

< 논문 >

국소적 조화함수를 사용한 원통좌표계에서의 유동 해석

서 용 권*

(2006년 11월 17일 접수, 2007년 2월 7일 심사완료)

Method of Numerical Simulation by Using the Local Harmonic Functions in the Cylindrical Coordinates

Yong Kweon Suh

Key Words: Cylindrical Coordinates(원통좌표), Harmonic Function(조화함수), Singularity(특이성) Lamb-Dipole Flow(Lamb의 쌍극 유동)

Abstract

Many practical flow problems are defined with the circular boundary. Fluid flows within a circular boundary are however susceptible to a singularity problem when the cylindrical coordinates are employed. To remove this singularity a method has been developed in this study which uses the local harmonic functions in discretization of derivatives as well as interpolation. This paper describes the basic reason for introducing the harmonic functions and the overall numerical methods. The numerical methods are evaluated in terms of the accuracy and the stability. The Lamb-dipole flow is selected as a test flow. We will see that the harmonic-function method indeed gives more accurate solutions than the conventional methods in which the polynomial functions are utilized.

1. 서 론

원형 경계 내의 유체유동은 공학적으로 혹은 자연현상에서 매우 흔하게 접할 수 있는 기본 유동이다. 이 때 유체유동의 해석을 위한 좌표계로서 가장 먼저 원통좌표계를 생각하게 된다. 원통좌표계는 그러나 유동장 내 각 지점에서 단위 벡터들이 원주방향 위치에 따라 그 방향을 달리 하기 때문에 원심력 등과 같은 인위적인 힘이 나타난다. 그러나 무엇보다 중요한 것은 원점에서 특이성이 존재한다는 것이다. (물론 특별한 유동장의 경우에는 이러한 특이성이 존재하지 않는 것도 가능하지만 이러한 경우는 매우 드물다.)

Navier-Stokes 방정식의 수치해석에 있어서 만약 이러한 특이성을 염두에 두지 않고 직교 좌표계에서 수행하였던 방법과 동일한 방법을 적용한

다면 이는 필시 정밀도가 떨어지는 결과를 초래한다. 여기서 직교 좌표계에서 적용하는 방법이란 미분 항의 차분화 혹은 속도 값의 보간을 위해 다항식을 이용하는 방법을 일컫는다. 지금까지 많은 연구자들이 원통좌표계를 이용한 유체유동의 문제를 유한차분법 혹은 유한체적법으로 해석해 왔지만,⁽¹⁻³⁾ 원점에서의 특이성 문제는 여전히 해결되지 않은 문제로 남아 있다.

본 논문에서는 이러한 특이성을 해소하기 위해 새로이 개발한 조화함수의 적용법을 설명한다. 개발된 방법은 엄밀해를 알고 있는 Lamb의 쌍극 유동(dipole flow)에 적용하여 정밀도를 확인하고 또한 동일한 유동에 대해 안정성을 수치적으로 확인한 결과를 제시하고자 한다.

2. 조화함수에 의한 차분화와 보간법

먼저 Navier-Stokes 방정식이 원점에서 가지는 특이성에 대해 간단히 언급하고자 한다. 원통좌

* 회원, 동아대학교 기계공학과

E-mail : yksuh@dau.ac.kr

TEL : (051)200-7648 FAX : (051)200-7656

표계 상에서 무차원화된 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial ru}{r\partial r} + \frac{\partial v}{r\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial ru^2}{r\partial r} + \frac{\partial uv}{r\partial \theta} - \frac{v^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2\partial v}{r^2 \partial \theta} \right] \quad (2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial ruv}{r\partial r} + \frac{\partial v^2}{r\partial \theta} + \frac{uv}{r} = -\frac{\partial p}{r\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2\partial u}{r^2 \partial \theta} \right] \quad (2b)$$

