

# 주기적인 유동과 압력의 변화를 수반하는 맥동관의 열전달계수와 전단계수

정 은 수<sup>†</sup>

홍익대학교 기계·시스템디자인공학과

## Heat Transfer Coefficient and Shear Factor Subjected to Both Oscillating Flow and Oscillating Pressure in Pulse Tubes

Eun Soo Jeong<sup>†</sup>

Department of Mechanical and System Design Engineering, Hongik University, Seoul 121-791, Korea

(Received September 7, 2006; revision received January 4, 2007)

**ABSTRACT:** Heat transfer and momentum transfer under conditions of both oscillating flow and oscillating pressure within pulse tubes show very different behavior from those for steady state conditions. The analytic solutions of axial velocity and temperature of the gas within pulse tubes were obtained by assuming that the variations in pressure and temperature were purely sinusoidal and small. The shear stress and the heat flux at the tube wall obtained from the solutions are expressed in terms of the cross-sectional averaged velocity, the difference between mean temperature and instantaneous cross-sectional averaged temperature and the difference between mean pressure and instantaneous pressure. It is shown that the complex shear factor, which has been applied to momentum transfer of incompressible oscillating flow, and the complex Nusselt number, which has been applied to either heat transfer with oscillating pressure only or heat transfer of incompressible oscillating flow, could also be used for momentum transfer and heat transfer subjected to both oscillating flow and oscillating pressure, respectively.

**Key words:** Pulse tube(맥동관), Heat transfer coefficient(열전달계수), Shear factor(전단계수), Oscillating pressure(주기적인 압력), Oscillating flow(주기적인 유동)

### 기 호 설 명

$C_p$  : 정압비열 [J/kgK]  
 $C_w$  : 맥동관 벽의 비열 [J/kgK]  
 $D$  : 맥동관의 안지름 [m]  
 $h$  : 열전달계수 [ $W/m^2K$ ]

$i$  : 허수단위,  $\sqrt{-1}$   
 $Im$  : 복소수의 허수부  
 $k$  : 열전도계수 [ $W/mK$ ]  
 $L$  : 맥동관의 길이 [m]  
 $l$  : 맥동관 벽의 두께 [m]  
 $Nu$  : Nusselt 수  
 $p$  : 압력 [Pa]  
 $Pr$  : Prandtl 수,  $\nu/\alpha$   
 $q_w''$  : 벽에서 가스로의 열유속 [ $W/m^2$ ]  
 $R$  : 맥동관의 안쪽 반지름 [m]

<sup>†</sup> Corresponding author

Tel.: +82-2-320-1676; fax: +82-2-322-7003

E-mail address: esjeong@hongik.ac.kr

- $r$  : 반경방향 좌표
- Re : 복소수의 실수부
- S : 전단계수
- $T$  : 온도 [K]
- $t$  : 시간 [s]
- $u$  : 축방향 속도 [m/s]
- $U_0$  : 관 중심에서의 축방향 속도 [m/s]
- $v$  : 반경방향 속도 [m/s]
- $x$  : 축방향 좌표
- $y$  :  $x$ 에 수직한 직교 좌표

**그리스 문자**

- $\mu$  : 점성계수 [kg/m·s]
- $\rho$  : 밀도 [kg/m<sup>3</sup>]
- $\tau$  : 전단응력 [Pa]
- $\omega$  : 각속도 [s<sup>-1</sup>]

**상첨자**

- \* : 무차원 변수

**하첨자**

- $l$  : 1차항
- $m$  : 시간 평균
- $P$  : 압력
- $T$  : 온도
- $w$  : 맥동관 벽

**1. 서 론**

맥동관냉동기의 맥동관 내부에서 일어나는 작동기체와 벽 사이의 운동량 및 열전달은 유동과 압력의 주기적인 변화를 수반한다. 이러한 조건 하에서 일어나는 운동량 및 열전달은 정상상태의 운동량 및 열전달과 매우 다른 특성을 보인다. 지금까지의 이론적인 연구와 실험적 연구들에 의하면 유동과 압력이 주기적으로 변할 때 벽의 열유속과 작동기체와 벽의 온도차 사이에 위상차(phase shift)가 존재하고, 또한 벽의 전단응력과 작동기체의 평균 속도 사이에도 위상차가 발생한다.<sup>(1-8)</sup>

