기하학적 문제와 펜토미노의 발명을 통한 수학 학습에서의 자료 개발*

숭실대학교 수학과 **황선욱**
shwang@ssu.ac.kr

단국대학교 수학교육과 **심상길**
skshim22@hanmail.net

최근 수학교육에서 펜토미노와 같은 절단 퍼즐들을 학습에 많이 활용하고 있다. 그러나 이런 퍼즐들의 개발 배경과 수학적 활용 방법에 대한 연구 부족으로 수학적 개념 도입이나 문제해결을 위한 소재로서 다양하게 사용되고 있지 못한 실정이다.

이 논문은 펜토미노를 수학 학습에서 효과적으로 활용하기 위하여 펜토미노와 같은 절단 퍼즐의 배경이 되는 기하학적 문제와 펜토미노의 개발에 관한 수학사적 배경을 알아보고, 제 7차 초등학교 교육과정의 수학 교과서에서 활용할 수 있는 단원과 여러 문헌에서 펜토미노를 활용한 자료를 조사하여 체계적인 수학 학습자료를 개발하는 기초 자료와 방향을 제시하는 데 그 목적이 있다.

주제어 : 절단 퍼즐, 펜토미노, 기하학적 문제, 수학 학습자료.

0. 서론

칠교판(七巧板, tangram)이 유럽에 소개되면서 이와 유사한 퍼즐들이 개발되었고, 초기에는 단순히 흥미와 지적 호기심을 충족시키는 용도로 활용되던 것이 최근에 와서는 수학 학습과 창의성 향상을 위한 교수-학습 자료로 활용되고 있다. 칠교판과 같이 다각형이나 원을 여러 조각으로 분할하여 기하학적 도형이나 구체적 사물의 형상 등을 만드는 퍼즐을 절단 퍼즐(dissection puzzle)이라고 한다.

절단 퍼즐 중 초등학교 수학에서 활용하기에 가장 좋은 교구 중의 하나로 영국의 퍼즐 발명가인 Dudeney([15])가 8×8 정사각형 체스판에서 착안하여 개발한 펜토미노(pentominoes)를 들 수 있다. 펜토미노는 폴리오미노(polyominoes)의 일종으로서 정사각형 5개를 변끼리 붙여 만든 서로 다른 12조각을 말하는데, 펜토미노를 이용한 구체적인 조작 활동을 통해 도형의 이동(뒤집기, 돌리기), 측정(둘레, 넓이), 합동(대칭성)

* 숭실대학교 2005년도 연구년 해외학술 연구비 지원 과제임.

과 닮음 등을 학습하는 데 활용될 수 있다.

제 7차 교육과정에서는 '공간감각 기르기'가 신설되면서 공간 능력 계발을 강조하고 있다. 공간 능력을 향상시키기 위해 현행 초등학교 수학 교과서에서는 도형의 옮기기, 돌리기, 뒤집기 등을 학습한다. 이러한 활동은 도형을 이동하여도 그 모양은 변하지 않는다는 사실을 감각적으로 익히고, 도형의 변화를 관찰하는 데 목적이 있다. 그러나 수학 교과서에서 제시된 활동만으로는 학생들은 도형을 뒤집어도 그 모양은 변하지 않는다는 것을 이해하는 데 어려움을 보이고 있다. 따라서 변환된 모양을 표현하는 데 있어서 아동들이 좀 더 쉽게 개념을 습득할 수 있는 보조 자료가 필요하다([6]). 이러한 보조 자료의 개발을 위해 펜토미노와 같은 절단 퍼즐을 사용할 수 있다.

펜토미노와 관련하여, 제 6차 교육과정 초등학교 6-2 수학 익힘책([2, p.89])에 펜토미노의 12조각을 모두 사용하여 직사각형을 만드는 활동이 소개되었으며, 제 7차 교육과정의 초등학교 수학 5-가([5, p.33])에서는 펜토미노와 유사한 테트로미노(tetrominoes) 조각을 사용하여 평면을 채우는 활동을 소개하고 있다. 또한, 영재교육과정([12])에서도 펜토미노 활동을 주제별 학습 소재로 다루고 있으며, 이와 관련된 논문([9], [10], [18])과 교육 자료([7], [11])가 다수 발표되었다.

그러나 절단 퍼즐들은 초등학교의 특별 활동이나 방과 후 활동에서 단순히 재미있는 모양 만들기나 평면 채우기의 기본도형(generator)으로 주로 사용되고 있으며, 수학적 개념이나 문제해결을 위한 소재로서 다양하게 사용되고 있지 못한 실정이다. 이는 퍼즐에 대한 개발 배경과 수학적인 배경, 그리고 퍼즐의 용도와 활용 방법에 대한 지식이 여전히 부족하고, 초등학교에서 손쉽게 활용할 수 있도록 정리된 자료가 부족하기 때문이다. 특히, 펜토미노가 단순히 도형이나 모양을 만드는 용도로 개발된 퍼즐로 알고 있는 사람들이 적지 않은데, 이는 퍼즐에 대한 체계적인 연구가 부족하기 때문이다. 역사-발생적 측면 즉, 펜토미노의 발명 배경을 고려한다면 활동 프로그램의 자연스러운 순서를 계획할 수 있고, 퍼즐의 발명 배경이나 일화를 소개함으로써 학생들의 흥미와 관심을 자연스럽게 유발할 수 있다.