원점 근처에서의 특이성을 설명하기 위해 직교좌표계 (x, y) 상에서 속도성분이 각각 상수 $a_{0x}, a_{1x}, a_{0y}, \dots$ 에 대해

$$q_x = a_{0x} + a_{1x}x + b_{1x}y + a_{2x}x^2 + \dots, \quad (3a)$$

$$q_y = a_{0y} + a_{1y}x + b_{1y}y + a_{2y}y^2 + \dots \quad (3b)$$

와 같은 가장 일반적인 형태를 취한다고 하면 이는 원통좌표계 상에서는 상수 a_{1u}, b_{1u}, \dots 등에 대해

$$u = a_{0u} + a_{1u}\cos\theta + b_{1u}\sin\theta + O(r), \quad (4a)$$

$$v = a_{0v} + a_{1v}\cos\theta + b_{1v}\sin\theta + O(r) \quad (4b)$$

의 형태를 취한다. 따라서 아무리 원점에 가까이 접근한다 하더라도 u, v 의 θ 좌표에 대한 변화의 정도는 줄어들지 않는다. 따라서 연속 방정식 혹은 운동량 방정식의 각 항들은 $O(1/r)$ 의 거동을 보이므로, $r \rightarrow 0$ 시 무한히 증가하게 된다. 물론 부분적으로 이들 항을 결합하면 당연히 $O(1)$ 의 유한한 크기를 가지기 때문에 실제의 물리적인 특이성(physical singularity)은 당연히 존재하지 않게 된다. 그러나 수치해석의 관점에서는 이러한 차이가 중요한 결과를 초래할 수 있다. 즉, 국소 격자삽입법(zonal embedded grid method)⁽⁴⁻⁶⁾에서와 같이 원주방향 격자 수가 작은 경우에는 각 항이 가지는 오차 때문에 운동량 방정식의 대류항 혹은 점성항은 전체적으로 큰 오차를 유발하게 된다. 지배방정식을 이산화할 때 미분항의 차분화 혹은 원하는 지점의 변수 산정을 위한 보간법에 종래의 다항함수(polynomial function)를 적용한다면 오차를 줄이기가 매우 어렵게 된다. 이때 조화함수를 사용한다면 특히 원점에 가까이 갈수록 오차의 감소효과는 두드러지게 할 수 있

는 것이다.

본 연구에서 제시하는 조화함수의 방법은 임의의 변수 $\phi(\theta)$ 를

$$\phi = c + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta \quad (5)$$

와 같이 가정하는 데서 출발한다. (r -방향으로는 다항 함수를 이용한 종래의 방법을 적용한다.) 여기서 θ 는 광역적 좌표(global coordinate)가 아니고 국소적 좌표(local coordinate)를 나타낸다. 즉 $\theta=0$ 는 각 셀의 중심 혹은 각 셀의 변의 중심을 나타낸다. 5개의 상수 a_1, a_2, \dots, c 는 5개 지점의 변수 ϕ 로 구해진다.

먼저 변수가 정의되지 않은 지점의 변수 값을 보간법으로 구하는 방법에 대해 설명한다. ϕ_k 를 기준 지점 $\theta=0$ (기준 지점의 변수는 ϕ_0 로 표현)에서부터 $k\Delta\theta$ 만큼 떨어진 지점의 변수라 하고, $\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 등에서의 변수를 안다고 하고, $\phi_{1/2}$ 를 구하고 싶다고 하자. 그러면, $\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2$ 의 5개 정보로부터 그 값을 구하는 첫 번째 방법을 적용할 수도 있고, 혹은 $\phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ 의 5개 정보로부터 그 값을 구하는 두 번째 방법을 적용할 수도 있다. 그러나 이렇게 하여 알고리즘을 구성하면 풍상차분(upwind difference)의 반대효과 때문에 계산과정이 발산해 버린다. 이 경우에는 두 가지 방법으로 구한 값을 평균하는 방법을 적용하면 문제가 해결된다.

