정리	만든 문제의 해결	정리 및 발전
P_0 의 해결	$P0$ P_1 P_2 Pn	Pi의 발표, 분류, 정리	Pi 의 해결	정리 및 발전

<표 Ⅱ-2> 하시모토(橋本吉彦)의 발전적 전개에 따른 문제 만들기 단계

첫째, 원 문제 선정 둘째, 원 문제 해결 셋째, 문제 만들기 넷째, 만든 문제의 발표 다섯째, 만든 문제의 해결

그리고 Brown & Walter는 문제 만들기 단계를 '주어진 것의 수용(accepting)'과 '주어진 것에 도전(challenging)'의 두 가지로 나누고 있다. 이 중 '주어진 것에 도전'하기의 단계에서는 주어진 것에 도전함으로써 새로운 질문을 제기할 수 있다. 특히 주어진 것에 도전함으로써 문제를 만드는 전략을 'What if ~ not' 전략이라고 한다.

지금까지 살펴본 문제 만들기의 단계들은 주어진 문제 해결하기, 문제 만들기, 만든 문제 발표, 분류 및 정리하기, 만든 문제 해결하기, 발전적 문제 만들기 등의 순서로 이루어진다. 이를 토대로 본 연구에서 문제의 조건을 변경함으로써 문제 만들기 과정을 분석하기 위한 연구 도구를 개발하고 연구 절차를 고려하고자 한다.

3. 문제 만들기 전략

Schoenfeld(1985)는 문제해결을 위해 자주 사용되는 발견술로서 분석, 탐구, 해에 대한 입증을 제시하였다. 탐구에는 다음과 같은 문제 만들기 전략이 포함된다. 첫째, 본질적으로 동치인 문제를 생각하라. 이를 위해, 조건들을 동치인 것으로 치환하고, 문제의 요소들을 다른 방법으로 재결합하고, 보조 요소를 도입하고, 문제를 재구성하라. 둘째, 약간 변경된 문제를 생각하라. 이를 위해 부분적인 목표를 선택하고, 조건을 완화시켜 다시 부과하고, 문제의 범위를 분해하고 각 경우에 대해 조사하라. 셋째, 크게 변경된 문제를 생각하라. 이를 위해 더 적은 변수를 가진 유사한 문제를 만들고, 한 변수를 제외한 변수를 고정시켜 그 변수의 영향을 결정하고, 형태, 주어진 조건들, 결론과 관련된 유사한 임의의 문제를 찾아보아라.

Moses, Bjork, & Golenberg(1993)이 제시한 문제 만들기 전략으로는 첫째, 미지의 것, 기지의 것, 제약에 관심을 갖게 하여 이들을 변화시키기. 둘째, 친숙한 맥락에서 시작하여 문제의 속성을 나열하거나 제약을 변화시켜가면서 친숙하지 않은 것으로 만들어보기. 셋째, 새로운 문제와 질문을 만들기 위해서 모호함 즉 필요하지만 불충분한 조건을 사용하기. 이 방법은 모호한 진술이나 새로운 대상에 대해 알기 원하는 것을 표현하게 하는 것이다. 넷째, 수학적 대상인 영역을 명확히 하기이다.

Schoenfeld(1985)나 Moses, Bjork, & Golenberg(1993)가 제시한 변경된 문제를 만드는 방법과 Brown & Walter(1990)의 조건 변경 전략은 제시된 문제의 범위, 주어진 조건, 포함된 변수, 문제의 구조 등을 변경시키면서 문제의 해법을 찾는데 유용한 발견술을 학습한다는 점에서 의의가 있다. Brown과 Walter는 이 전략을 사용하여 체계적으로 문제를 만드는 방법을 <표 Ⅱ-3>과 같은 과정으로 제시하였다. 이에 따르면 문제 해결자는 "What if not?"전략에 의하여 자료와 주어진 문제의 질문에서 가지고 있는 문제의 각 요소들을 스스로 검토하면서, "What if not?"의 질문 과정에 따라 그 문제를 해결해 나갈 수 있다. 각 단계는 문제만들기의 성격에 따라 반영되는 심화의 정도가 다르므로 수준으로 표현되기도 한다.

<표 Ⅱ-3> Brown & Walter의 'What-if-not'전략을 사용하여 문제를 만드는 방법과 그 수준

수준	단계(성격)
수준 0	출발점 선택 (Choose a starting point)
수준 Ⅰ	속성 나열하기 (Attribute listing)
수준 Ⅱ	What-if-not?의 의문을 품기 (What if not ~ ing)
수준 Ⅲ	문제의 설정(Question asking of problem posing)
수준 Ⅳ	설정한 문제의 해결 (Analyzing the problem)

조건변경 전략을 사용하여 문제 만들기 과정을 조사한 선행연구(English, 1998)에서는 8세 아동들이 형식적 맥락과 비형식적 맥락에서 조건변경 전략을 활용하여 문제를 만드는 과정을 분석하였다. 연구결과 형식적인 기호가 없는 패턴과 공간 퍼즐 문제와 같이 비형식적인 문제에서 조건을 변화시키면서 다양한 문제를 만든다는 점을 밝혔다. 연구자들은 교실에서 구조적이고 조작적인 복잡성을 모두 가진 문제 만들기 활동이 행해져야 하며, 특히 비형식적인 활동을 하면서 수학적 상황을 인식하고 문제를 만드는 습관을 기르는 교육의 중요성을 강조하였다. Lavy & Bershadsky(2003)는 'What if not?' 전략을 사용한 복잡한 공간 기하학 과제를 기초로 예비교사들이 만든 많은 문제들과 그러한 활동들의 교육적인 가치를 조사하였다. 문제 만들기를 통하여 제시될 수 있는 문제의 유형을 크게 정보 바꾸기와 문제 질문 바꾸기로 구분할 수 있다. 여기서 제시된 문제 유형의 요소와 위계는 본 연구에서 학생들이 만든 문제 유형을 분석할 수 있는 틀([그림 Ⅲ-6])의 골격이 되었다.