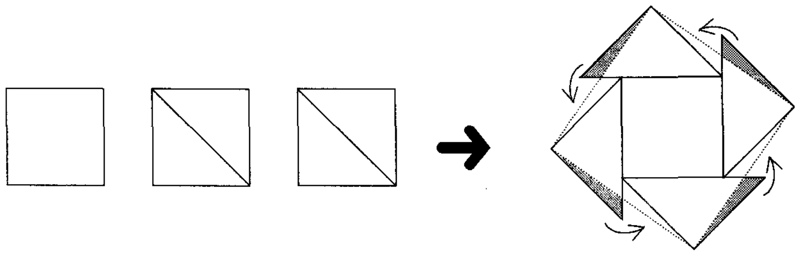
이 연구에서는 절단 퍼즐인 펜토미노를 수학 학습에서 효과적으로 활용하기 위하여 절단 퍼즐의 배경이 되는 기하학적인 문제와 펜토미노의 개발 배경을 알아보고, 제 7차 초등학교 교육과정의 수학 교과서에서 활용할 수 있는 단원과 여러 문헌에서 펜토미노를 활용한 자료를 조사하여 체계적인 수학 학습자료를 개발하는 기초 자료와 방향을 제시하는 데 그 목적이 있다.

1. 기하학적 문제와 펜토미노의 발명

(1) 기하학적 문제

가장 오래된 "절단(dissection) 또는 분할(cuttion up)" 문제는 10세기경 페르시아의 수학자 Abul Wefa에 의해 제안된 것으로, 크기가 같은 정사각형 세 개를 9조각으로

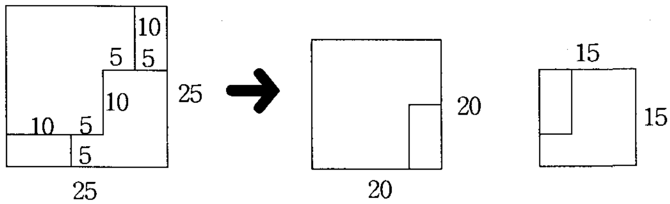
자른 후 재조립하여 큰 정사각형 한 개를 만드는 문제이다([23, p.11]).



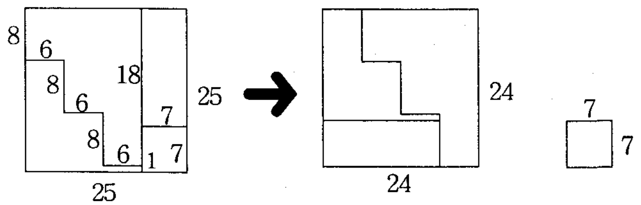
<그림 1> Abul Wefa의 풀이

이 퍼즐은 일상에서 우연히 만나는 실제의 상황을 소재로 한다. 이를테면, 크기가 같은 세 개의 정사각형 조각으로 주어진 특별한 물건(예를 들어, 옷감, 나무, 또는 합판)을 사용하여 가장 큰 정사각형을 만들기 위해 Abul Wefa의 풀이를 통해 도움을 받을 수 있다.

영국의 퍼즐 발명가 Dudeney가 소개한 두 개의 절단퍼즐 문제는, 한 변이 25인치인 정사각형을 4조각으로 나누어 20인치 정사각형 하나와 15인치 정사각형 하나를 만드는 문제(<그림 2>)와 25인치 정사각형을 4조각으로 나누어 서로 다른 크기의 정사각형 두 개를 만드는 문제(<그림 3>)이다([23, p.11]).



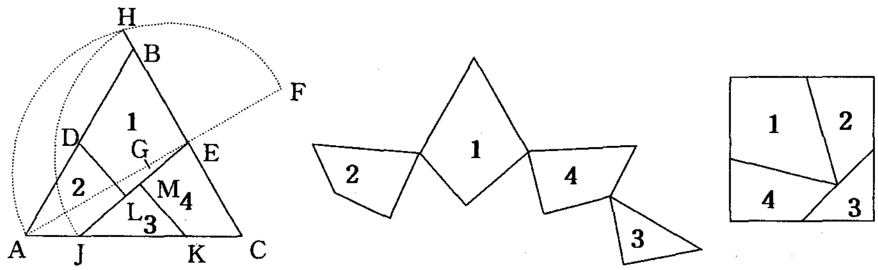
<그림 2> Dudeney의 풀이(25인치 → 20인치, 15인치)



<그림 3> Dudeney의 풀이(25인치 → 24인치, 7인치)

Dudeney의 가장 유명한 기하학적 발견은 정삼각형을 네 조각으로 잘라 정사각형을 만드는 것이다. 아래 <그림 4>에서, 우선 정삼각형 ABC를 그린 다음에 선분 AB와 BC를 각각 이등분하는 점을 D, E라고 놓는다. 선분 EF와 선분 EB의 길이가 같도록 선분 AE를 연장해 점 F를 찾고, 선분 AF의 중점 G를 중심으로 하고 반지름이 AG인

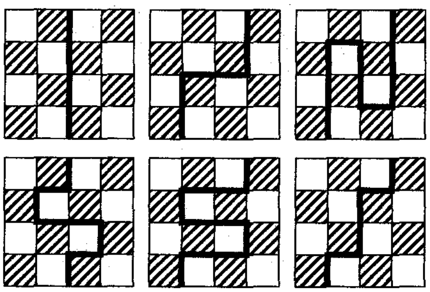
호 AHF를 그린다. 점 E를 중심으로 반지름이 EH인 호 HJ를 그린다. 선분 JK는 선분 BE의 길이와 같게 만든다. D와 K로부터 선분 EJ에 내린 수선의 발을 각각 L과 M이라 한다. 1, 2, 3, 4 네 조각을 재조립하여 정사각형을 만든다([16, p.33-34]). 여기서 특이한 점은, 1, 2, 3, 4 네 조각이 점 D, E, K(또는 J)에 경첩을 달아서 회전한 것처럼 해서 정사각형을 만들 수 있다는 점이다. 이 때문에 이 문제를 "Hinged Triangle Dissection"이라고도 한다.