Pfriem<sup>(1)</sup>과 Lee<sup>(2)</sup>는 압력과 온도의 주기적인

변화가 작다고 가정하여 주기적으로 압력이 변화하는 이상기체의 열전도방정식의 해를 구하였다. 그들은 벽의 열전달률과 벽과 기체의 온도차 사이에 발생하는 위상차를 고려하기 위하여 복소 열전달계수(complex heat transfer coefficient)를 제안하였는데, Lee의 복소 Nusselt 수는 기체의 밀도변화가 작을 때의 실험결과를 잘 예측하였다.<sup>(2)</sup> Jeong<sup>(5)</sup>은 주기적으로 압력이 변화하는 이상기체의 연속방정식과 에너지방정식의 근사해를 구하였다. Jeong은 벽의 열전달률을 벽의 온도와 기체의 단면 평균 온도의 차이에 비례하는 항과 압력의 변화율에 비례하는 항의 합으로 표현하였으며, 이 열전달관계식은 실험결과를 잘 예측하였다.<sup>(5)</sup> Kurzweg<sup>(6)</sup>과 Gedeon<sup>(7)</sup>은 비압축성 유체가 왕복운동할 때 벽의 열전달률(전단응력)과 벽과 기체의 온도차(기체의 평균 속도) 사이에 위상차가 존재하는 것을 이론적으로 보였다. Gedeon<sup>(7)</sup>은 이러한 위상차를 설명하기 위하여 복소 전단계수와 복소 Nusselt 수를 제안하였다. Kornhauser and Smith<sup>(8)</sup>는 복소 Nusselt 수가 유동과 압력이 모두 주기적으로 변할 때의 열전달을 예측할 수 있다는 가능성을 실험적으로 보였다.

본 연구에서는 유동과 압력이 모두 주기적으로 변하는 맥동관 내부의 작동기체의 운동량보존식과 에너지보존식, 그리고 벽의 에너지보존식을 선형화(linearized)하여 작동기체의 온도, 벽의 온도, 그리고 축방향 속도를 구하였고, 이것들을 이용하여 전단응력관계식과 열전달관계식을 유도하였다.

**2. 해석모델과 온도와 속도의 1차해**

Fig. 1은 맥동관냉동기의 맥동관을 나타낸다. 저온열교환기와 고온열교환기가 각각 맥동관의 왼쪽과 오른쪽에 위치한다. 맥동관 내부의 작동기체

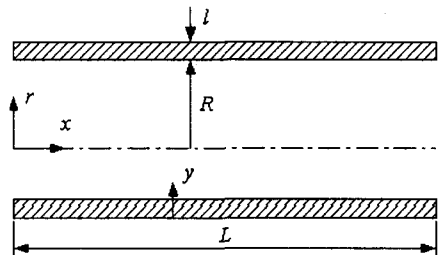


Fig. 1 Schematic diagram of a pulse tube.

는 각속도  $\omega$ 로 왕복운동하고, 압력도 속도와 같은 주기를 갖으며 주기적으로 변한다.

해석에 사용된 주요 가정들은 다음과 같다.

(1) 작동기체의 변위는 맥동관의 길이  $L$ 에 비하여 매우 작다.

(2) 맥동관의 길이는 반지름에 비하여 매우 길다. 따라서, 반경방향의 압력변화는 무시할 수 있다.

(3) 압력과 속도가 변하지 않을 때 작동기체와 벽의 시간 평균 온도는  $T_m$ 으로 같으며,  $T_m$ 은  $x$ 의 함수이다.

(4) 작동기체는 완전기체이고, 유동은 층류이다.

(5) 맥동관 벽의 바깥쪽은 단열되어 있다.

위의 가정들을 사용하여 작동기체의 축방향 운동량보존식과 에너지보존식, 그리고 벽의 에너지보존식을 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (1)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \left( \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \quad (2)$$

$$\rho_w C_w \frac{\partial T_w}{\partial t} = k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} \quad (3)$$

맥동관 벽의 두께는 맥동관의 반지름에 비하여 매우 얇으므로 맥동관 벽에는 직교좌표계를 사용하였다.