이상에서 조건변경(What if not?)전략을 사용한 문제 만들기 과정을 조사한 선행연구 결과를 살펴보았다. 이를 기반으로 본 연구에서는 초등학교수준의 수학우수아(영재)들이 NIM 게임에서 어떤 조건을 변경하여 새로운 문제를 만들어 가는지의 사례를 조사하고자 한다.

Ⅲ. 연구의 방법 및 절차

1. 과제의 개발

본 연구에서 다룬 과제는 전통적인 NIM 게임 중에 하나를 재구성한 것으로, 「큐브 가져가기 게임」이라 부르기로 한다. 보통의 Nim 게임은 두 사람이 번갈아 규칙에 따라 돌을 가져가다가 마지막돌을 가져가는 사람이 이기는 게임이다. Nim 이라는 용어는 'take' 라는 옛 영어단어로부터 나온 것으로, 독일어로는 'nehmen' 이라고 한다. Nim 게임에 대한 명칭으로는 「님게임」, 「떼어내기 게임」, 「분리(分離) 게임」등으로 불리고 있으며, 바둑돌, 구슬, 성냥개비 등 무엇이든 게임의 재료로 사용할 수 있다. 이 게임은 연결큐브의 구성에 의하여 제거된 큐브의 개수와 남아 있는 큐브의 개수뿐만 아니라 목표하는 큐브의 위치 파악이 용이하므로 문제에 대한 구조 파악과 해법의 전략 탐색을 위한 추론을 돕고, 구조적으로 일차인 NIM 게임을 2차, 3차 이상의 수준까지도 확장시키기 쉽다. 본 연구를 위한 과제의 개발을 위해 경기도의 A, K시에서 운영하는 지역교육청의 초등 5-6학년 수학영재반 2개 학급과 경기과학고등학교 1학년 학생 2명을 대상으로 모두 3차례의 사전 예비실험을 통해 학생들이 극복해야할 수학적 해법과 사고의 간극이 있는 부분을 중심으로 과제의 수준을 결정하였으며, 수업 및 관찰 적용 가능성을 확인하였다. 이를

통해 나타난 여러 가지 문제점들은 매 과정마다 수정하거나 보완하여 본 연구의 과제를 구성하였다.

가. 수준별 활동 과제의 개발

[활동 1-1]([그림 Ⅲ-1])은 게임의 이해를 위해 제시한 기본 활동과제(수준 1)이다. 이를 바탕으로 큐브를 가져가는 방향을 늘려가면서 수준 2의 [활동3-1](그림 Ⅲ-3)와 수준 3의 [활동 4-1](그림 Ⅲ-4]의 과제를 제시하였다.[2] 그러나 4방향 이상에서 가져가는 것은 몫과 나머지를 이용한 방향의 확장이라고 볼 수는 있지만 해법의 전략은 수준 3의 과제와 유사하다. 그러나 한 사람이 가져가는 큐브의 최대 개수에 제한을 두지 않게 되면 몫의 나머지만으로 해결하는 4수준의 과제로 귀착이 되며 이는 2진수의 원리를 응용한 풀이를 추론해 내어야 한다. 따라서 이런 접근은 수학적 추론 및 증명 등의 과정에서 수준 3까지의 접근법과는 다른 복잡한 사고 과정이 요구된다. 과학고등학교의 학생들은 이를 이진법으로 구성하고 해결하는 과제(5수준)의 해결이 가능하였으나 초등학교수준에서는 그 해법의 예시를 제시하고 연역적인 추론(4수준)만 유도하도록 하였다.

[활동 1-1] 큐브 가져가기 게임의 필승전략 찾기

1. 두 사람이 짝을 지어 다음의 게임을 하면서 각자 승리할 수 있는 방법을 찾아봅시다.

게임 1: 노란색 20개와 검은색 1개의 연결큐브를 서로 끼워둔다. 두 사람이 바위보로 순서를 정하고 번갈아 가면서 최소 1개에서 최대 3개까지의 큐브를 가져간다. 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다.

[그림 Ⅲ-1] NIM 게임의 기본 과제(수준1)

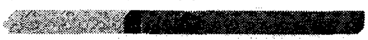
주어진 문제를 통해 문제 내의 정보나 구조를 다양화하면서 새로운 문제를 만들도록 요구하는 활동이 [활동 2-1](그림 Ⅲ-2)과 [활동 2-2]이며, 이를 통하여 문제 만들기의 사례를 수집하였다. [활동 2-2]는 [활동 3-1]의 게임 2를 '어떤 학생이 만든 게임의 예시'라고 제시하고 이와 같은 방법으로 새로운 게임을 만들라고 하였다.

[활동 2-1] 각자의 생각대로 변형 게임 만들기 (원래의 게임만 보고 내가 변형하여 만들기) 앞의 '**[활동 1]**'에 주어진 게임에서 여러 가지 조건들을 바꾸거나 자신이 생각하는 조건들을 추가하여 변형 게임이나 문제를 만들어 보시오.

[그림 Ⅲ-2] Nim 게임의 변형문제 만들기 과제

[활동 3-1] 2-방향 NIM 게임의 필승 전략 찾기

게임 2: 가운데에 검은색 큐브를 두고 왼쪽에는 노란색 큐브 7개, 오른쪽에는 빨간색 큐브 13개를 연결한다. 두 사람이 번갈아 가면서 왼쪽 또는 오른쪽 중 어느 한쪽 방향에서만 최소 1개에서 최대 3개까지의 같은 색 큐브를 빼간다. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.



(문제) 위 게임의 **필승전략**과 **필승수**를 찾아 그 해법을 설명하시오.

[그림 Ⅲ-3] 2-방향 NIM 게임의 과제(수준2)

[활동 4-1] 3-방향 NIM 게임의 필승 전략 찾기

1. 가져가는 방향(또는 색)의 개수를 늘려봅시다.

게임 3: 가운데에 검은색 큐브를 두고 세 방향에서 각각 3, 4, 5개의 큐브를 연결한다. 두 사람이 번갈아 가면서 어느 한쪽 방향에서만 1개 또는 2개를 가져간다. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.