<그림 4> Dudeney의 Hinged Triangle Dissection

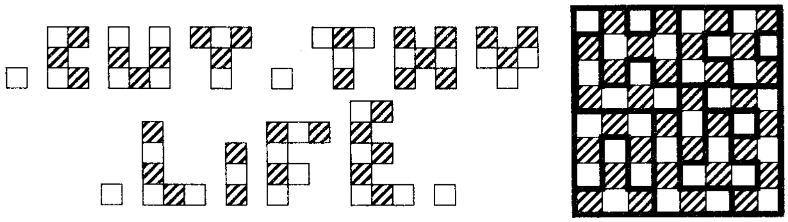
(2) Dudeney의 펜토미노 퍼즐 발명

앞에서와 같은 기하학적 문제를 통해 Dudeney는 다양한 퍼즐을 만들고 제시하였는데, 그 중에서 가장 대표적인 것으로 Chessboard 문제를 들 수 있다. 그는 체스판 모양의 정사각형을 여러 가지로 분할하는 문제를 제시하였다([14, p.85]).



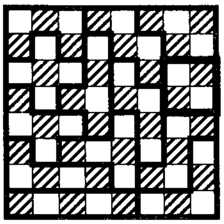
<그림 5> 4×4 정사각형을 합동인 두 부분으로 나누는 문제

그는 8×8 정사각형 체스판을 분할하여 알파벳 모양을 만들고, 그 알파벳 문자를 배열하여 "CUT THY LIFE"란 문장을 만들었는데, 단어와 단어 사이에 마침표를 찍었다. 이것은 체스판 문장(The chessboard sentence) 문제로 잘 알려져 있다([14, p.87]).



<그림 6> 8×8 체스판을 절단하여 “CUT THY LIFE”라는 문장 만들기

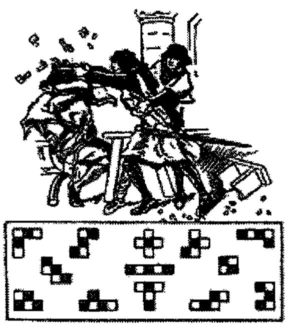
또한, 그는 8×8 체스판을, 5개의 정사각형을 변끼리 이어붙여 만든 서로 다른 모양의 12조각과 4개의 정사각형으로 이루어진 2×2 정사각형으로 분할하였다([15, p.120]). 여기서 5개의 정사각형을 변끼리 이어붙여 만든 서로 다른 12개의 모양을 Golomb([17])이 1953년 하버드대학의 수학 모임에서 펜토미노(pentominoes)라고 이름을 붙였다.



<그림 7> 8×8 체스판을 13조각으로 나누기

펜토미노의 유래와 관련해서 다음과 같은 이야기가 전해져 내려온다([13, p.250-251], [15, p.119-121], [19, p.56]).

“영국의 정복왕 윌리엄의 아들과 프랑스의 왕세자가 체스 게임을 하는데, 게임이 한계에 다다르자 프랑스의 왕세자가 체스말을 상대방에게 던졌고, 윌리엄의 아들도 왕세자의 머리에 체스판을 내리쳐 체스판을 깨뜨렸다. 이때, 체스판이 13조각으로 쪼개졌는데, 이들이 바로 서로 다른 12조각의 펜토미노와 2×2 정사각형 모양의 테트로미노였다. 이 조각들을 다시 조합해서 체스판을 만들 수 있었다.”

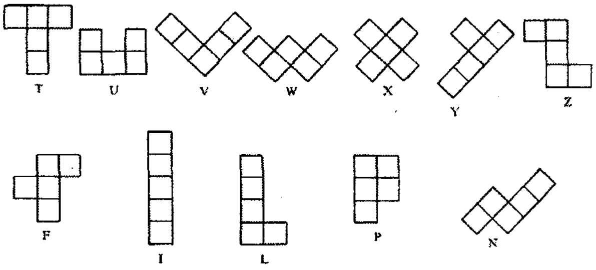


<그림 8> 펜토미노의 유래([15, p.120])

2. 문헌 연구

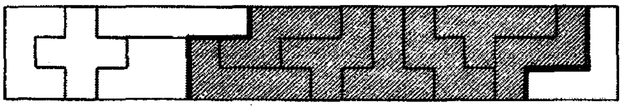
(1) Golomb의 "Polyominoes([17])"

Golomb이 처음으로 펜토미노 12조각에 영어 알파벳을 이용하여 다음과 같이 이름을 붙였다(p.7).



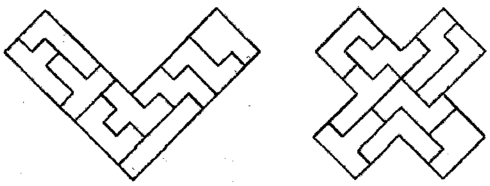
<그림 9> 펜토미노 12조각의 이름

펜토미노 12조각을 사용하여 6×10, 5×12, 4×15, 3×20 직사각형을 만드는 활동을 제시하면서 3×20 직사각형을 만드는 활동이 가장 어렵다고 말한다. 그 이유는 다른 사각형과 달리 3×20 직사각형은 <그림 10>에서처럼 색칠된 부분을 180° 돌려서 맞추는 방법을 제외하고는 답이 유일하기 때문이다(p.8).