식(1)~(3)의 경계조건들은 다음과 같다.

$$r=0 : \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

$$r=R, y=l : u=0, T=T_w, -k \frac{\partial T}{\partial r} = k_w \frac{\partial T_w}{\partial y} \quad (4)$$

$$y=0 : \frac{\partial T_w}{\partial y} = 0$$

위의 방정식들의 해는 연속근사(successive approximation) 방법을 사용하여 구하였다.<sup>(10)</sup> 이 방법에 의하면 모든 변수들은 시간 평균항과 고차항들의 합으로 표현된다. 변수들을 1차항까지 전개하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(x, r, t) = 0 + \text{Re} [u_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (5)$$

$$v(x, r, t) = 0 + \text{Re} [v_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (6)$$

$$T(x, r, t) = T_m(x) + \text{Re} [T_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (7)$$

$$\rho(x, r, t) = \rho_m(x) + \text{Re} [\rho_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (8)$$

$$p(x, t) = p_m + \text{Re} [p_1(x) e^{i\omega t}] \quad (9)$$

$$T_w(x, y, t) = T_m(x) + \text{Re} [T_{w1}(x, y) e^{i\omega t}] \quad (10)$$

$$\mu(x, r, t) = \mu_m(x) + \text{Re} [\mu_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (11)$$

$$k(x, r, t) = k_m(x) + \text{Re} [k_1(x, r) e^{i\omega t}] \quad (12)$$

여기서  $\text{Re} [ \ ]$ 는 복소수의 실수부를 의미하고, 하첨자 '1'을 갖는 변수들은 1차항들의 복소진폭을 나타낸다. 작동기체의 비열, 맥동관 벽의 비열과 열전도도의 1차 이상의 항들은 본 연구에서는 중요하지 않으므로 하첨자 'm'을 생략하였다. 두 개의 1차항들의 곱은 2차항이고, 시간 평균항과 1차항의 곱은 1차항이다.

식(5)~(12)를 식(1)~(3)에 대입하여 1차항들만을 모으면 다음과 같은 1차방정식들을 얻을 수 있다.

$$i\omega \rho_m u_1 = - \frac{dp_1}{dx} + \mu_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (13)$$

$$\rho_m C_p \left( i\omega T_1 + u_1 \frac{dT_m}{dx} \right) = i\omega p_1 + k_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \quad (14)$$

$$i\omega \rho_w C_w T_{w1} = k_w \frac{\partial^2 T_{w1}}{\partial y^2} \quad (15)$$

식(13)과 경계조건  $r=0$ 에서  $\partial u/\partial r=0$ ,  $r=R$ 에서  $u=0$ 을 이용하여 1차 축방향 속도의 복소진폭을 구하면 다음과 같다.

$$u_1(x, r) = \frac{i}{\rho_m \omega} \frac{dp_1}{dx} \left[ 1 - \frac{J_0\{(i-1)\beta r/R\}}{J_0\{(i-1)\beta\}} \right] \quad (16)$$

$$\beta = \frac{R}{\sqrt{2\mu_m/(\rho_m \omega)}} \quad (17)$$

여기서  $J_0$ 는 차수가 0인 1종 Bessel 함수이다.  $\beta$ 는 맥동관의 안쪽 반지름과 속도경계층의 두께의 비를 나타내는 무차원수인데, 무차원 진동수로도

해석할 수 있다.

식(16)을 다음과 같이 표현할 수 있는데

$$u_1(x, r^*) = U_0(x) f(r^*) \quad (18)$$

여기서  $U_0$ 는 1차 축방향 속도의 관 중심( $r=0$ )에서의 복소진폭이고  $r^* = r/R$ 이다.  $f(r^*)$ 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$f(r^*) = \frac{J_0\{(i-1)\beta\} - J_0\{(i-1)\beta r^*\}}{J_0\{(i-1)\beta\} - 1} \quad (19)$$

식(18)을 식(14)에 대입하고 식(14)와 (15)를 경계조건들  $r=0$ 에서  $\partial T/\partial r=0$ ,  $r=R$ (또는  $y=l$ )에서  $T=T_w$ ,  $-k(\partial T/\partial r) = k_w(\partial T_w/\partial y)$ , 그리고  $y=0$ 에서  $\partial T_w/\partial y=0$ 을 이용하여 적분하면 작동기체의 1차 온도와 벽의 1차 온도의 복소진폭을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$T_1(x, r^*) = \frac{p_1}{\rho_m C_p} g_1(r^*) + \frac{U_0}{\omega} \frac{dT_m}{dx} g_2(r^*) \quad (20)$$