2. 위의 3-방향 NIM게임에서 각 방향에 있는 큐브의 개수와 한 사람이 가져가는 최대 개수를 다양하게 변화시키면서 **필승전략**을 찾아 설명하시오.

[그림 Ⅲ-4] 3-방향이상 NIM 게임의 과제(수준3)

---

2) 각 유형의 NIM게임 과제의 일반적인 해법에 대해서는 이향훈(2007)을 참고 바람.

[활동 5-1] 3-방향 NIM 게임의 또 다른 변형

1.(변형하기) 한 사람이 가져가는 최대 개수에 제한을 두지 않는다면 어떨까?

1. 가운데에 검은색 큐브를 두고 세 방향에서 각각 3, 4, 5개의 큐브를 연결한다.
2. 두 사람이 번갈아 가면서 어느 한쪽 방향에서만 자신이 원하는 만큼 마음대로 가져간다.
3. 검은색 큐브를 가져가는 사람이 진다.

2.(전략 탐색) 위의 3-방향 NIM게임의 **필승전략**을 찾아봅시다.

[그림 Ⅲ-5] 3-방향 무제한 NIM의 과제(수준4)

2. 연구 대상자

사전 예비실험과 본 실험에 참가한 연구대상자들의 소속과 수준을 분류한 코드를 <표Ⅲ-1> 과 같이 나타낸다.

<표 Ⅲ-1> 연구 대상자

구분	집단	소속	인원	학생 ID
사전 실험	C	K 교육청부설 영재교육원 5~6학년	14명	CY1 ~ CY14
	B	N 교육청부설 영재교육원 5~6학년	16명	BS1 ~ BS16
본 실험	A	A대학교부설 과학영재교육원 초등수학 심화반	9명	AJ1 ~ AJ9

C집단과 B집단은 K지역과 N지역의 교육청에 속한 초등학교 학생들 중에서 수학과 과학에 재능을 보이는 학생들을 시험과 면접 등을 통해 선발된 학생들이다. 그리고 A집단은 A대학교 부설 과학 영재교육원 학생들로 경기도에 있는 학생들 중에서 수학에 우수한 학생들을 시험과 면접을 통해 선발된 학생들이다. 특히 A집단은 경기도 지역에서 가장 우수한 집단이며 또래의 연령 집단에서 비교하면 B, C집단은 상위 1%정도이며 A집단은 상위 0.01%이다.

3. 연구절차

사전수업을 통하여 본 연구도구의 적용 가능성 및 관찰 가능성에 대하여 확인 하였다. 또한 그 이후의 2차례 적용과정에서 나타난 여러 가지 문제점들을 매 과정마다 수정 및 보완하면서 본 연구 도구를 적용시켜 나갔다.

가. 1차 예비 수업: 문제수준 1만 제시할 경우의 반응(C집단)

<표 Ⅲ-2> 1차 예비 수업 과정

구분	1차 예비 수업	인원
시기	2006년 4월 12일 (수) 2시간	14명
적용과정	문제 수준1만 제시하고 학생들의 조건변경을 통한 문제 만들기의 반응을 살펴보았다. 즉 1-방향 NIM 게임의 문제만을 제시하고, 조건 변경을 통한 문제 만들기의 예인 2-방향 NIM 게임은 제시하지 않았다. 이때의 문제 만들기에서 나타나는 학생들의 반응 및 문제풀이를 관찰하고 분석하였다.	
적용후	게임의 필승전략만을 간단하게 기술하는 경향이 많아서 일반화 과정을 관찰함에 부족함을 발견하였다. 정보 변경에 치우치는 경향을 확인하였다. 구조 변경을 위한 발문 및 자료의 필요성을 확인하였다.	

나. 2차 예비 수업: 변형 문제의 예시로 문제 수준2를 제시할 경우의 반응(B집단)

<표 Ⅲ-3> 2차 예비 수업 과정

구분	2차 예비 수업	인원
시기	2006년 6월 1일 (목) 2시간	16명
적용과정	1차 수업의 반응을 토대로 수정된 문제지를 통하여 학생들이 구조적인 조건 변경을 하도록 하기 위한 교사의 발문 및 자료를 제시한 후 반응 과정을 관찰하고 분석하였다.	
적용후	구조변경은 확인하였으나 보다 높은 수준의 유형으로 발전하지 못하였다. 필승전략과 일반화에 대한 기술을 구분할 필요성을 발견하였다.	

다. 본 수업: 조건 변경을 통한 문제 만들기 관찰(A집단)

<표 Ⅲ-4> 본 수업 과정

구분	본 수업	인원
시기	2006년 10월 15일 (일) 8시간	9명
적용과정	앞의 수업들을 토대로 개선된 문제 및 교수방법으로 영재들의 반응을 관찰하고 분석하였다. 본 수업 대상자들을 토대로 일반화 과정에 대한 확인 및 수업 중에 나타나지 않은 반응을 살펴보기 위하여 본 수업중의 과제물을 정리하여 사이버과제로 정리하여 제출하게 하였다.	
적용후	높은 수준의 문제에 대한 일반화로 진행하는 데 많은 시간이 부족하였다.	

라. 온라인 후속 수업: 3-방향 NIM 게임의 일반해에 대한 반응(A집단)

<표 Ⅲ-5> 온라인 후속 수업 과정

구분	온라인 후속 수업	인원
시기	2006년 11월 11일 (토) 4시간	9명
적용과정	본 수업에서 시간 부족으로 수행하지 못한 3-방향의 일반화에 대한 2진수적 접근법의 수업을 하였으며, 사이버 과제로 제출한 각자의 풀이에 대하여 조건변경(What if not 전략)에 의한 변형된 문제의 요소를 점검해 보았다.	