그리고 기준 점 $\theta=0$ 에서의 1계 미분으로는

$$\frac{d\phi}{d\theta} = d_1(\phi_{1/2} - \phi_{-1/2}) + d_2(\phi_1 - \phi_{-1}) \quad (6a)$$

의 식을 적용하거나

$$\frac{d\phi}{d\theta} = d_1(\phi_{1/2} - \phi_{-1/2}) + d_2(\phi_{3/2} - \phi_{-3/2}) \quad (6b)$$

의 식을 적용할 수 있다. 식 (6a)는 그러나 특히 높은 레이놀즈 수에서는 안정성 면에서 불리하므로 식 (6b)를 사용하는 것이 바람직하다는 것이 본 연구의 수치해석 결과 밝혀졌다. 한편 2계 미분도 $\pm\Delta\theta/2$ 와 $\pm\Delta\theta$ 만큼 떨어진 지점의 정보를 이용하는 알고리즘도 적용할 수 있으나, 안정성 면에서 아래와 같이 $\pm\Delta\theta$ 와 $\pm 2\Delta\theta$ 만큼 떨어진 지점의 정보를 이용하는 알고리즘을 적용하는 것이 바람직하다.

$$\frac{d^2\phi}{d\theta^2} = e_2(\phi_2 + \phi_2) + e_1(\phi_1 + \phi_{-1}) + e_0\phi_0 \quad (7)$$

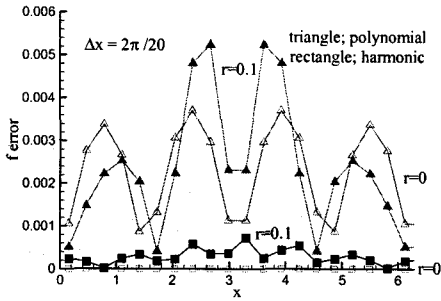


Fig. 1 Numerical errors given by the application of the harmonic-function method in the interpolation for the function given in (8)

보간법의 시험용으로 함수

$$f(x) = \sin x - \sin 2x + r \sin 3x - r^2 \sin 4x + r^3 \sin 5x - r^4 \sin 6x \quad (8)$$

를 사용하여 조화함수 및 다항함수를 이용한 함수 값의 오차를 구한 결과가 Fig. 1이다. 그림에서 다항함수에 의한 방법은 4차 오더의 정밀도를 가지는

$$f_{1/2} = [9(f_1 + f_0) - (f_{3/2} + f_{-1/2})] / 16$$

의 알고리즘으로 구한 것이다. 낮은 r 에서는 식 (8)에서 보듯이 $\sin x$ 와 $\sin 2x$ 가 함수 $f(x)$ 를 주도하기 때문에 그림에서와 같이 매우 정밀도가 높다. $r=1$ 에서는 두 방법이 유사한 정밀도를 보이지만 여전히 조화함수의 방법이 약간 더 좋은 결과를 보인다. 한편, 도함수의 산정에서도 조화함수의 방법이 낮은 r 에서는 다항함수의 방법보다 더 월등히 더 나은 결과를 준다는 것을 확인하였다.

3. 2차원 유동 문제에서의 적용

여기서는 세 가지 2차원 유동문제에 본 방법을 적용해 본다. 첫 번째 유동은 지배방정식에 아무런 체적력이 없이 초기 속도장이 결정되면 그 이후에 계속해서 감소하는 Lamb 쌍극 유동(Lamb dipole flow)이며, 두 번째는 체적력이 시간적으로 변동하는 Lamb 쌍극 유동이다. 그리고 세 번째는 높은 레이놀즈 수에서 초기에 4개의 와류를 공간 내에 분산시켜 두었을 때 시간과 더불어 이들이 상호작용하면서 만들어 내는 복잡한 유동이다.

지배방정식의 차분화에 있어서 유의해야 할 몇 가지 점이 있다. 이러한 점들은 원통 좌표계에서 원점의 특이성과 관련된 것들로서 이 논문에서는 간단히 언급하지만 실제적으로 매우 중요한 점들로서 정밀도나 안정성과 직결되는 것들이다. 가장 먼저, 운동량 방정식을 이산화하는 수식화 작업에서 어떤 한 지점에서 차분화하든지 아니면 격자 셀에 걸쳐 적분하든지 간에 둘 중에서 한 가지만을 고집하는 일관성을 유지해야 한다는 것이다. 그것의 주된 이유는 중심 점 근처에서 원주방향 격자 수가 적은 경우 원주 방향으로 변수 값의 변화가 상대적으로 심하기 때문이다. 예로서, 유한체적법을 적용하는 경우에 있어서 적분