$$T_{w1}(x, y^*) = \left[ \frac{p_1}{\rho_m C_p} g_1(1) + \frac{U_0}{\omega} \frac{dT_m}{dx} g_2(1) \right] \times \frac{\cosh\{(1+i)\beta_w y^*\}}{\cosh\{(1+i)\beta_w\}} \quad (21)$$

$$g_1(r^*) = 1 - \frac{1}{1+\epsilon_s} \frac{J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}} r^*\}}{J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\}} \quad (22)$$

$$g_2(r^*) = i \frac{J_0\{(i-1)\beta\}}{J_0\{(i-1)\beta\} - 1} \left[ 1 + \frac{\text{Pr}}{1-\text{Pr}} \times \frac{J_0\{(i-1)\beta r^*\}}{J_0\{(i-1)\beta\}} - \frac{1}{1-\text{Pr}} \times \frac{1+\epsilon_s \chi \sqrt{\text{Pr}}}{1+\epsilon_s} \frac{J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}} r^*\}}{J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\}} \right] \quad (23)$$

$$\beta_w = \frac{l}{\sqrt{2k_w/(\rho_w C_w \omega)}} \quad (24)$$

$$\epsilon_s = -i \frac{\sqrt{k_m \rho_m C_p}}{\sqrt{k_w \rho_w C_w}} \times \frac{J_1\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\} / J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\}}{\tanh\{(1+i)\beta_w\}} \quad (25)$$

$$\chi = \frac{J_1\{(i-1)\beta\} / J_0\{(i-1)\beta\}}{J_1\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\} / J_0\{(i-1)\beta\sqrt{\text{Pr}}\}} \quad (26)$$

여기서  $y^* = y/l$ 이고  $J_1$ 은 차수가 1인 1종 Bessel 함수이다. 식(22)와 (23)에서  $g_1(1)$ 과  $g_2(1)$ 을 구하면 다음과 같다.

$$g_1(1) = \frac{\epsilon_s}{1+\epsilon_s} \quad (27)$$

$$g_2(1) = i \frac{J_0\{(i-1)\beta\}}{J_0\{(i-1)\beta\} - 1} \frac{1 - \chi \sqrt{\text{Pr}}}{1 - \text{Pr}} \frac{\epsilon_s}{1 + \epsilon_s} \quad (28)$$

$g_1(1)$ 과  $g_2(1)$ 이 모두  $\epsilon_s/(1+\epsilon_s)$ 에 비례하므로 맥동관 벽의 열용량이 작동기체의 열용량보다 매우 크면, 즉  $\epsilon_s \ll 1$ 이면, 벽의 온도변화의 진폭이 매우 작다는 것을 식(21)에서 알 수 있다.

### 3. 복소 전단계수

식(5)와 (18)에서  $u$ 와  $\partial u/\partial t$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u = \text{Re} [ U_0 f(r^*) e^{i\omega t} ] \quad (29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{Re} [ i\omega U_0 f(r^*) e^{i\omega t} ] \quad (30)$$

식(29)와 (30)의 단면평균( $\langle \rangle$ 로 표시)을 취하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\langle u \rangle = \text{Re} [ U_0 \langle f \rangle e^{i\omega t} ] \quad (31)$$

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} = -\omega \text{Im} [ U_0 \langle f \rangle e^{i\omega t} ] \quad (32)$$

여기서  $\text{Im} [ ]$ 는 복소수의 허수부를 나타내고, 단면 평균은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle f \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R f(r) 2\pi r dr = 2 \int_0^1 f(r^*) r^* dr^* \quad (33)$$

식(29)에서 맥동관 벽의 전단응력을 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\mu_m \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} \\ &= \frac{\mu_m}{R} \text{Re} \left[ \left( -\frac{f'(1)}{\langle f \rangle} \right) (U_0 \langle f \rangle e^{i\omega t}) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

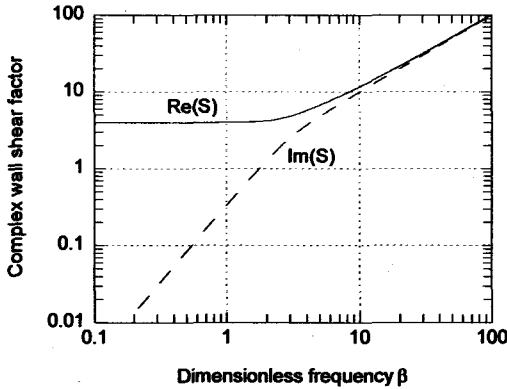


Fig. 2 Complex wall shear factor as a function of  $\beta$ .