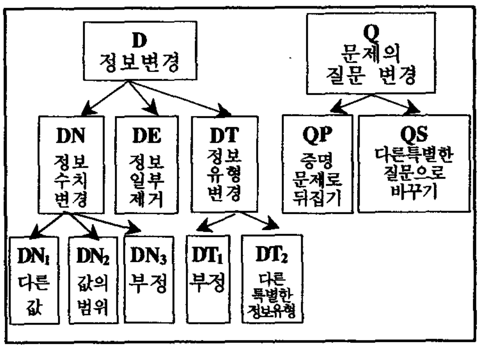
4. 자료 수집 및 분석

연구 대상자들의 문제 만들기 과정을 분석하기 위하여 관찰자 및 연구자 관찰 기록과 면담자료, 비디오 촬영 자료, 활동지 자료, 사전 또는 사후의 사이버 과제물 자료를 수집하였다. 본 연구자들은 전체 수업 진행자로서의 연구자, 전체 수업 관찰자로서의 연구자, 조별 관찰자이자 참여자로서의 연구자로 활동하였다. 다양한 자료 수집원으로부터 자료를 다원화함으로써 사례연구의 타당도와 신뢰도를 높이고자 하였다. 기존의 연구 결과를 토대로 본 연구자가 재구성한 분석틀에 기초하여 수집한 자료를 분석한다.

관찰과 면담 결과에서 얻은 자료를 분석하는 방법으로는 먼저, 연구자가 기록한 대로 사례에 대한 사실들을 진술하는 내러티브 기술(narrative description)을 사용한 후, 단일 사례 내에서 주제를 확인하는 사례 내 분석을 하였다. 그 후, 모든 사례에 공통적인 주제를 식별하기 위하여 사례들을 아우르는 주제들을 검토하는 사례 간 분석을 하였다(Creswell, 1998).

가. 자료의 코드화

본 실험에서 학생들이 새롭게 변형하여 만든 문제를 분석하기 위해서 Lavy & Bershadsky (2003)가 조건 변경을 통하여 만든 문제들의 유형을 시각화한 범주 표에 기반을 두어 [그림Ⅲ-6]처럼 1차 코드화 하였다. 또한, 본 연구에서는 1차 코드화한 자료의 각 정보에 대한 요소를 그 수준에 의하여 선형적으로 나열하였다. 또한 <표 Ⅲ-6>과 같이 주어지는 문제에서 변경 가능한 정보 구성 요소를 분석하고, 이를 토대로 <표 Ⅲ-7>과 같이 코드화하고 예상 반응을 분석하였다. 수준 1의 문제에서 수준2나 3과 같이 다양한 방향을 고려한 문제를 만드는 경우에는 문제의 구조를 변경하는 경우로 분석한다.



[그림 Ⅲ-6] 변형한 문제들의 코드화 방법(1)

<표 Ⅲ-6> 기본 과제의 정보 구성 요소

정보 구성 요소와 문제	
1. 게임인원	2명
2. 큐브의 총 개수	21개 (20 + 1)
3. 가져갈 수 있는 개수	1~3개
4. 맨 마지막 큐브를 가져가면?	이긴다.
5. 가져가는 규칙	번갈아 가면서 차례대로
6. 큐브배열	선형/입체형, 1방향, 2방향, 3방향

노란색 20개와 검은색 1개의 큐브를 서로 끼운다. 두 사람이 가위바위보로 순서를 정하고 번갈아 가며 최소 1개에서 최대 3개까지의 큐브를 가져간다. 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 이긴다.

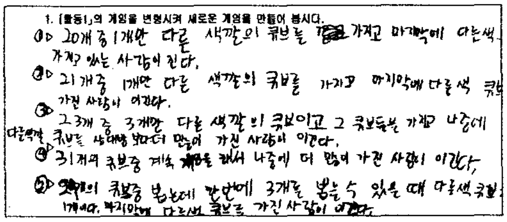
<표 Ⅲ-7> 변형한 문제들의 코드화 방법(2)

코드화에 대한 예상 반응 분석	
DN_1	큐브의 총 개수 변형(주어진 개수)
DN_2	가져가는 개수의 범위, 최대로 가져갈 수 있는 개수의 제한, 홀수 또는 짝수 개
DN_3	게임 참여 인원의 부정(3명…), 마지막에 주어진 큐브 개수 부정(2개, 3개…)
DT_1	마지막 큐브를 가져가면 진다(이기는 방법)
DT_2	큐브 배열의 모양을 입체형으로(주어진 모양) 입체형에서 직선으로만 가져감(가져가는 방법) 더 많이 가져가기(승패 방법)
DE	마지막 큐브 제거, 가져가는 순서 제거(무작위, 붙여나가기…), 그 외의 정보 요소 제거
QP	증명 문제로 바꾸기
QS	다른 문제로 바꾸기(3인 게임에서 순번의 유불리(확률), 검은 큐브를 더 많이 가져가기, 각각의 큐브 별 점수를 부여하여 점수제 등)

분석 과정에서 학생의 이름과 만든 문제의 개수에 대한 각 문항을 코드화하였다. 즉 학생의 ID는 (지역교육청 코드) + (일련번호)를 부여하였고 이들이 만든 문제를 각 문항별로 코드화하였다. 예를 들어, CY1학생이 만든 첫 번째 문제에 대해서는 CY1_P1과 같이 부여하였다. 각 집단 내에서ID의 순서는 지도교사의 판단에 따라 성취 수준이 낮은 학생부터 높은 순으로 ID를 부여하였다.

Ⅳ. 연구의 결과

예비실험에서 C집단에게 NIM게임 과제의 1수준인 기본 유형의 문제만 제시한 뒤에 문제의 조건을 변경시켜 새로운 문제를 만들도록 하였다. 그 때 학생들이 만든 대부분의 문제들은 주어진 문제의 수준을 넘지는 않았다. 즉, [그림 Ⅳ-1]의 예에서 알 수 있듯이, 변형된 문제들이 모두 정보 변경의 유형에만 해당되었으며, 어느 누구도 구조 변경을 통하여 과제의 2수준 이상의 문제를 만들지는 못하였다.