$$I = \int_{-\Delta\theta/2}^{\Delta\theta/2} \phi r dr d\theta \quad (9)$$

을 중앙지점의 평균값을 사용하여

$$I \cong \phi_0 r_0 \Delta r \Delta \theta \quad (10)$$

으로 처리하는 결과와 ϕ 를 조화함수를 이용한 전개식 (5)로 가정한 뒤 θ 에 대해 보다 정밀한 적분을 수행한 결과는 상당한 차이가 있다. 물론 두 가지 방법에 있어서의 정밀도 차이 그 자체가 문제가 되는 것은 당연하지만, 그러나 원통 좌표계에서는 그것보다 두 가지 방법을 혼용하였을 때 원점에서의 특이성이 영향을 미쳐 수치해석 전체의 안정성을 해치는 결과를 초래할 수 있다는 점이 더 중요하다. 식 (10)을 적용하면 정밀도가 약간 떨어지기는 하여도 다른 모든 항의 산정에 있어서 이 방법을 유지한다면 원점에서의 특이성은 약화되는 것이다. 물론 이러한 과정에서 중심점에서의 변수 ϕ_0 를 보간법으로 구해야 하는 경우에는 조화함수를 사용한 보다 엄밀한 방법을 적용할 필요가 있는 것이다. 한편 연속 방정식의 적용에 따른 압력 방정식의 유도에 있어서도 유의해야 할 점이 있다. 우선 연속 방정식 (1)을 격자 셀에 걸쳐 적분하면,

$$\int_{\theta} [(ru)_e - (ru)_w] d\theta + \int_r [v_n - v_s] dr = 0 \quad (11)$$

이 되는데, 두 번째 항은 간단히 $[v_{n0} - v_{s0}] \Delta r$ 로 처리하여도 문제되지 않으나 첫 번째 항을

$$\int_{\theta} [(ru)_e - (ru)_w] d\theta \cong [r_e u_e - r_w u_w] \Delta \theta \quad (12)$$

와 같이 간단히 처리한다면 원점 부근에서 오차가 증대된다. 그 이유는 물론 u_e 혹은 u_w 가 각각의 셀 경계에서 θ 에 따른 변화가 크기 때문이다. 그러나 그렇다고 하여 이 경계에서 u 를 (5)의

보간법으로 처리한다면 주위 압력이 너무 많이 관여하여 압력 방정식의 해법이 까다롭게 된다. 이 경우 가장 간단한 처리 방법으로서 식 (12) 대신에

$$\int_{\theta} [(ru)_e - (ru)_w] d\theta \cong [r_e u_e - r_w u_w] 2\sin\Delta\theta/2 \quad (13)$$

을 적용한다면 정밀도가 한 단계 더 높은 해를 얻을 수 있다.

그 외에 지배방정식의 이산화에 사용된 방법은 종래의 방법과 다를 바 없다. 보다 자세한 수치 해석 방법은 다른 참고문헌⁽⁴⁾에서 설명하고 있다.

첫 번째 유동 문제는 Lamb 쌍극 유동으로서

$$u = 2\exp(-a^2t/Re)[J_1(ar)/ar]\cos\theta \quad (14a)$$

$$v = -2\exp(-a^2t/Re)[J_1'(ar)]\sin\theta \quad (14b)$$

의 해를 가지는 감쇠유동이다. 여기서 J_1 은 Bessel 함수이며 a 는 $J_1(a)=0$ 를 만족하는 상수이다. Fig. 2는 이를 위해 국소적자삼입법⁽⁴⁻⁶⁾으로 구성된 격자계로서 r -방향으로 4개의 영역(앞으로는 이 영역의 개수를 m 으로 표시함)으로 구성되며, 중심 영역에서 격자 수($I_{m1} \times J_{m1}$)은 4×16 이다. 그리고 θ -방향 격자 수는 평균적으로 89개이다.

