한국수학사학회지 제20권 제1호(2007년 2월), 73-82

# Wajsberg hoops와 가환 BCK-대수

한양대학교 자연과학대학 수학과 겸임교수 **차인숙**
chais314@hanyang.ac.kr

본 논문은 Wajsberg hoops, BCK-대수와 MV-대수의 도입과 그 발전과정을 간단히 소개하고, Wajsberg hoops, MV-대수, 그리고 가환 BCK-대수의 관계를 살펴본다. 특히 모든 Wajsberg 대수는 가환 BCK-대수가 됨을 규명한다.

주제어 : Wajsberg hoops, 가환 BCK-대수

## 0. 서론

기초퍼지논리(Basic Logics)와 그것의 대수적 대응으로서 만들어지는 BL-대수는 P. Hájek([8])에 의해 도입되었으며, 그 목적은 퍼지 논리를 형식화하기 위함으로서, 논리곱이 실선분 [0, 1]위에서 연속 t-노름에 의해 표현하고자 하였다. 그는 명제형식이 기본퍼지논리에서 추론가능하기 위한 동치조건은 그 명제형식이 모든 연속 t-노름에 대해 항진명제가 될 것으로 추측하였다.

그 후 P. Hájek의 추측은 약간의 보충의 조건이 주어질 때 증명될 수 있음을 그 자신이 밝히고 있다([9]). 이들 보충의 조건들이 불필요함을 보이기 위해서 포화된 BL-연쇄를 MV-연쇄, Gödel-연쇄 그리고 PL-연쇄의 순서수 합으로 분해하는 것을 R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens([6]) 등이 시도하였으며, 연속 t-노름의 잘 알려진 분해를 일반화하였다. 분해에 대한 증명이 구조적이라는 것은 매우 주목할 만한 일이다. 즉, 선택의 공리 또는 이에 동치되는 공리가 사용되지 않았다는 것이다.

BL-대수가 hoops이론에서 대수적인 근거를 갖는다는 사실을 고려할 때([2]) P. Agliano와 Ferreirim, Montagna([1])가 증명한 BL-연쇄에 대한 분해정리는 특별한 경우의 hoop, 즉 Wajsberg hoop에 대한 개념을 정립하였다. 이 Wajsberg hoop는 더 이상 분해되지 않는다. 이 결과가 R. Cignoli, F. Esteva, L. Godo, A. Torrens에 의해 연구된 내용을 개선하였다 할지라도 주어진 증명은 매우 깊게 선택의 공리에 의존하고 있음을 알 수 있다.

BL-연쇄의 또 다른 대립되는 분해는 M. C. Laskowski, Y. V. Shashoua([11])에 의해 연구되었다. 이 경우 분해에 대한 주요 아이디어는 각 BL-연쇄위에 동치관계를 정

의하여 이 동치류가 기초형식이라 부르는 순서가환반군과 관계된 구조가 되도록 하는 것이다. 이러한 구조는 분해의 블록형성이라 할 수 있다. 실제로 기본형식은 BL-연쇄의 논리합에 닫힌 볼록(convex)부분집합이다. 한편, 논리합과 함의에 관해 닫혀진 BL-연쇄의 볼록부분집합은 완전 순서 Wajsberg hoops가 된다는 것을 알 수 있다.

BL-연쇄위에서의 적절한 동치관계를 설정함으로서 Agliano-Montagna 분해의 간편하고도 어렵지 않은 증명을 유도할 필요가 있으며, 이 경우 동치관계는 Wajsberg hoops가 됨을 규명할 수 있다. 이 경우 선택의 공리를 필요로 하지 않게 된다.

MV-대수는 C. Chang([4])에 의해 다중치 논리의 대수적 모델로서 도입되었으며 MV-대수의 가장 원형적인 모델은 실구간 [0, 1]에 근거하고 있다. 현대 MV-대수에 관한 연구논문은 셀 수 없을 정도로 많이 있다.

퀀텀 MV-대수(QMV-대수)는 R. Giuntini([7])에 의해 도입되었는데, MV-대수가 불 대수의 비 멱등 확장을 표현하는 것처럼 MV-대수는 orthomodular 격자의 비 멱등 확장을 표현한다. QMV-대수의 이론은 주로 실구간 [0, 1]의 퀀텀파트에 대한 적당한 대수적 구조에 대한 연구를 하다가 정립되었다. 이것은 힐버트 공간 H의 모든 effects들의 클래스 E(H)라고 할 수 있다. effect라 함은 실구간 [0, 1]안에 포함된 스펙트럼을 가진 양부호 선형 작용자이다. effect는 실구간 [0, 1]안에 포함되는 퀀텀물리시스템의 unsharp properties의 수학적인 표현으로 간주할 수 있다. 대조적으로 sharp properties는 {0, 1}안에 포함되는 스펙트럼을 갖는 투영작용자에 의해 표현된다.