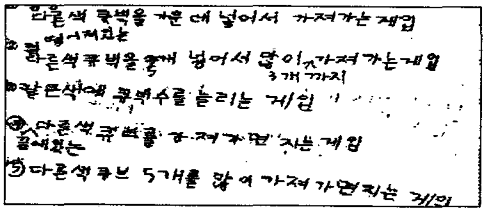

1. [활동1]의 게임을 변형시켜 새로운 게임을 만들어 봅시다.
①> 20개 중 1개만 다른 색깔의 큐브를 가지고 마지막에 다른색 가지고 있는 사람이 진다.
②> 21개 중 1개만 다른 색깔의 큐브를 가지고 마지막에 다른색 큐브 가진 사람이 이긴다.
③> 23개 중 3개만 다른 색깔의 큐브이고 그 큐브들을 가지고 나중에 다른색깔 큐브를 상대방 보다 더 많이 가진 사람이 이긴다.
④> 21개의 큐브중 계속 [illegible] 해서 나중에 더 많이 가진 사람이 이긴다.
⑤> [illegible]의 큐브중 뽑는데 한번에 3개를 뽑을 수 있을 때 다른색 큐브는 1개이다. 마지막에 다른색 큐브를 가진 사람이 이긴다.

[그림 Ⅳ-1] [활동 2-1]에서 CY11 학생이 제시한 변형 문제

C집단에서는 한 학생당 평균 4.4개의 문제를 만들었으며, 정보의 특정 수치를 다른 값으로 바꾸기와 수치 값의 범위 변경이 대부분을 차지하였다. 또한 한 문제당 1~2개의 문제 요소만을 변경하는 경우가 대부분이었다. 이는 문제 만들기의 사고 수준에서 가장 흔히 관찰되는 요소이다.

B집단을 대상으로 한 2차 예비수업에서는 기본 유형의 문제를 제시하고 난 뒤 주어진

게임 과제의 필승 전략에 대해 생각해 보도록 한 뒤에, 보다 심화된 변형 문제를 예시로 제시한 다음 새로운 문제를 만들게 하였다. 이는 기본 유형의 문제를 탐색한 후 곧바로 문제 만들기를 하지 않고, 과제의 수준이 높은 문제 변형의 사례를 제시한 후에 학생들이 만들게 되는 문제들의 심화 정도를 살펴보았다. B집단은 한 학생당 평균 2.9개의 문제를 만들어서 C집단보다는 더 적은 수의 문제를 만들었지만, [그림 Ⅳ-2]와 같은 예를 통해 보듯이, 보다 다양한 유형의 반응이 나타났다. 특히 B집단의 학생 중에서 9명의 학생은 수준 2이상의 심화된 문제를 만들었다. 즉 16명의 학생 중에서 7명의 학생은 정보 변경을 통한 문제 만들기를 하였으나, 절반 이상인 9명의 학생은 구조 변경을 통해 문제를 만들었다. 이로부터 2 수준의 문제를 예시로 제시한 것만으로도 영재들이 보다 수준 높은 문제를 만들 수 있다는 점을 알 수 있었다. 즉, 통찰력이 있는 우수한 학생들은 문제의 구조에 대한 이해와 직관을 바탕으로 좋은 문제에 대한 경험과 문제 만들기 사례를 경험하는 것만으로도 그들의 문제 만들기의 수준을 높일 수 있음을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-2] [활동 2-2]를 경험한 후 BS15 학생이 만든 문제

그러나 아쉬운 점은 교육청부설 과학영재교육원 수준의 수학영재들이라도 자신이 만든 문제(게임)의 풀이를 교사가 특별히 요구하지 않는 경우는 학생이 스스로 그 해법까지 제안하려 하지 않는다는 것이다. 그러나 대학부설 과학영재교육원 수준의 수학영재들 중에는 스스로 자신이 만든 문제의 해법을 점검해 가면서 보다 심화된 문제를 만들어가는 방법을 적용하는 학생들이 있었다.

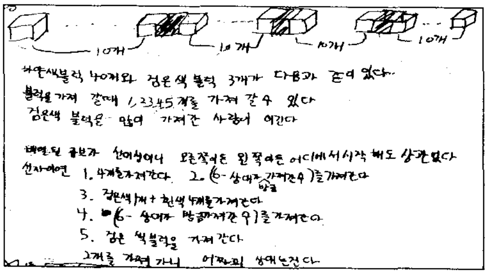
A집단에 수준1의 과제를 제시하고 문제를 만들도록 요구하는 [활동 2-1] 이후에 나타난 전체 학생들의 반응을 표로 비교하여 나타내면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 과제 수준1인 [활동 2-1] 이후에 나타난 집단 A의 반응 분석

[수업 분석]집단A			문제의 수준1												문제의 수준2												문제의 수준3											
제시된 문제 단계			D										Q		D										Q		D										Q	
(1)단계			DN					DT							DN					DT							DN					DT						
학생 ID	만든 문항		DN1	DN2	DN3	G I	G F	DT1	DT2	G I	G F	DE	QP	QS	DN1	DN2	DN3	G I	G F	DT1	DT2	G I	G F	DE	QP	QS	DN1	DN2	DN3	G I	G F	DT1	DT2	G I	G F	DE	QP	QS
AJ1	3	P1	□	□		□			□																													
		P2	□	□					□	□		■		□																								
		P3	□	□				■	□			□																										
AJ2	4	P1	□	□					■																													
		P2							□			□		■																								
		P3	□	□					■																													
		P4	□	□					□			□		■																								
AJ3	3	P1							□	□		■		□																								
		P2							□	□		■		□																								
		P3	□	□		□																																
AJ4	4	P1	■	□		□			■																													
		P2	□	□	■				□																													
		P3	□		■				□																													
		P4	□	□	■				□																													
AJ5	5	P1	□	■		□			□																													
		P2													■	■																						
		P3	□						■																													
		P4	□	□	■				□	□																												
		P5																									■											
AJ6	4	P1													■						■				■													
		P2													□		■			■	□																	
		P3													□	□	□			□	■				■													
		P4	□					■	□				■																									
AJ7	4	P1	□	□				□	■	□																												
		P2																									■						■					
		P3	□	□				■	□			□		■																								
		P4	□	□				■	□			□		□																								
AJ8	4	P1	■							□																												
		P2	□		■			□	□	□																												
		P3	□	■					□	□																												
		P4	□	□				■	□																													
AJ9	5	P1	□	□	□			□	■	□																												
		P2	□	□	□			□	■	□																												
		P3																									□	□										
		P4													□	□	□			■	□																	
		P5						□				□		■																								
총 합	총36개	평균 4	24	19	7	4	0	10	25	10	0	9	1	8	6	3	3	0	0	3	4	0	0	0	2	0	3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

참고: ● 표시한 부분이 각 문제의 핵심 사항임

A집단은 문제의 수준1인 유형만 제시하였는데도, 9명 중에서 4명의 학생(AJ5, AJ6, AJ7, AJ9)이 문제의 수준2와 문제의 수준3의 유형까지 변형시키는 데 성공하였다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-3]과 같이 정보 변경과 구조 변경이 모두 발견되었으며, 매우 다양한 유형의 문제를 만들었다.