Fig. 3은 본 유동에 대한 수치해석 결과로서 다항함수를 사용한 경우와 조화함수를 사용한 경우에 있어서 오차 u_{err} , v_{err} 을 나타내고 있다. 다항함수의 방법에서도 정의되지 않은 지점에서의 변수 값 산정에는 조화함수에 의한 보간법을 사용하였다. 수치해석시 사용된 중요 파라미터는 $Re = 10$, $\Delta t = 0.001$ (조화함수의 경우는 0.00075) 등이다. 그림에서 보듯이 조화함수의 방법이 3배 이상의 정밀도를 가진다. 그리고 조화함수를 쓰더라도 연속방정식의 적분을 식 (12)와 같이 처리하는 경우에는 오히려 다항함수의 방법보다 정밀도가 더 떨어진다. 참고로, 이 감쇠 유동은 $t=3$ 에서 속도의 크기가 0.0122 정도로 작아진다.

높은 레이놀즈 수에서는 1차 미분의 항을 식 (6a)로 처리하는 것보다 식 (6b)로 처리하는 것이 안정성 면에서 훨씬 더 유리하다. 예를 들면, $Re = 1800$ 에서 $m=4$, $I_{m1}=6$, $J_{m1}=16$ 로 한 경우, 식 (6a)로 알고리즘을 구성하면 $\Delta t = 0.003$ 에서도 발산하지만 식 (6b)를 적용하면 $\Delta t = 0.02$ 에서도 수렴된 해를 얻을 수 있다.

이제 해가 시간적으로 변동하는 경우의 문제에 대해 적용해 본다. r - 및 θ -방향 운동량 방정식이 각각

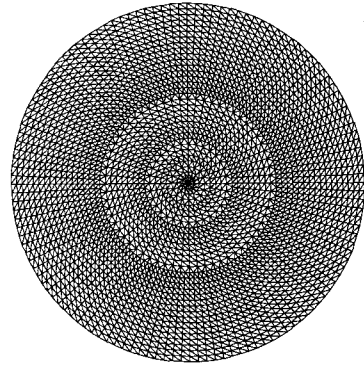


Fig. 2 Zonal embedded grids for the test calculation of the Lamb dipole flow

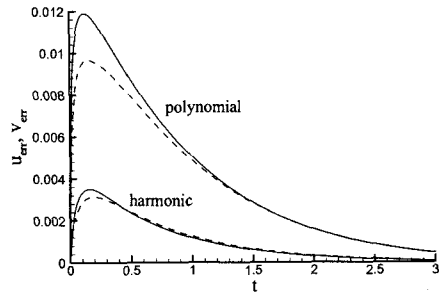


Fig. 3 Numerical errors (solid lines for u_{err} and dashed lines for v_{err}) given by the harmonic- and polynomial- function methods used in discretization of the derivatives for the Lamb-dipole decaying flow model

$$f_B = A(t)[J_1(ar)/ar]\cos\theta, \quad (15a)$$

$$g_B = -A(t)[J_1'(ar)]\sin\theta \quad (15b)$$

의 체적력을 포함하는 경우에 엄밀해는

$$u = B(t)[J_1(ar)/ar]\cos\theta, \quad (16a)$$

$$v = -B(t)[J_1'(ar)]\sin\theta \quad (16b)$$

이다. 여기서, 시간함수 A , B 는 각각 아래와 같다.

$$A = 2[\cos\omega t - a^2/(\omega Re)\sin\omega t]/\sqrt{1+(a^2/\omega Re)^2}$$

$$B = -2\omega\sqrt{1+(a^2/\omega Re)^2}\sin\omega t$$

Fig. 4는 $\omega = 2\pi$ 로 하여 수치해석한 결과로서 여기에서도 조화함수의 우수성을 엿볼 수 있다. 앞의 식 (6a)는 가진 진동수가 비교적 큰 경우(예; $\omega = 2\pi$)에는 레이놀즈 수가 높다 하더라도 (6b)와

다를 바 없이 그대로 적용해도 문제되지 않는다. 그러나 진동수가 상대적으로 작은 경우(예; $\omega = \pi/10$)에는 감쇠 유동에서의 같이 식 (6a)에 의한 알고리즘은 발산하게 된다.