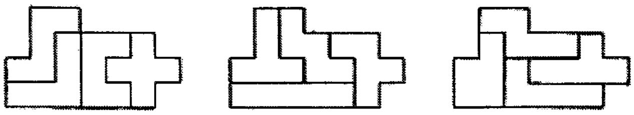
<그림 10> 3×20 직사각형 만들기

펜토미노 조각 중 V와 X의 각 변의 길이를 3배로 확대한 모양 만들기는 길이가 3배로 늘어나므로 넓이는 9배가 늘어 9조각으로 모양을 만들 수 있다(p.8-9). 실제로, 펜토미노의 12조각 모양 모두를 <그림 11>과 같이 9조각으로 만들 수 있다(p.148).



<그림 11> V와 X의 각 변의 길이를 3배로 확대하기

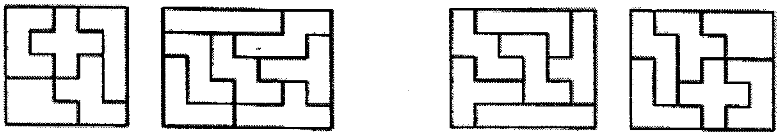
펜토미노 12조각을 4조각씩 세 그룹으로 나누어 합동인 모양을 만드는 활동을 소개하고 있는데, 이런 문제를 "중첩(superposition)" 문제라고 불렀다(p.13).



<그림 12> 중첩 문제

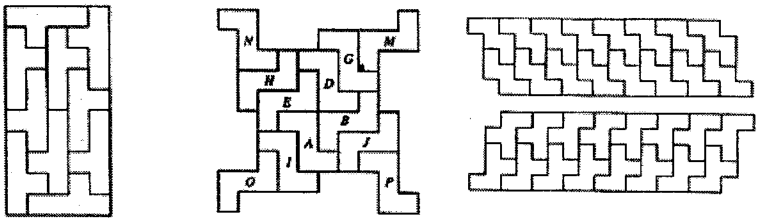
(2) Martin의 "Polyominoes([19])"

펜토미노 12조각을 사용하여 두 개의 직사각형을 동시에 만드는 문제(5×5 정사각형과 5×7 직사각형을 만드는 문제, 두 개의 5×6 직사각형을 만드는 문제)와 세 개의 4×5 직사각형을 동시에 만드는 문제를 소개하고 있다(p.59-60).



<그림 13> 5×5 정사각형과 5×7 직사각형, 두 개의 5×6 직사각형을 만드는 방법

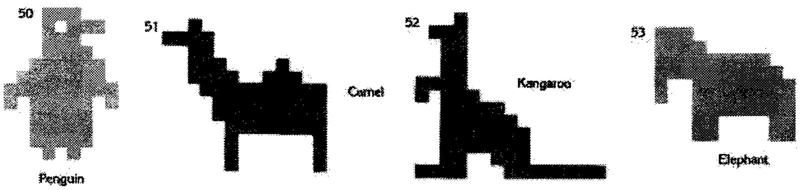
Y-펜토미노로 5×10 직사각형을 만드는 문제, P-펜토미노로 7×15 직사각형을 만드는 문제, L-펜토미노로 9×15 직사각형을 만드는 문제 등 펜토미노 한 조각을 사용하여 평면을 채우는 여러 가지 tiling 문제를 소개하고 있다(p.76-99).



<그림 14> 한 조각 Tiling 문제

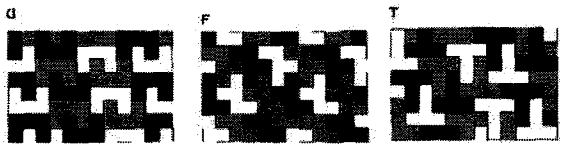
(3) Millington의 "Pentominoes([20])"

펜토미노 12조각을 사용하여 여러 가지 재미있는 동물 모양을 만드는 자료를 소개하고 있다(p.14).



<그림 15> 동물 모양 만들기

Martin([19])의 책에서와 마찬가지로, 펜토미노 12조각 중 한 조각만 사용하여 <그림 16>과 같이 평면을 채우는 tiling 문제를 제시하고 있다(p.19).



<그림 16> 한 조각 Tiling 문제

펜토미노 12조각으로 5×13 직사각형을 만들면서 중간에 펜토미노 12조각 중 한 조각의 모양을 비우도록 하는 문제(p.23)와 8×10 직사각형을 만들면서 중간에 펜토미노 12조각 중 하나와 닮은 모양을 비우도록 하는 문제를 제시하고 있다(p.23).

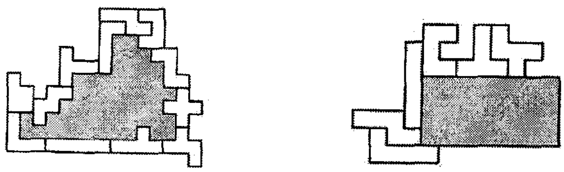
<그림 17> 직사각형의 중간에 펜토미노 모양 비우기

(4) Parlett의 "The Oxford History of Board Games([21])"

이 책에서 Parlett은 보드게임을 경주게임(Race Games), 추적게임(Chase Games), 자리차지게임(Space Games), 변위게임(Displace Games) 등으로 분류하고 있는데, 8×8 정사각형 격자판 위에서 펜토미노 12조각을 사용하여 두 사람이 하는 게임-이것을 Golomb은 'Quin'이라고 이름을 붙였다-을 자리차지게임의 일종으로 소개하고 있다(p.162-166).