[그림 Ⅳ-3] AJ7 학생이 만든 문제와 풀이의 예

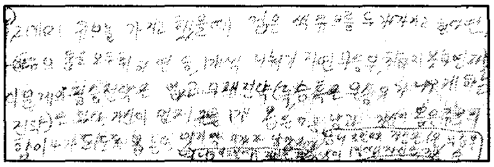
이후 보다 심화된 문제를 만들 수 있도록 다른 문제의 예시를 보여주는 [활동 2-2] 이후에 나타난 반응 분석은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 과제 수준2의 사례를 제시한 [활동 2-2] 이후에 나타난 집단 A의 반응 분석

수업 분석 집단A			문제의 수준1												문제의 수준2												문제의 수준3											
제시된 문제 단계			D										Q		D										Q		D										Q	
(2)단계			DN					DT							DN					DT							DN					DT						
학생ID	만든 문항		DN1	DN2	DN3	GI	GF	DT1	DT2	GI	GF	DE	QP	QS	DN1	DN2	DN3	GI	GF	DT1	DT2	GI	GF	DE	QP	QS	DN1	DN2	DN3	GI	GF	DT1	DT2	GI	GF	DE	QP	QS
AJ1	0	-																																				
AJ2	0	-																																				
AJ3	1	P1												○																								
AJ4	1	P1													○																							
AJ5	2	P1																									○		○									
		P2													○	○				○																		
AJ6	1	P1	○					○																														
AJ7	1	P1																									○		○									
AJ8	1	P1													○		○																					
AJ9	2	P1	○	○		○		○																														
		P2	○	○	○			○																														
총 합	총 9개 / 평균 1		3	2	1	1	0	3	0	0	0	0	0	1	3	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0

AJ4와 AJ8과 같이, 좋은 문제의 사례만으로도 문제의 수준을 향상시킬 수 있는 통찰을 제공한다. 그러나 성취도가 우수한 학생들 중 일부(AJ6, AJ9)는 수준2의 문제를 보기 이전에 이미 그 이상의 수준을 생각해 보았기 때문에 수준이 높은 문제를 생각하기보다는 또 다른 유형으로 보다 체계적인 접근 방법을 시도하였다.[3)]

문제 만들기에서 발견한 특이한 점은 B 또는 C 집단의 학생들은 대부분 정보의 수치에 집중하며 접근하지만, 집단A의 영재들은 문제를 요소별로 파악하여 접근한다는 것이다. 이들의 과제 기록지에는 자신이 변경시킬 정보구성 요소를 직접적 또는 간접적으로 설명하여 제시한 경우가 많다. 또한 A집단 중에서도 높은 수준의 영재들은 많은 문제를 만들기 보다는 자신이 필요한 정보의 구성 요소를 하나씩 변경해 가면서 체계적으로 문제를 만들었다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-4]는 AJ8 학생이 보인 반응으로서 조건 변경을 통하여 주어진 정보 구성 요소별로 파악하여 문제 만들기를 하는 한 예이다. 문제 만들기 과정에서 집단A의 영재들은 과제에서 필요한 정보 구성 요소를 하나씩 통제해 갔다는 것이다.



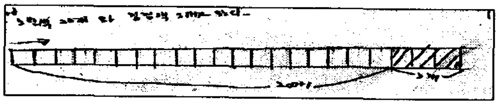
[그림 Ⅳ-4] 정보 구성 요소별 변경 예(AJ8)

성취도가 낮은 AJ1와 AJ2 아동이 만든 문제의 유형들이 수치 값의 범위 변경 및 특정수의 변경과 같은 정보의 수치 바꾸기에 해당하는 문제가 주를 이룬 반면, 성취도가 높은 AJ7와 AJ8의 학생들은 수치 바꾸기, 정보 유형 바꾸기, 정보의 일부 제거하기, 증명 문제로 뒤집기, 다른 특별한 질문으로 바꾸기와 같이 다양한 반응이 나타났다. 더욱이 이들은 자신이 변형시키려는 목적을 가지고서 정보 구성 요소를 바꾸어 나갔다.

3) 그러나 어느 누구도 가져가는 개수에 제한을 두지 않는 경우는 생각해 내지 못했다. 나중에 [활동 4-1]을 통해 이런 문제를 제시했을 때에야 비로소 AJ5의 학생만이 예전에 3-4-5 NIM게임을 해 본 적이 있다는 것을 회상해 내었고 이는 한 사람이 5개 이상을 가져갈 수 있는 3-방향 NIM게임과 같다는 것을 알아냈다.

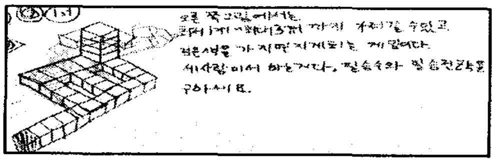
A집단의 아동들이 만든 문제들 중 각 유형별 사례를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 가장 자주 나타나는 것으로 정보 변경의 하위 구성 요소 중 수치 변경을 한 사례이다. 수준이 낮은 대부분의 학생들을 포함하여 가장 쉽게 접근하는 수치 변경은 주어진 문제에서 제시된 큐브의 개수와 가져가는 개수의 범위를 바꾸는 것이다. 그러나 수의 범위에서 최소 값만 바꾸거나 가져갈 수 있는 개수가 홀수 개만으로 제한하는 등 수의 범위를 변경하는 경우도 드물게 나타났다. 아주 드물게 [그림 IV-5]와 같이 수치 정보 중에서 주어진 검은색의 큐브의 개수를 바꾸는 경우도 있었다. 이는 나중에 검은색 큐브를 더 많이 가져가기, 또는 마지막 큐브를 가져가는 사람이 지는 경우로 유형을 변형하는 힌트가 되기도 한다.