식(31)과 (32)를 이용하여 식(34)를 다시 쓰면 다음과 같이 되는데

$$\tau_w = \frac{\mu_m}{R} \left[ \text{Re}(S) \langle u \rangle + \text{Im}(S) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} \right] \quad (35)$$

$S$ 는 복소 전단계수(complex shear factor)로 다음과 같이 정의된다.<sup>(7)</sup>

$$S = - \frac{f'(1)}{\langle f \rangle} \quad (36)$$

Fig. 2는 무차원진동수  $\beta$ 가 복소 전단계수에 미치는 영향을 보여준다.  $\beta$ 가 작을 때  $\text{Re}(S)$ 는 거의 일정하고  $\text{Im}(S)$ 는  $\text{Re}(S)$ 에 비하여 매우 작은 것을 알 수 있는데, 이것은  $\beta$ 가 매우 작을 경우에는 벽의 전단응력이 정상상태와 같이 단면 평균 속도에 비례하는 것을 의미한다.  $\beta$ 가 0으로 갈수록 복소 전단계수  $S$ 가 4로 접근해 가는 것을 볼 수 있는데, 원관을 흐르는 층류 정상유동의 경우 벽면에서의 전단응력이  $\tau_w = 4\mu \langle u \rangle / R$ 로 표현되므로<sup>(11)</sup> 4는 정상상태의 전단계수값이다.  $\beta$ 가 큰 경우에는  $\beta$ 가 증가할수록  $\text{Re}(S)$ 와  $\text{Im}(S)$ 가 모두 증가한다.  $\beta \gg 1$ 일 때  $\text{Re}(S) \approx \text{Im}(S)$ 이므로 벽면에서의 전단응력이 평균 속도를 45° 앞서 간다.

#### 4. 복소 Nusselt 수

식(7)과 (20)에서  $T$ 와  $\partial T / \partial t$ 를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = T_m + \text{Re} \left[ \frac{p_1}{\rho_m C_p} g_1(r^*) e^{i\omega t} + \frac{U_0}{\omega} \frac{dT_m}{dx} g_2(r^*) e^{i\omega t} \right] \quad (37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \text{Re} \left[ i\omega \frac{p_1}{\rho_m C_p} g_1(r^*) e^{i\omega t} + iU_0 \frac{dT_m}{dx} g_2(r^*) e^{i\omega t} \right] \quad (38)$$

식(37)과 (38)의 단면 평균을 취하면 다음과 같은 식들을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{\omega} \frac{dT_m}{dx} \text{Re} [U_0 \langle g_2 \rangle e^{i\omega t}] = \langle T \rangle - T_m - \text{Re} \left[ \frac{p_1}{\rho_m C_p} \langle g_1 \rangle e^{i\omega t} \right] \quad (39)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{dT_m}{dx} \text{Im} [U_0 \langle g_2 \rangle e^{i\omega t}] = - \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} - \text{Im} \left[ \frac{p_1}{\rho_m C_p} \langle g_1 \rangle e^{i\omega t} \right] \quad (40)$$

식(20)에서 맥동관 벽에서 작동기체로 전달되는 열유속을 구하면 다음과 같다.

$$q_w'' = k_m \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{k_m}{R} \text{Re} \left[ \left( \frac{p_1}{\rho_m C_p} e^{i\omega t} \right) g_1'(1) \right] + \frac{k_m}{R} \text{Re} \left[ \left( \frac{g_2'(1)}{\langle g_2 \rangle} \right) \left( \frac{1}{\omega} \frac{dT_m}{dx} U_0 \langle g_2 \rangle e^{i\omega t} \right) \right] \quad (41)$$

식(39)와 (40)을 식(41)에 대입하고 식(9)를 이용하여 열유속을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q_w'' = \frac{k_m}{D} \left[ \text{Re}(Nu_T) (T_m - \langle T \rangle) - \text{Im}(Nu_T) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + \text{Re}(Nu_P) \left( \frac{p_m - p}{\rho_m C_p} \right) - \text{Im}(Nu_P) \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho_m C_p} \right) \right] \quad (42)$$

여기서  $Nu_T$ 와  $Nu_P$ 는 온도차와 압력차에 대한 복소 Nusselt 수로 다음과 같이 정의된다.

$$Nu_T = \frac{h_T D}{k_m} = -2 \frac{g_2'(1)}{\langle g_2 \rangle} \quad (43)$$

$$Nu_p = \frac{h_p D}{k_m} = -2 \frac{g_1'(1) \langle g_2 \rangle - \langle g_1 \rangle g_2'(1)}{\langle g_2 \rangle} \quad (44)$$

$D$ 는 맥동관의 지름이고,  $h_T$ 와  $h_p$ 는 각각 온도차와 압력차에 대한 열전달계수들이다.