대수적 입장에서 MV-대수와 QMV-대수는 공통의 공리를 많이 공유하고 있다. 소위 S-대수(supplement algebra)라고 불리는 대수를 갖고 있다. S-대수는 본질적으로 가환모노이드로서 여원을 갖고 있다. S-대수에 Lukasziewicz공리를 가질 때 MV-대수라고 정의할 수 있다. 이 공리는 MV-대수가 격자순서구조를 가지도록 하고 있다.

BCK-대수는 1966년 일본 수학자 K. Isèki 교수에 의해 만들어졌다. 이 개념은 두 가지 서로 다른 입장에서 그 원형을 찾을 수 있다. 그 중 하나는 집합론에서 찾을 수 있다. 집합론에서는 세 가지 아주 기초적이고 기본적인 연산이 있는데, 다름 아닌 집합의 합, 곱, 그리고 차라고 할 수 있다. 이 연산을 가지고 Boolean 대수도 만들 수 있다. 집합의 합과 곱을 택하면 일반대수로서 분배격자를 만들 수 있으며 반환의 구조 또한 만들 수 있다. 또한 upper semilattice 또는 lower semilattice를 만들 수도 있다. K. Isèki 교수는 집합의 차의 개념을 생각하여 BCK/BCI-대수의 개념을 얻게 되었다. 다른 원형은 비고전적인 명제 calcului에서 찾을 수 있다. 논리 functor 중에 함의 functor만을 포함하는 어떤 체제가 있다. 이러한 예는 A. Church에 의해 도입된 positive implication calculus, weak positive implication calculus, 그리고 C. A. Meredith에 의해 도입된 BCI/BCK-체제가 있다([12] 참조).

집합론에서는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$(A-B) - (A-C) \subset C-B,$$
$$A-(A-B) \subset B.$$

또한 명제 calcului에서는 이들 관계는 다음과 같이 나타날 수 있다.

$$(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)),$$
$$p \to ((p \to q) \to q).$$

이런 관계 속에서 K. Isèki 교수는 BCK-대수의 개념을 정립하게 되었다.

## 1. Hoop와 Wajsberg hoop

이 절에서는 hoop에 대해 정의하고, hoop이면 naturally ordered residuated commutative 모노이드가 되며, hoop에서 성립하는 기본적인 성질들을 살펴보고, hoop에서 반순서 관계가 semilattice 반순서 관계가 됨을 기술하고자 한다.

어떤 대수적 구조 **A** = (A, $*$, $\to$, $\top$)가 그의 원소들 x, y, z에 대하여 다음을 만족할 때:

(A, $*$, $\top$): 가환 모노이드 (0)

$$x \to x = \top, \quad (1)$$
$$x * (x \to y) = y * (y \to x), \quad (2)$$
$$x \to (y \to z) = (x * y) \to z. \quad (3)$$

이 대수적 구조 **A** = (A, $*$, $\to$, $\top$)를 *hoop* 라고 정의한다. 이렇게 정의할 때 다음과 같은 주요한 정리를 얻을 수 있다.

**정리 (1.1)** **A** = (A, $*$, $\to$, $\top$)를 *hoop*라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(1) (A, $*$, $\top$)에서 naturally ordered 한 반순서를 정의하자. 즉, $a \le b$ *iff* $a \to \top$.
그러면, (A, $*$, $\top$)는 residuated가 된다. 즉, $a*b \le c$ *iff* $a \le b \to c$.

(2) 임의의 원소 a, b, c $\in$A 에 대하여
- (a) $\top \to a = a$,
- (b) $a \to \top = \top$,
- (c) $a \to b \le (c \to a) \to (c \to b)$,

(d) $a \le b \to a$,

(e) $a \le (a \to b) \to b$,

(f) $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$,

(g) $a \to b \le (b \to c) \to (a \to c)$,

(h) $a \le b \Rightarrow b \to c \le a \to c,\ c \to a \le c \to b$.

(3) *hoop*에서의 반순서(partial order)는 semilattice 반순서가 된다. 여기서
$a \wedge b = a * (a \to b),\ \forall a,\ b \in A$.