(5) SMP Interact([22])

영국의 Cambridge 대학에서 개발한 수학 교과서인 SMP Interact Book 1[16]에서, 펜토미노를 사용한 Quin 게임(p.23) 및 최대 영역을 둘러싸는 문제와 직사각형을 둘러싸는 문제를 소개하고 있다(p.24).



<그림 18> 펜토미노로 영역 둘러싸기

16) 이 책은 영국의 수학 교육과정의 key stage 3의 수준인데, 우리나라의 중학교 과정에 해당한다.

3. 펜토미노를 활용한 학습자료 개발

제 7차 교육과정에서는 '공간감각 기르기'가 신설되면서 공간 능력 계발을 강조하고 있다. 강순자, 고상숙([1, p.180])은 McGee와 Tartre의 연구를 바탕으로 공간 능력을 공간적 시각화와 공간적 방향으로 분류하고, 다시 공간적 시각화를 회전과 변환으로, 공간적 방향을 재조직된 전체와, 전체와 부분으로 다음과 같이 분류하였다.

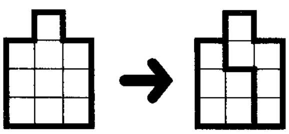
회전은 마음속으로 임의의 물체를 회전시켜보아 원래의 물체와 같은지를 결정하는 것으로 2차원에서의 회전과 3차원에서의 회전이 있다. 변환은 마음속의 상(images)의 따로 떨어진 부분들의 서로 다른 조작들을 통하여 원하는 또 다른 상을 형성하는 것이다. 여기에는 2차원에서 2차원으로 변환, 3차원에서 3차원으로 변환, 2차원에서 3차원으로 변환, 3차원에서 2차원으로 변환이 있다. 재조직된 전체는 한 표현에서부터 또 다른 표현에 이르기까지 인지적 변화 또는 그림으로 된 표현의 조직과 이해를 포함한다. 여기에는 애매한 그림은 한 가지 관점에서 한 개 이상의 물체에 대한 그림으로 된 표현을 인식하는 것으로서 2차원으로 표현된 물체를 3차원으로 인식하는 것이 여기에 해당된다. 복합적인 표현은 두 가지 표현 사이에서 발생되는 변화를 인식하는 것으로서 다른 각도에서 일어나는 변화까지 이해하는 것이 여기에 해당된다. 전체와 부분은 전체에서 부분 찾기와 부분에서 알맞은 전체를 생각해 내기가 있는데 이 두 가지가 대조적으로 보이지만 함께 작용하는 경우도 종종 있다.

이러한 공간 능력을 향상시키기 위해 현행 초등학교 수학 교과서에서는 도형 영역에서 다양한 내용을 다루고 있다. 다음은 초등학교 수학에서 펜토미노를 활용할 수 있는 수학 학습자료를 소개한 것이다.

(1) 초등학교 수학 교과에서의 활용

① 도형의 이동

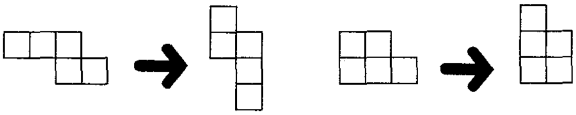
초등학교 [수학 2-가] "3. 도형과 도형 움직이기"와 [수학 3-가] "5. 도형 움직이기"에 여러 가지 도형을 옮기고, 뒤집고, 돌리는 활동이 나온다. 이 단원에서 펜토미노와 같은 구체물을 사용하면 도형이 이동하여도 그 모양은 변하지 않는다는 사실을 경험적으로 이해할 수 있고, 도형의 이동에 따른 변화를 구체적으로 관찰할 수 있다.



<그림 19> 두 조각으로 모양 만들기

이를테면, N 조각과 P 조각을 사용하여 <그림 19>와 같이 맞출 때, 조각들이 <그림 20>과 같이 놓여 있다면 조각을 뒤집어서 돌리거나 돌려서 뒤집어 놓아야 한다.

따라서 펜토미노 조각들을 제시된 그림에 맞도록 놓는 활동을 통해 도형의 이동에 관한 개념을 감각적으로 익힐 수 있다.

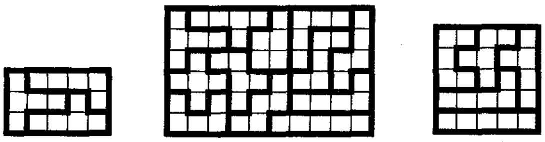


<그림 20> N, P 조각의 이동

또, 펜토미노는 서로 다른 12조각으로 구성되어 있으므로 <그림 19>를 맞출 때, F와 P, V와 P, U와 X 조각을 사용할 수 있으므로 다양한 도형의 이동을 경험할 수 있고, <그림 19> 이외에 "2. 문헌 연구"에서 제시한 다양한 모양을 만들어봄으로써 도형의 이동을 익힐 수 있다.