평균 온도  $T_m$ 과 평균 압력  $p_m$ 은 시간에 따라 변하지 않으므로 식(42)를 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$q_w'' = \left[ \text{Re}(h_T)(T_m - \langle T \rangle) + \text{Im}(h_T) \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} (T_m - \langle T \rangle) \right] + \left[ \text{Re}(h_p) \left( \frac{p_m - p}{\rho_m C_p} \right) + \text{Im}(h_p) \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_m - p}{\rho_m C_p} \right) \right] \quad (45)$$

$(T_m - \langle T \rangle)$ 는 벽(또는 작동기체)의 시간 평균 온도와 작동기체의 순간적인 단면 평균 온도의 차를 나타내고,  $(p_m - p)$ 는 평균 압력과 순간적인 압력의 차를 나타낸다. 식(42)와 (45)는 맥동관 내부에서와 같이 유동과 압력이 모두 주기적으로 변하는 경우의 열전달률은 온도의 차에만 비례하는 것이 아니라 평균 압력과 순간적인 압력의 차, 단면 평균 온도의 시간에 대한 변화율, 그리고 압력의 시간에 대한 변화율에 의하여 결정된다는 것을 보여준다. 식(42)와 (45)의 우변의 두번째 항과 마지막 항은 작동기체의 에너지저장효과를 나타내고, 식(42)와 (45)의 우변의 두번째, 세번째, 그리고 마지막 항들 때문에 열유속과 온도차 사이의 위상차가 발생한다.  $h_p$ 가 0이 되면 식(45)는 압

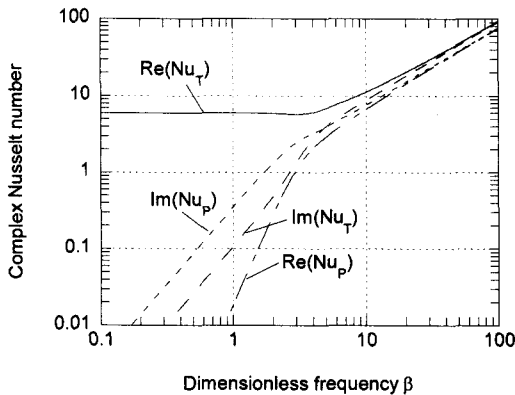


Fig. 3 Complex Nusselt number as a function of  $\beta$  ( $Pr=0.7$ ,  $\epsilon_s=0$ ).

력만 주기적으로 변하는 경우의 열전달관계식<sup>(2,4)</sup>이나 비압축성 유체가 왕복운동할 때의 열전달관계식<sup>(7)</sup>과 같은 형태가 된다.

Fig. 3은  $Pr=0.7$ 이고  $\epsilon_s=0$ 일 때 무차원진동수  $\beta$ 가 복소 Nusselt 수  $Nu_T$ 와  $Nu_p$ 에 미치는 영향을 보여준다.  $\beta$ 가 작을 때  $\text{Re}(Nu_T)$ 는 거의 일정하나  $\text{Im}(Nu_T)$ ,  $\text{Re}(Nu_p)$ ,  $\text{Im}(Nu_p)$ 는  $\text{Re}(Nu_T)$ 에 비하여 매우 작은 것을 알 수 있는데, 이것은  $\beta$ 가 매우 작을 경우에는 벽의 열유속이 정상상태와 같이 벽의 온도와 작동기체의 평균 온도의 차이에 비례하는 것을 의미한다. 벽면의 열유속이 일정한 원관을 흐르는 층류 정상유동의 속도와 온도<sup>(11)</sup>를 이용하여 단면 평균 온도와 혼합 평균 온도를 구하면 다음과 같다.