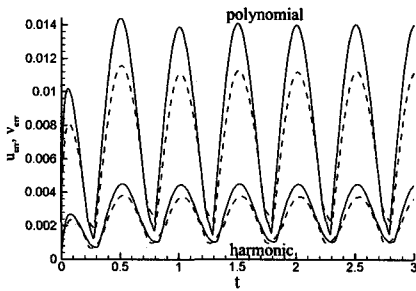


Fig. 4 Numerical errors for the time-periodic Lamb dipole flow

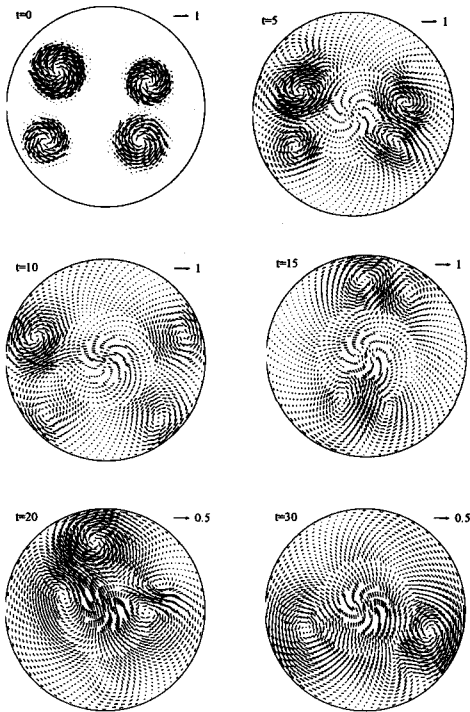


Fig. 5 Development of the velocity field at a high Reynolds number; $Re = 3000$

마지막으로 본 수치해석 방법을 높은 레이놀즈 수의 복잡한 유동에 대해 적용해 본다. Fig. 5는 초기에 강도가 서로 다른 4개의 와류를 위치시켰을 때 시간과 더불어 이들이 감쇠하면서 동시에 와류의 상호 작용으로 복잡한 유동장을 형성하는 과정을 수치해석한 결과로서, $Re = 3000$, $m = 5$, $L_{m1} = 4$, $J_{m1} = 16$, $\Delta t = 0.01$ 의 조건에서 구한 것이다.

그림에서, 처음 4개의 와류는 위치상으로 상호 대칭성이 유지되지 않도록 하였다. 좌측에 있는 2개의 와류는 회전 방향이 서로 다른 하나의 와류쌍(vortex pair)을 이루며 좌측으로 나아가고 우측에 있는 2개의 와류도 쌍을 이루어 우측으로 나아간다. 각각의 쌍은 원통의 좌우측 벽면에 도착한 뒤 어느 정도의 시간동안 머무르다가($t = 5$, 10 때의 그림) 다시 상하로 각각 분리되어 나아간다. 상하 벽면 근처에서 만난 와류들은($t = 15$) 다시 쌍을 이루고 원의 중심부로 이동한다. 중심부에서 만난 4개의 와류들은 다시 흩어지고 이제는 좌상 및 우하 쪽으로 비스듬히 나아간다. ($t = 20$) 우하 쪽으로 나아간 와류들은 벽면에 도착하고 나서부터 그 약한 세력 때문에 거의 소멸 상태에 있는 반면 좌상 쪽으로 나아간 와류들은 아직도 그 강도가 유지되어 원통 표면을 따라 돌아서 아래쪽으로 이동한다. ($t = 30$) 이후, 하부에서 만난 두 와류는 다시 쌍을 이루어 상부로 나아간다. 이 때 우측의 와류가 강하므로 운동궤적은 우측으로 치우친 모양을 보인다.

Fig. 6은 Fig. 5와 같은 파라미터 조건의 결과로서, 공간 내 한 지점의 속도 성분들이 시간과 더불어 어떻게 불규칙적인 거동을 보이는지를 확인하기 위한 것이다. 처음 $t = 6$ 정도까지는 매우 빠른 변화를 보이고 있는데 이는 Fig. 5의 $t = 5$ 에 대한 그림에서 일부 나타나 있는 바와 같이, 특히 좌측 벽면에 도착한 위쪽의 와류가 또 다른 와류를 만들어 내는 과정에서 와류들의 상호작용으로 나타난 결과라 생각된다.