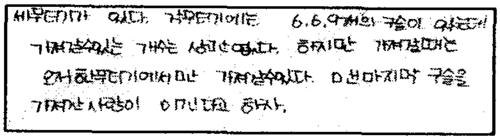
[그림 IV-5] 특정한 수의 정보 (마지막 검은색 큐브의 개수)를 부정한 사례

둘째, 능력이 있는 학생들에게서 주로 나타나는 정보 유형 변경의 사례이다. 우선 정보의 유형을 바꾸는 경우에서 가장 흔한 사례는 마지막의 큐브를 가져가는 사람이 지는 경우로 부정하는 경우이다. 특별한 정보의 유형으로 변경하는 사례는 구조물을 입체형으로 바꾸기, 매우 다양한 반응을 보였다. 특히 수준이 높은 영재들의 경우는 동시에 여러 가지 정보의 유형 변경까지도 시도하였다. [그림 IV-6]은 특별한 정보 유형(3사람)[4]으로 바꾼 경우의 한 사례이다. 그런데 구조물의 모양을 입체형으로 다양한 정보 요소를 동시에 변경한 경우의 예이기도 하다.



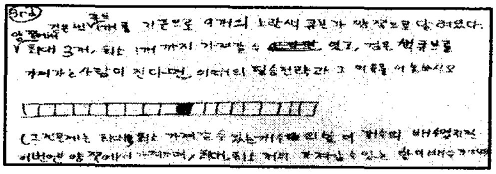
[그림 IV-6] 특정한 정보 유형(입체형, 게임자의 인원 늘리기)으로 변경한 사례(AJ9)

셋째, 정보 변경에서 가장 드물게 등장하는 유형으로는 정보의 일부를 제거하는 사례가 있다. 정보의 일부를 제거하는 것으로는 가져가는 최대 값의 제거, 연결해놓은 큐브에서 빼어내는 순서의 제거와 같은 정보 요소를 제거하는 경우이다. [그림 IV-7]은 가져가는 최대 값에 제한을 두지 않는 일반적인 NIM게임의 사례이다. 그러나 이는 기존의 NIM게임에 익숙해 있었다는 한 학생의 반응일 뿐 그다지 일반적인 사례는 아니다.



[그림 IV-7] 정보의 일부(최대 값)를 제거한 사례

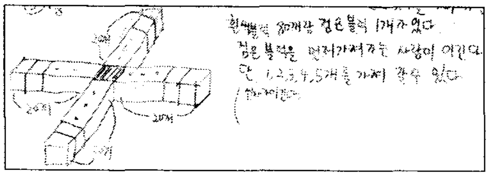
마지막으로, 문제 만들기의 수준에서 높은 유형에 속하는 것으로 요구하는 문제를 증명 문제로 뒤집기 한 예이다. [그림 IV-8]의 경우, 자신은 이미 해법을 알고 있으면서 상대방에게 그 해법(근거)를 설명하도록 요구하는 경우이다.



[그림 IV-8] 증명 문제로 뒤집기를 한 사례

4) 그러나 NIM게임의 본질상 3사람이 게임을 하는 경우는 필승전략이 존재하지 않는다.

이와 같은 정보 변경 이외에 자주 보인 구조 변경의 예는 [그림 Ⅳ-9]와 같이 큐브의 방향을 늘린 경우이다. 비록, 이것의 해법은 단순하지만 해법을 알기 전에 문제를 만드는 단계에서는 구조를 변경한 사례로 볼 수 있다. 이외에 [그림 Ⅳ-3]도 전혀 다른 유형의 문제로 바꾸기를 한 예이다.



[그림 Ⅳ-9] 방향을 늘려 구조를 변경한 사례

Ⅴ. 결 론

본 연구는 초등학교 수학영재들에게 NIM게임이라는 특수한 과제가 주어졌을 때 이를 토대로 정보나 구조를 변경하는 방법을 통해 새로운 문제를 만드는 과정을 분석한 것이다. 선행연구와 문헌분석을 통하여 문제 만들기의 속성을 크게 정보 변경과 구조 변경의 둘로 구분하였다. 또한 Lavy & Bershadsky(2003)가 조건 변경을 통하여 만든 문제들의 유형을 범주화한 것을 바탕으로 학생들이 변형하여 만든 문제를 분석하기 위한 틀을 개발하였다.

연구 결과, 수학 영재들이 만들어낸 문제의 유형은 집단별로, 그리고 각 과제에서 요구하는 조건에 따라서 만든 문제의 질적인 측면이나 문제를 만들어가는 과정에서 몇 가지 차이를 보였다. 이로부터 문제 만들기에서 정보와 구조를 변경하는 방법에 대해 다음과 같은 결론을 도출하였다.

첫째, 연구에 참여한 교육청부설 과학영재교육원 소속 초등수학영재들은 대부분 Brown & Walter이 설정한 'What-if-not'전략에 따른 문제 만들기의 Ⅲ수준에서 머물렀다. 7차 정규교육과정에서는 초등학교 중학년부터 문제 만들기를 강조하고 있다. 그러나 우리나라 학생들이 문제를 만드는 것에는 익숙하지만 대부분 자신이 만든 문제의 해법까지 고려하면서 그 해법으로부터 새로운 문제까지 만들어내려고 하지는 않는다는 것을 확인하였다. 그러나 대학부설 과학영재교육원 소속 학생들 중에는 Ⅳ수준에 도달하는 학생들도 있었다.