$$\langle T \rangle = T_w - \frac{1}{6} \frac{\rho C_p \langle u \rangle R^2}{k} \frac{dT_m}{dx} \quad (46)$$

$$T_{bulk} = T_w - \frac{11}{48} \frac{\rho C_p \langle u \rangle R^2}{k} \frac{dT_m}{dx} \quad (47)$$

벽의 온도와 벽면의 열유속이 일정한 원관을 흐르는 층류 정상유동의 경우 벽의 온도와 혼합 평균 온도(bulk temperature)의 차이로 정의되는 Nusselt 수는  $48/11$ 이나,<sup>(11)</sup> 식(46)과 식(47)에서  $(T_w - \langle T \rangle)/(T_w - T_{bulk})=8/11$ 이므로 벽의 온도와 단면 평균 온도의 차이로 정의되는 Nusselt 수는 6.0이 된다. Fig. 3에서  $\beta \ll 1$ 일 때  $Nu_T$ 가 6.0인 것을 볼 수 있다.  $\beta$ 가 큰 경우에는  $\beta$ 가 증가할수록  $Nu_T$ 와  $Nu_p$ 가 모두 증가한다.  $\beta \gg 1$ 일 때  $\text{Re}(Nu_T)$ 와  $\text{Im}(Nu_T)$ 가 거의 같고 또  $\text{Re}(Nu_p)$ 와  $\text{Im}(Nu_p)$ 가 거의 같으므로 벽면에서의 열유속과 벽과 작동기체의 온도차 사이에 위상차가 발생한다.

압력의 변화가 없고 작동기체가 왕복운동만 하는 경우 식(42)는 다음과 같이 된다.

$$q_w'' = \frac{k_m}{D} \left[ \text{Re}(Nu_T)(T_m - \langle T \rangle) - \text{Im}(Nu_T) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right] \quad (48)$$

식(48)은 비압축성 유체가 평행한 평판 사이를 왕복운동하는 경우의 열전달관계식<sup>(7)</sup>과 유사한 모양을 갖는다. Prandtl 수가  $Nu_T$ 에 미치는 영향을

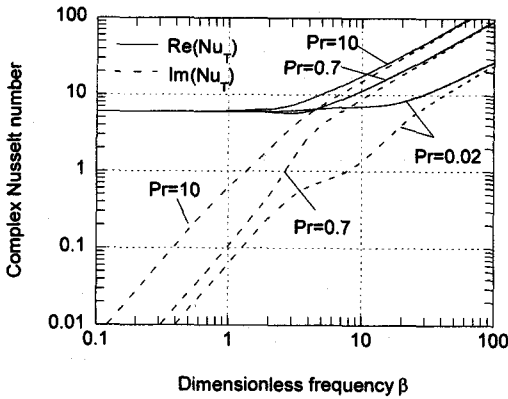


Fig. 4 Complex Nusselt number for incompressible oscillating flow as a function of  $\beta$  and  $Pr$  ( $\epsilon_s=0$ ).

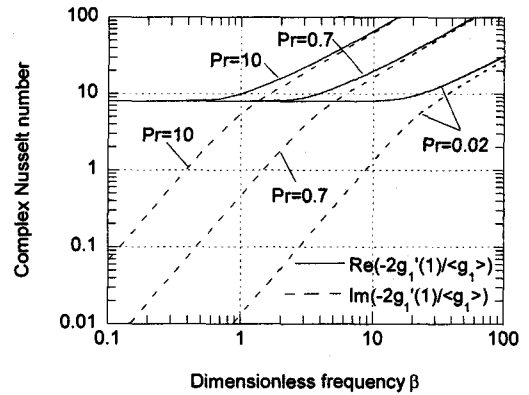


Fig. 5 Complex Nusselt number for a gas subjected to oscillating pressure without oscillating flow as a function of  $\beta$  and  $Pr$  ( $\epsilon_s=0$ ).

Fig. 4에 나타내었다.  $\beta$ 가 작을 때  $Re(Nu_T)$ 는 거의 일정하나  $Im(Nu_T)$ 는 Prandtl 수가 커지면 증가하는 것을 볼 수 있다.  $\beta$ 가 클 경우 Prandtl 수가 커질수록  $Nu_T$ 는 증가한다.