② 직사각형

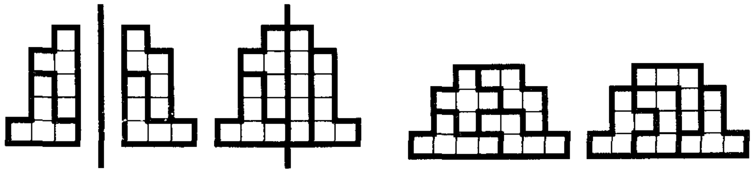
초등학교 [수학 3-가] "3. 평면도형", [수학 4-나] "5. 사각형과 도형 만들기", [수학 5-가] "6. 평면도형의 둘레와 넓이"에 정사각형과 직사각형의 정의와 특징을 알아보는 활동이 나온다. 이 단원들에서 Golomb([17])과 Martin([19])이 소개한 바와 같이 펜토미노를 사용하여 정사각형과 직사각형을 만들면서, 마주보는 두 변의 길이가 같다는 사실과 직각인 꼭지각이 4개 있다는 직사각형의 특징을 경험적으로 이해할 수 있다. 또한, 펜토미노 조각을 구성하는 작은 정사각형의 개수를 세어서 제시된 도형의 둘레와 넓이를 비형식적으로 구할 수 있다. 뿐만 아니라, 펜토미노로 만들 수 있는 가장 작은 직사각형과 가장 큰 직사각형을 만드는 활동을 통해 공간 분석에 대한 통합적 문제해결 능력을 키울 수 있다.



<그림 21> 가장 작은 직사각형, 가장 큰 직사각형, 정사각형

③ 대칭과 합동

초등학교 [수학 3-나] "3. 도형"에 거울에 비친 모양을 알아보는 활동, [수학 5-나] "3. 도형의 합동"에 도형의 합동의 개념을 이해하는 활동, "5 도형의 대칭"에 도형의 대칭의 개념을 이해하는 활동이 나온다. 이 단원에서 펜토미노를 사용하여 <그림 22>와 같이 거울 대칭이 되는 모양을 만들어 대칭축을 중심으로 펜토미노 조각들을 나누고 합치는 활동을 통해 두 도형이 갖는 특징을 경험적으로 이해할 수 있다. 또한, Golomb([17])의 중첩 문제와 유사하게 합동인 두 도형을 만들어 두 도형의 크기와 모양을 비교하여 크기와 모양이 같다는 합동의 개념을 익히고, 선대칭 또는 점대칭 관계에 있는 도형을 만들면서 대칭의 개념을 익힐 수 있다.



<그림 22> 선대칭과 합동

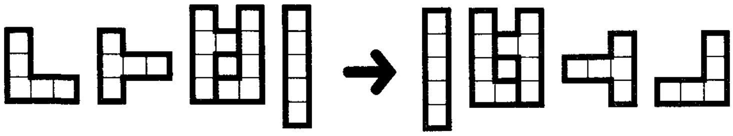
④ 기타

초등학교 [수학 5-가] "2. 무늬 만들기"에 도형을 뒤집어 무늬 만들기와 도형을 돌려서 무늬 만들기 활동, 한 가지 모양 조각으로 도형 덮는 활동, "8. 문제 푸는 방법 찾기"에는 경우의 수를 구하는 활동이 나온다. 이 단원들에서 Martin([19])과 Millington([20])이 소개한 바와 같이 펜토미노를 사용하여 여러 가지 도형 만들기와 한 조각으로 모양 채우기(tiling) 활동을 할 수 있다. 또한, 주어진 모양을 여러 가지 방법으로 만들면서 가능한 경우의 수를 찾는 활동을 할 수 있다.

(2) 펜토미노를 활용한 수학 학습자료의 개발 사례

① 글자 구성과 뒤집기

초등학교 [수학 2-가] "3. 도형과 도형 움직이기"와 [수학 3-가] "5. 도형 움직이기"에 여러 가지 도형을 뒤집고 돌리는 활동과 함께, 한글 '곰', 숫자 '9', 영문자 't'와 같은 모양을 뒤집고 돌리는 활동이 나온다. 이 단원에서 펜토미노 조각들을 돌리거나 뒤집어서 또는 두 조각 이상을 결합하여 문자를 구성할 수 있고, 만들어진 글자를 <그림 23>과 같이 뒤집어서 관찰하는 활동이 가능하다. 이와 같은 활동을 통하여 도형의 이동에 관한 개념을 비형식적으로 익히고 문자의 구성 원리를 시각적으로 표현하고 이동하는 문제해결 능력을 키울 수 있다.



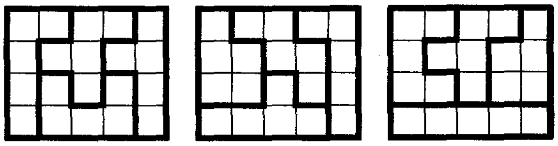
<그림 23> "나비" 글자 구성과 뒤집기

② 분할 문제

초등학교 [수학 5-가] "2. 무늬 만들기"에 패턴블록과 테트로미노를 사용하여 주어진 도형 덮기 활동이 나온다. 이와 마찬가지로 주어진 도형을 펜토미노 조각으로 빈틈없이 맞추는 활동은 결과적으로 그 도형을 펜토미노 조각으로 분할하는 문제가 된다. 따라서 $2 \leq n \leq 12$일 때 $5n$개의 정사각형으로 이루어진 도형을 크기는 같지만 모양이 서로 다른 n개의 부분으로 분할하는 문제는, 펜토미노 조각 12개가 크기는 같지만 모양이 서로 다르기 때문에 그 도형을 펜토미노 조각으로 빈틈없이 채우는 문제

와 같다.