어떤 hoop $\mathbf{A} = (A, *, \to, \top)$가 $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x,\quad \forall x,\ y \in A$를 만족할 때 *Wajsberg hoop* 이라 정의하자. 대수 $\mathbf{A} = (A, \to, *, \perp, \top)$에서 $(A, \to, *, \top)$가 hoop가 되고, $\perp \le a,\ \forall a \in A$를 만족할 때 *유계 hoop*(bounded hoop)이라 하자. 유계 Wajsberg hoop를 *Wajsberg algebra* 라고 정의할 때, Wajsberg 대수는 MV-대수와 동치가 됨을 증명하였다([5]).

기본 hoop(basic hoop)는 완전순서 hoop의 부분직적과 동형인 hoop로 정의하고, 유계 기본 hoop를 *BL-대수*라고 정의하자([1], [3]). Hájek에 의해 도입된 기초퍼지논리에 대응되는 대수적 구조로서, BL-대수의 버라이어티의 부분 버라이어티는 기초퍼지논리의 공리적인 확장과 대응된다. 그러한 주요한 예로서 MV-대수, 선형 Heyting 대수, PL-대수와 불 대수를 들 수 있다.

## 2. MV-대수

대수적 구조 $\mathbf{M} = (M, \oplus, *, 0, 1)$이 다음 공리를 만족할 때 *S-대수*(supplement 대수)라고 정의하자. 여기서 $\oplus$은 M 위에서 이항연산, $*$은 단항연산이다.

(S1) $a \oplus b = b \oplus a$,

(S2) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$,

(S3) $a \oplus a^* = 1$,

(S4) $a \oplus 0 = a$,

(S5) $a^{**} = a$,

(S6) $0^* = 1$,

(S7) $a \oplus 1 = 1$.

S-대수 위에 다음의 연산을 추가로 도입하면 이론을 전개하는데 매우 편리함을 알 수 있다.

$$a \odot b := (a^* \oplus b^*)^*,$$
$$a \cap b := (a \oplus b^*) \odot b,$$
$$a \cup b := (a \odot b^*) \oplus b.$$

임의의 a, b $\in$ M에 대해 "$\leq$"를 다음과 같이 정의하자.

$$a \leq b \Leftrightarrow a = a \cap b.$$

S-대수에서 주요하게 다루고 있는 몇 가지 성질들을 살펴보기로 하자.

**정리 (2.1) M** = (M, $\oplus$, $*$, 0, 1)을 S-대수라고 할 때 다음이 성립한다.

(i) $a \odot b = b \odot a$,
(ii) $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$,
(iii) $a \odot a^* = 0$,
(iv) $a \odot 0 = 0$,
(v) $a \odot 1 = a$,
(vi) $a \cap 1 = a = 1 \cap a$,
(vii) $a \cap 0 = 0 \cap a = 0$,
(viii) $a = a \cap a$,
(ix) $(a \cup b)^* = a^* \cap b^*$,
(x) $(a \cap b)^* = a^* \cup b^*$,
(xi) $a \leq b \Rightarrow a = b \cap a$,
(xii) $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b = 0$, $a \odot b = 1 \Rightarrow a = b = 1$,
(xiii) $a \cup b = 0 \Rightarrow a = b = 0$, $a \cap b = 1 \Rightarrow a = b = 1$,
(xiv) $a \oplus c = b \oplus c$, $a \leq c^*$, $b \leq c^* \Rightarrow a = b$,
(xv) $a \leq b \Rightarrow a^* \oplus b = 1$.

증명. (1)~(viii)은 간단히 증명할 수 있다. 다음 세 가지 성질에 대해 살펴보기로 하자.

(ix) $(a \cup b)^* = [(a \odot b^*) \oplus b]^* = (a \odot b^*)^* \odot b^* = (a^* \oplus b) \odot b^* = a^* \cap b^*$
(x) $(a \cap b)^* = [(a \oplus b^*) \odot b]^* = (a \oplus b^*)^* \oplus b^* = (a^* \odot b) \oplus b^* = a^* \cup b^*$
(xi) $b \cap a = b \cap (a \cap b) = [b \oplus (a^* \cup b^*)] \odot (a \cap b) = [b \oplus (a^* \odot b) \oplus b^*] \odot (a \cap b) =$
$[b \oplus b^* \oplus (a^* \odot b)] \odot (a \cap b) = [1 \oplus (a^* \odot b)] \odot (a \cap b) = a \cap b = a.$

나머지 증명도 유사하게 증명할 수 있다.