Fig. 7은 압력장과 반경방향 속도장의 순간 분포를 나타내는 것으로서 Fig. 5의 마지막 그림에서 나타난 두 개의 와류가 우상 쪽으로 이동해가는 과정에서의 한 순간에 해당한다. 그림에서 알 수 있듯이 압력장이든 속도장이든 중심부 혹은 격자수가 서로 다른 반경방향 영역 사이의 경계에서 불연속적인 분포를 전혀 찾아볼 수 없

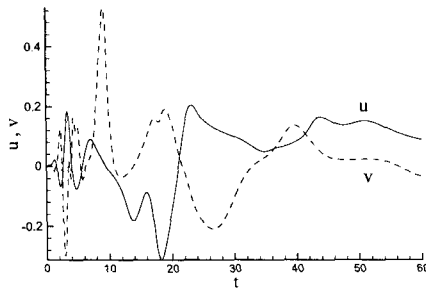


Fig. 6 Time history of the velocity components u and v at the point $(r, \theta) = (1/2, \pi/2)$ for the complex flow with the same parameter set as in Fig. 5

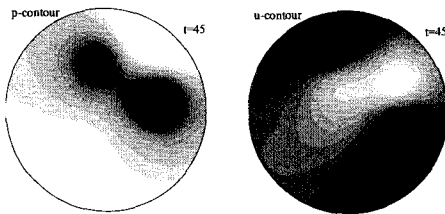


Fig. 7 Pressure(left) and radial velocity(right) contours at the same parameter set as in Fig. 5

이 매끄러운 분포를 보이고 있어 본 수치해석적 방법이 타당함을 입증하고 있다.

4. 결론

본 연구는 원통 내 점성 유체유동을 해석하기 위한 좌표계로서 원통좌표계를 선택하는 경우, 원점에서의 특이성을 피하기 위한 하나의 방안으로서 조화함수를 사용하는 수치해석적 방법에 관한 것이다. 본 연구의 결론을 요약한다면 아래와 같다.

- (1) 제안된 조화함수의 방법을 사용한다면 원점에서의 특이성을 피할 수 있다.
- (2) 본 조화함수의 방법을 국소적 격자삽입법에 의한 격자계에 적용하여 Lamb의 정상 및 비정상

쌍극 유동에 적용하여 정밀도가 높은 해를 구할 수 있었다.

(3) 다항함수를 사용한 종래의 방법에 비해 조화함수를 사용한 방법은 안정성, 정밀도 면에서 우수한 성능을 보인다.

(4) 복잡한 고 레이놀즈 수의 흐름에 대해 적용한 결과 물리적으로 타당한 해를 얻을 수 있었으며 원점에서의 특이성도 전혀 보이지 않는 매끄러운 해를 얻을 수가 있었다.

후 기

이 논문은 2005년도 정부(과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 국가지정연구실사업으로 수행된 연구임.(과제번호: 2005-01091)

참고문헌

- (1) Verzicco, R. and Orlandi, P., 1996, "A Finite-Difference Scheme for Three-dimensional Incompressible Flows in Cylindrical Coordinates," *J. Comput. Phys.* Vol. 123, pp. 402~414.
- (2) Fukagata, K. and Kasagi, N., 2002, "Highly Energy-conservative Finite Difference Method for the Cylindrical Coordinate System," *J. Comput. Phys.*, Vol. 181, pp. 478~498.
- (3) Akselvoll, K. and Moin, P., 1996, "An Efficient Method for Temporal Integration of the Navier-Stokes Equations in Confined Axisymmetric Geometries," *J. Comput. Phys.*, Vol. 125, pp. 454~463.
- (4) Suh, Y.K., 2003, "Development of Zonal-embedded-grid Method and its Application," *Proc. 2nd KSV Conf.*, pp. 55~58.
- (5) Suh, Y.K. and Yeo, C.H., 2004, "Study on the Spin-up of Fluid in a Semi-circular Container Using a Zonal-embedded-grid Method," *J. KSV*, Vol. 2, No. 2, pp. 32~37.
- (6) Suh, Y.K. and Yeo, C.H., 2006, "Finite Volume Method with Zonal-embedded Grids for Cylindrical Coordinates," *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 52, pp. 263~295.