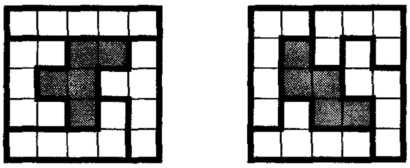
이를테면, Dudeney([14])가 소개한 분할 문제와 유사하게 5×4 직사각형을 크기는 같지만 모양이 서로 다른 네 부분으로 분할하는 문제는, <그림 24>에서와 같이 펜토미노를 사용하여 5×4 직사각형을 만드는 문제와 같다.



<그림 24> 분할 문제

③ 특정한 펜토미노 조각이 도형의 내부에 있도록 하는 문제

Millington([20])이 소개한 직사각형의 중간에 한 조각의 모양을 비우도록 하는 문제와 유사하게, 펜토미노 5조각을 사용하여 5×5 정사각형을 만들 때 주어진 조각(이를테면, F와 W 조각)이 정사각형의 각 변에 닿지 않도록 할 수 있다. 이와 같은 문제는 앞에서 소개한 "② 분할 문제"나 5×5 정사각형을 단순히 맞추는 문제에 비해서 더 높은 수준의 도형 분석 능력이나 공간상상력 등이 필요하므로 영재교육이나 심화학습 프로그램에서 활용될 수 있다.

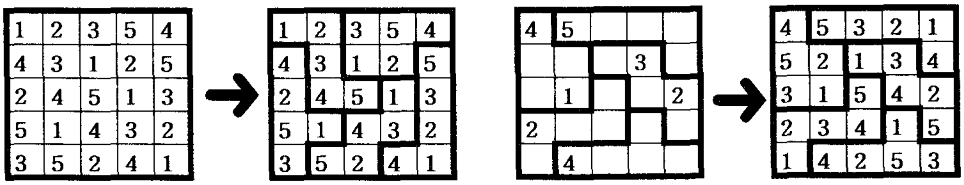


<그림 25> F와 W 조각이 내부에 있는 5×5 정사각형

④ 숫자 퍼즐

초등학교 [수학 3-나] "8. 문제 푸는 방법 찾기"와 [수학 4-가] "8. 문제 푸는 방법 찾기"에 마방진과 같은 숫자를 이용한 퍼즐이 나온다. 펜토미노를 사용하는 숫자 퍼즐로 두 가지 유형을 들 수 있다. 첫째로, 5×5 정사각형 격자의 가로와 세로에 1부터 5까지의 숫자가 중복되지 않도록 배열되어 있을 때 각 펜토미노 조각 속에 1부터 5까지의 숫자가 하나씩만 들어가도록 5×5 정사각형을 펜토미노 조각으로 분할하는 문제이다. 또 한 가지는, 펜토미노 조각으로 분할되어 있는 5×5 정사각형의 각 펜토미노 조각 속에 1부터 5까지의 숫자가 하나씩만 들어가도록 하면서 5×5 정사각형 격자의 가로와 세로에 중복되지 않도록 1부터 5까지의 숫자를 배열하는 문제이다.

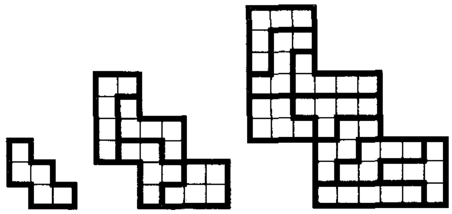
최근에 유행하고 있는 스도쿠(Sudoku) 문제는 정사각형 또는 직사각형 블록 속에서 숫자의 위치를 정하는 활동인데 비하여, 펜토미노 숫자 퍼즐은 펜토미노 형태의 블록 속에서 숫자의 위치를 정하기 때문에 더 높은 수준의 분석 능력을 필요로 하므로 영재교육이나 심화학습 프로그램에서 활용될 수 있다.



<그림 26> 두 가지 유형의 숫자 퍼즐

⑤ 닮은 도형 만들기

초등학교 저학년 수준에서는 정사각형 격자로 이루어진 도형의 크기(넓이)의 개념을 정사각형의 개수를 세어서 직관적으로 이해할 수 있다. 따라서 펜토미노 조각으로 완전히 맞출 수 있는 도형의 경우는 맞추는 데 사용된 조각의 개수를 세어서 그 넓이를 계산할 수 있다. 이 원리를 이용하면 중학교 과정에서 학습하는 닮은 도형에서 변의 길이와 넓이 사이의 관계를 펜토미노 조각의 개수를 세는 활동으로 이해할 수 있다. 이를테면, <그림 21>에 제시된 두 개의 직사각형은 펜토미노 조각을 각각 3개와 12개를 사용하여 만든 것으로서, 변의 길이의 비는 $3:6=5:10=1:2$이고 넓이의 비는 $3:12=1:4$임을 알 수 있다. 또한, Golomb([17])이 소개한 변의 길이와 넓이의 관계에 대한 문제와 유사하게, 아래 <그림 27>에서 변의 길이의 비는 $1:2:3$이고 넓이의 비는 $1:4:9$임을 알 수 있다. 이와 같이 하여, 닮은 도형 사이에서 넓이는 변의 길이의 제곱에 비례함을 경험적으로 이해할 수 있다.