작동기체의 왕복운동은 없고 압력만 주기적으로 변하는 경우의 열전달관계식 또는 압력과 유동이 주기적으로 변화하나 축방향 온도구배  $dT_m/dx=0$ 인 경우의 열전달관계식을 식(39), (40), (41)에서 구하면 다음과 같이 표현된다.

$$q_w = \frac{k_m}{D} \left[ \text{Re} \left( -2 \frac{g_1'(1)}{\langle g_1 \rangle} \right) (T_m - \langle T \rangle) - \text{Im} \left( -2 \frac{g_1'(1)}{\langle g_1 \rangle} \right) \frac{1}{\omega} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} \right] \quad (49)$$

Fig. 5에 Prandtl 수와  $\beta$ 가  $-2g_1'(1)/\langle g_1 \rangle$ 에 미치는 영향을 나타내었다.  $-2g_1'(1)/\langle g_1 \rangle$ 는 두 평행한 평판 사이에 있는 이상기체가 주기적으로 압력이 변화할 때의 복소 Nusselt 수<sup>(2)</sup>와 유사한 거동을 보여준다.  $-2g_1'(1)/\langle g_1 \rangle$ 의 거동은 Fig. 4의  $Nu_T$ 와 비슷하나,  $-2g_1'(1)/\langle g_1 \rangle$ 가  $Nu_T$ 보다  $Pr$ 에 더 큰 영향을 받는 것을 볼 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 유동과 압력이 모두 주기적으로 변하는 맥동관 내부의 전단응력관계식과 열전달

관계식을 해석적으로 유도하였다. 벽면의 전단응력은 단면 평균 속도에 비례하는 항과 단면 평균 속도의 시간에 대한 변화율에 비례하는 항의 합으로 표현된다. 벽면의 열유속은 벽의 시간 평균 온도와 작동기체의 단면 평균 온도의 차와 시간 평균 압력과 순간적인 압력의 차에 의하여 결정된다. 유동과 압력이 모두 주기적으로 변하는 경우의 열전달관계식은 2개의 Nusselt 수를 필요로 하는데, 하나는 온도차에 대한 Nusselt 수이고 또 다른 하나는 압력차에 대한 Nusselt 수이다. 본 연구에서 제안한 열전달관계식은 압력과 온도의 변화가 작다는 가정을 사용하여 구했기 때문에 압력과 온도의 변화가 클 경우에는 실험 결과와 차이를 보일 것으로 생각된다. 그러나, 본 연구에서 제시한 열전달관계식은 유동과 압력이 모두 주기적으로 변하는 경우의 열전달에 대한 최초의 이론적인 관계식이므로 향후의 실험적인 연구나 수치적인 연구의 기반이 될 것으로 생각된다.

후 기

이 논문은 2006학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.

참고문헌

1. Pfried, H., 1943, Periodic heat transfer at

- small pressure fluctuations, NACA-TM-1048, National Advisory Committee for Aeronautics.
2. Lee, K. P., 1983, A simplistic model of cyclic heat transfer phenomena in closed spaces, Proceedings of the 18th IECEC, pp.720-723.
  3. Annand, W. J. D. and Pinfold, D., 1980, Heat transfer in the cylinders of a motored reciprocating engines, SAE Paper 800457, Society of Automotive Engineers.
  4. Kornhauser, A. A. and Smith, J. L. Jr., 1988, Application of a complex Nusselt number to heat transfer during compression and expansion, On flows in internal combustion engines-IV, ASME, pp. 1-8.
  5. Jeong, E. S. and Smith, J. L. Jr., 1992, An analytic model of heat transfer with oscillating pressure, Proceedings of ASME National Heat Transfer Conference, pp. 720-723.
  6. Kurzweg, U. H., 1985, Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillation, Journal of Heat Transfer, Vol.107, pp. 459-462.
  7. Gedeon, H., 1986, Mean-parameter modeling of oscillating flow, Journal of Heat Transfer, Vol.108, pp. 513-518.
  8. Kornhauser, A. A. and Smith, J. L. Jr., 1989, Heat transfer with oscillating pressure and oscillating flow, Proceedings of the 24th IECEC, pp. 2347-2353.
  9. Bird, R. B., Stewart, W. E. and Lightfoot, E. N., 1960, Transport phenomena, John Wiley & Sons.
  10. Schlichting, H., 1979, Boundary layer theory, McGraw-Hill.
  11. Eckert, E. R. G. and Drake, R. M. Jr., 1972, Analysis of heat and mass transfer, McGraw-Hill.