S-대수에서 정의된 "$\leq$"는 반사율과 반대칭율을 만족하고, 모든 $a\in M$에 대해 $0\leq a \leq 1$을 만족하나, 추이율이 성립되지는 않음을 알 수 있다. S-대수 $\mathbf{M}=(M, \oplus, *, 0, 1)$이 Lukasiewicz 공리라고 부르는 $(a^*\oplus b)^*\oplus b=(a\oplus b^*)^*\oplus a$, $\forall a, b\in M$을 만족할 때, *MV-대수*라고 정의한다.

## 3. BCK-대수

대수 구조 $(X, *, 0)$가 다음 조건을 만족할 때 *BCK-대수*라고 정의한다. 단, $*$ 은 X 위의 이항연산, 0은 상수이다.

(I) $((x *y)*(y *z))*(z *y) = 0$,

(II) $(x *(x*y))*y=0$,

(III) $x *x=0$,

(IV) $x *y=0,\ y *x=0 \Rightarrow x=y$,

(V) $0 *x=0$.

BCK-대수위에 $x\leq y \Leftrightarrow x*y=0$, $\forall x, y\in X$를 도입하면 $(X, \leq)$는 반순서 집합이 된다. 위 BCK-대수를 구성하는 공리들에서 공리(V)를 제외할 경우 *BCI-대수*라고 정의한다. 이 경우 중요한 차이점은 BCK-대수에 대응하는 반순서 집합(partially ordered set)에서는 0을 최소원(minimal element)으로 하여 모든 원소들이 0위에 있는 반면, BCI-대수에 대응하는 반순서 집합에서는 0이 최소원이 되지 못하고, 비연결(disconnected) 그래프의 모습을 갖게 된다. 따라서 BCK-대수는 BCI-대수의 특수한 경우가 된다. BCK-대수에 대해 많은 수학자들이 연구하였으며, 군론, 함수해석학, 확률론, 위상수학, 퍼지이론 등 여러 수학 분야에 널리 응용되고 있는 실정이다. 특히 가환 BCK-대수와 유계가환 BCK-대수는 MV-대수, Wajsberg-대수 등 여러 대수의 연구에 깊은 영향을 끼치고 있다. BCK-대수에서 주요하게 다루는 성질들을 살펴보자.

**정리(3.1)** $(X, *, 0)$가 BCK-대수이면 다음이 성립한다.

(i) $x\leq y \Rightarrow z*y\leq z*x$,

(ii) $x\leq y,\ y\leq z \Rightarrow x\leq z$,

(iii) $(x*y)*z = (x*z)*y$,

(iv) $x*y\leq z \Rightarrow x*z\leq y$,

(v) $(x*z)*(y*z) \leq x*z$,

(vi) $x \leq y \Rightarrow x*z \leq y*z$,

(vii) $x*y \leq x$,

(viii) $x*0=x$.

특히, BCK-대수 $(X, *, 0)$가 $x*(x*y)=y*(y*x)$, $\forall x, y \in X$를 만족할 때, *가환 BCK-대수*(commutative BCK-algebra)라고 정의하자. 이 경우 다음의 정리는 가환 BCK-대수가 버라이어티가 됨을 보여주는 중요한 정리임을 알 수 있다.

**정리(3.2)** ([14]) $(X, *, 0)$가 가환 BCK-대수이기 위한 동치조건은 다음과 같다.

(a) $x*(x*y)=y*(y*x)$,

(b) $(x*y)*z=(x*z)*y$,

(c) $x*x=0$,

(d) $x*0=x$,

여기서 $x, y, z \in X$.

위 정리를 통해서 Y. H. Kim과 H. S. Kim ([10])은 subtraction 대수와 implicative BCK-대수가 동치가 됨을 규명하였으며, subtraction 반군(semigroup)이 환의 일반화로서 연구된 *BCI-반군(semigroup)*의 특수한 경우가 됨을 밝히게 되었다. *BCI-반군*은 BCI-대수 $(X : *, \circ)$위에 이항연산 "$\circ$"을 정의하여,
$(X : \circ)$이 반군이 되고, $x \circ (y * z) = (x \circ y)*(x \circ z)$, $(x*y) \circ z=(x \circ z)*(y \circ z)$, $\forall x, y, z \in X$를 만족할 경우로 정의한다.

## 4. Wajsberg hoop과 가환 BCK-대수

D. Mundici([13])가 MV-대수는 유계 가환 BCK-대수와 동치가 됨을 증명하였다. Wajsberg hoop에서 $x \to y(=\top) \Leftrightarrow y*x(=0)$로 정의한다면 다음과 같은 결과를 얻게 된다.

| Wajsberg hoop | 가환 BCK-대수 |
|---|---|
| $x \to x=\top$ | $x*x=0$ |
| $\top \to x=x$ | $x*0=x$ |
| $x \to (y \to z)=y \to (x \to z)$ | $(z*y)*x=(z*x)*y$ |
| $(y \to x) \to x=(x \to y) \to y$ | $x*(x*y)=y*(\dot{y}*x)$ |

앞의 정리 (3.2)와 위에 비교하는 표를 참조하면 다음의 결과를 얻게 된다.