둘째, 주어진 문제의 정보를 구성하는 요소를 정확히 파악해 내고 또한 각각의 요소를 체계적으로 변형해 내는 우수한 학생들은 보다 다양하고 확장된 유형의 문제를 만들어 내었다. 일반적으로 수학 영재들은 유연성과 독창성을 보여주면서 서로 다른 유형의 문제를 많이 만든다. 지역교육청 수준의 수학영재들은 외부에서 아무런 도움을 주지 않았을 때에는 처음에는 대부분 주어진 정보의 수치 변경을 위주로 하는 문제를 가장 많이 만들었다. 그러나 대학부설 영재교육원의 영재들은 문제에 제시된 다양한 정보 구성 요소를 정확히 파악한 뒤 각 요소를 단계적이고 체계적으로 변형해 감으로써 보다 다양하고 확장된 유형의 문제를 만들었고, 여러 가지 요소의 정보가 복합적으로 결합된 문제를 만드는 경우도 있었다.

셋째, 우수한 학생들은 자신이 문제를 만들어 가는 과정에서 자기통제와 자신의 인지 과정을 조절하면서 수준과 완성도가 높은 문제를 만들어 간다. 또한 그들은 많은 문제를 만들지는 않더라도 정보 구성 요소를 일관성 있게 변화시키면서 서로 다른 정보 유형으로 변경하거나 및 구조를 변경하면서 해법까지도 정확하고 보다 일반화된 수준 높은 문제를 만들었다. 그러나 상대적으로 수준이 낮은 학생들은 논리적으로 구조를 파악하기 보다는 정보구성 요소

중에서 1-2가지 요소만 변형한다. 즉, 표면적으로 드러난 특정한 숫자를 다른 값으로 변경하거나 또는 수치 값의 범위를 변경하는 것과 같이 정보의 수치 값 변경에 치중한다.

이상과 같은 분석 결과에 기반을 두고 수학 영재들의 문제 만들기를 지도하는 방안을 다음과 같이 제안한다. 첫째, 수학 영재들은 다양하게 일반화 할 수 있는 수학적 구조, 관계, 패턴이 내재된 기본 수준의 문제를 충분히 사고할 수 있는 기회가 주어지면, 스스로 구조화한 보다 높은 수준의 수학 문제를 창조할 수 있는 잠재성을 가지고 있다. 따라서 수학 영재라고 해서 높은 수준의 문제만을 제공하여 이를 해결하게 하는 문제해결 교육보다는 열린 기본 문제로부터 수학적 구조, 관계, 패턴을 다양하게 일반화함으로써 새로운 수학을 발견하거나 창조할 수 있도록 격려되어야 한다.

둘째, 때로 학생들은 제공된 문제로부터 자신이 스스로 해법을 고안할 수 없는 엉뚱한 문제를 만들거나 문제의 구성요소가 부족한 문제를 만드는 경우도 있다. 그러나 기존 문제의 구조나 정보를 변경하여 자신이 만든 문제의 해법을 창안할 수 없을 때 다시 자신이 만든 문제의 구조나 정보를 검토하고 반성하는 과정을 통해 메타인지적 사고를 유발하게 된다. 그 때, 자신이 만든 문제의 구조나 정보를 다시 체계적으로 변경시키면서 더 수준 높고 수학적으로 형식화되거나 일반화된 문제를 만들 수 있게 된다. 따라서 가능하다면 교사는 학생들이 만든 문제에 대한 점검과 다양한 문제해결 전략을 활용하여 풀이까지 점검해 보도록 요구해야 한다.

참고문헌

임문규(1999). 문제설정에서 사고활동의 조사, 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A **<수학교육>, 35**(1), 1-13

이항훈(2007). **NIM게임의 조건변경을 통한 문제만들기와 일반화 과정 분석**. 경인교육대학교 교육대학원 초등수학전공.

황규애(1997). **문제상황 제시 형태에 따른 문제설정 활동 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

Brown, S. I. & Walter, I. (1990). *The art of problem posing (2nd ED).* Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and application*(pp. 16-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Creswell, J. W. (2005). **질적 연구방법론: 다섯 가지 전통**. (조흥식 외 3인 공역), 서울: 학지사, 2005. (영어 원작은 1998년 출판).

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics Education, 17*, 261-271.

English, L. N. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83-107.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? In A. Schoenfeld(1985). *Mathematical problem solving*(pp.123-148). New York: Academic Press.

Krutetskii, V. A. (1969). The structure of mathematical abilities. *Vol 2 of Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics.* In J. Kilpatrick & I. Wirszup(Eds.), Chicago: University of Chicago Press.

Lavy & Bershadsky (2003). *Problem posing via* "What if not?" strategy in solid geometry: A case study. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 369-387.

Moses, B., Bjork, E., & Golenberg, E. P. (1993). Beyond problem solving: Problem posing In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and application*(pp. 178-188). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

NCTM(1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM(2000). *Principle and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya. G. (2005). **수학적 발견**. (우정호외 6인 공역), 서울: 교우사.(영어 원작은 1981년 출판).

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: AcademicPress.

Silver, F. A.(1993). On Mathematical problem posing. *Proceeding of the Seventeenth Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* Vol. 1. pp. 66-85.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

A Study on the Cases of the Problem Posing which the Mathematically Gifted Students Made in the NIM Game

Song, Sang Hun · Chong, Yeong Ok · Yim, Jae Hoon · Shin, Eun Ju (Gyeongin National University of Education)
Lee, Hyang Hoon (SurkChun Elementary School)

The purpose of this study is to analyse the cases of the posed problems while the mathematically gifted students are playing the NIM game. The findings of a qualitative case study have led to the conclusions as follows. Most of all mathematically gifted students in the elementary school are not intend to suggest the solutions of the posed problem unless the teacher or the problem is requested. But a higher level of promising children were changing each data components of a problem in a consistent way and restructuring the problems while controlling their cognitive process. This is compared to that a relatively lower level of promising children tends to modify one or two data components instantly without trying to look at the whole structure. And we gave 2 suggestions to teach the mathematically gifted students in the problem posing.

* **Key word** : NIM game(님게임), problem posing(문제만들기), 'what if not?' strategy(조건 변경 전략) , the mathematically gifted(수학영재)

논문접수 : 2006. 12. 26
심사완료 : 2007. 2. 5