**정리(4.1)** 모든 Wajsberg hoop는 가환 BCK-대수가 된다.

가환 BCK-대수가 유계가 되지 않는다면, Wajsberg hoop가 될 수 없다. 따라서 정리(4.1)의 역도 일반적으로 성립하지 않는다.

## 5. 결론

위에서 언급한 결과들을 고찰하여 보면 다음과 같은 그림으로 쉽게 나타낼 수 있음을 알 수 있다. 그림에서 알 수 있듯이 가환 BCK-대수가 유계이면 Wajsberg hoop가 된다. 유계 가환 BCK-대수는 Wajsberg 대수와 동치가 되며, 앞으로 유계가 아닌 어떤 보다 약한 조건에서 가환 BCK-대수가 Wajsberg hoop가 되는지를 찾는 것이 향후 연구의 과제가 될 것이다. 한편, Pseudo의 개념을 도입하여 Pseudo Wajsberg hoop(대수)에 대한 연구가 Pseudo 가환 BCK-대수의 연구에 깊은 영향을 미치리라고 본다.

$$\begin{tikzcd}
\text{Wajsberg hoop} \arrow[d] & \text{Wajsberg 대수} \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\
 & \text{MV-대수} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=-90] \\
\text{가환 BCK-대수} & \text{유계 가환 BCK-대수} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

**감사의 글** 이 논문을 심사하시고 많은 조언을 주신 익명의 심사자 교수님들에게 감사의 말씀을 드립니다. 한편, 이 논문이 작성되도록 애써 주신 한양대학교 김 희식 교수님께 감사의 말씀을 드립니다.

# 참고 문헌


1. Aglianò, P., Ferreirim, I. M. A. and Montagna, F., *Basic hoops: An algebraic study of continuous t-norms*, manuscript, 1999.
2. Aglianò, P. and Montagna, F., Varieties of BL-algebras I: General Properties, J. Pure Appl. Algebra, 181(2003), 105-129.
3. Block, W. J. and Ferreirim, I. M. A., *On the structure of hoops*, Algebra Univers, 43(2000), 233-257.
4. Chang, C. C., *Algebraic analysis of many-valued logics,* Trans. Amer. Math. Soc., 88(1958), 467-490.
5. Cignoli, R., D'Ottaviano, M. I. and Mundici, D., *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 2000.
6. Cignoli, R., Esteva, F., Godo, L. and Torrens, A., *Basic Logic is the logic of continuous t-norms and their residua*, Soft Computing, 4(2000), 106-112.
7. Giuntini, R., *Quasilinear QMV algebras*, Inter. J. Theor. Phys., 34(1995), 1397-1407.
8. Hájek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1998.
9. Hájek, P., *Basic fuzzy logic and BL-algebras*, Soft Computing, 2(1998), 124-128.
10. Kim, Young Hee and Kim, Hee Sik, *Subtraction algebras and BCK-algebras*, Math. Bohemica, 128(2003), 21-24.
11. Laskowski, M. C. and Shashoua, Y. V., *A classification of BL-algebras*, Fuzzy Sets and Systems, 131(2002), 271-282.
12. Meng, J. and Jun, Y. B., BCK-algebras, Kyungmoonsa Co., Seoul, 1994.
13. Mundici, D., *MV-algebras are categorically equivalent to bounded commutative BCK-algebras*, Math. Japonica, 6(1986), 889-894.
14. Yutani, *The class of commutative BCK-algebra is equationally definable*, Math Seminar Notes, 5(1977), 207-210.

*The Korean Journal for History of Mathematics* Vol. 20 No. 1 (Feb. 2007), 73-82

# Wajsberg hoops and Commutative BCK-algebras

Department of Mathematics, Hanyang University **In Sook Cha**

This paper delineates some history and developments of Wajsberg hoops, MV-algebras and commutative BCK-algebras. It also discuss some relations on them. Finally, it shows that every Wajsberg hoop is a commutative BCK-algebra.

Key words: Wajsberg hoops, Commutative BCK-algebras

2000 Mathematics Subject Classification : 13L05

ZDM Classification : H70

논문 접수 : 2006년 10월 심사 완료 : 2007년 1월