<그림 27> 닮음

4. 결론 및 제언

펜토미노는 Dudeney에 의해서 절단 퍼즐의 하나로 처음 개발되었지만, 수학자인 Golomb 등에 의하여 수학적으로 접근할 수 있는 여러 가지 문제가 제시되었으며 수학교육자들에 의하여 이런 아이디어들이 수학교육에서 다양하게 적용되었다. 그러나 실제 수학교육 현장에서는 펜토미노가 정규 수학교과 학습과 관련지어서 활용되기보다는 흥미 위주의 도형 맞추기 등과 같은 퍼즐로서 소극적으로 활용되고 있으며, 펜토미노가 개발되어 수학교육적으로 활용되게 된 역사적 배경은 정리되지 않고 단편적으로 알려져 있는 실정이다. 따라서 펜토미노가 개발된 역사적 배경과 그 이후에 다

양하게 제시된 수학적 문제를 수학사적 입장에서 정리하고 이들이 활용될 수 있는 수학교과 내용을 체계적으로 제시함으로써, 수학교육 현장에서 펜토미노 활동이 더 효과적으로 활용될 수 있다.

이런 관점에서 이 연구에서는, 절단 퍼즐인 펜토미노를 수학 학습에서 효과적으로 활용하기 위하여 펜토미노와 같은 절단 퍼즐의 배경이 되는 기하학적 문제와 펜토미노의 개발에 관한 수학사적 배경을 알아보고, 여러 문헌에서 펜토미노를 수학 학습에 활용할 수 있는 자료를 조사하였다. 이를 토대로 하여 제 7차 초등학교 교육과정의 수학 교과에서 펜토미노를 활용할 수 있는 단원 및 수학 학습자료의 개발 사례를 제시하였다.

이 연구를 통해 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 펜토미노를 수학 학습에서 활용할 때 펜토미노 개발의 배경이 되는 기하학적 문제와 수학사적 유래 등을 조사함으로써 학습 내용을 보다 풍부하고 다양하게 구성할 수 있고, 학생들의 흥미 유발과 학습 효과를 높이는 데 효과적이다.

학생들은 수학에 대한 여러 가지 역사적 이야기나 문제에 얽힌 수학자들의 고뇌 어린 문제의식에 대한 일화에 접함으로써 수학적 사고의 가치와 아름다움을 인식하고 훌륭한 사고가와 수학의 관계를 이해할 수 있는 기회를 갖도록 해야 할 것이고, 또한 집중적인 수학 학습과 수학을 응용한 실제적인 문제해결 경험을 통해 수학이 가져다 주는 기쁨과 희열, 자신감을 맛보아야 한다([8], p.30-31). 펜토미노를 사용하여 단순히 모양 맞추기만을 제시하는 학습자료보다 분할에 대한 문제와 펜토미노의 역사적 유래 등을 소개함으로써, 교사들에게는 새로운 학습자료를 개발할 때 훌륭한 소재가 되고 학생들에게는 흥미와 함께 새로운 아이디어를 창출할 수 있는 좋은 기회를 제공한다.

둘째, 펜토미노를 활용한 여러 문헌([17], [19], [20], [21], [22])들을 통해 우리나라 초등학교 수학 교과에서 활용할 수 있는 내용들을 조사하여 교육과정과 학생들의 수준에 맞는 자료 개발에 활용할 수 있다. 예를 들어, 도형의 이동, 넓이, 둘레, 합동, 모양 채우기 등 여러 단원에서 펜토미노를 활용함으로써 학생들에게 조작 활동을 통해 그 개념을 경험적으로 이해시키고, 새로운 문제 상황을 제공할 수 있다.

셋째, 최근 수학교육에서는 학생들의 사고력과 창의성을 향상시키기 위해 많은 학습자료를 개발([9], [10], [11], [12], [23])하고 있다. 제 3장에서 제시한 바와 같이 펜토미노를 활용하면 초등학교 수학 교과뿐만 아니라 다양한 상황에서 문제를 해결하는 여러 가지 방법과 전략을 찾고, 학생들과 탐구하고 토론하면서 사고력과 창의성을 향상시키는 자료로 활용할 수 있다.

넷째, 다양한 수학 학습자료를 개발하기 위해 펜토미노뿐만 아니라 칠교판, 소마큐브, 기하판 등 여러 가지 교구들의 수학사적 배경과 이들을 활용하는 체계적인 자료의 개발이 필요하다. 또한, 펜토미노와 같은 교구들을 활용한 수학 학습자료를 학생들에게 적용할 때 발생할 수 있는 여러 가지 반응과 문제점을 조사하여 학생들의 연령과 수준에 맞도록 수정·보완하는 일도 필요하다.

참고 문헌

1. 강순자, 고상숙, 공간 능력을 신장하기 위한 기하 학습자료 개발: GSP를 이용하여 정다면체 구성, 한국수학교육학회지 A 수학교육, 제 38권 2호, 179-187(1999).
2. 교육부, 초등학교 수학 익힘책 6-2, 서울: 대한 교과서 주식회사, 1999.
3. 교육부, 초등학교 수학 2-가, 서울: 대한 교과서 주식회사, 2000.
4. 교육부, 초등학교 수학 3-가, 3-나, 4-가, 4-나, 서울: 대한 교과서 주식회사, 2001.
5. 교육부, 초등학교 수학 5-가, 5-나, 서울: 대한 교과서 주식회사, 2002.
6. 김창일, 김신좌, 공간감각 형성을 위한 조작활동의 지도 방안, 한국수학교육학회지 E 수학교육 논문집, 13집, 183-192(2002).
7. 송상헌, 수학 영재의 지도 원리 및 교수법, 수학영재 지도를 위한 교사 연수 교재, 대구교육대학교 부설 초등교육연수원 및 대구광역시 교육청, 21-34(2002).
8. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교출판부, 1998.
9. 이강섭, 심상길, 창의성 증진을 위한 수학 활동 프로그램과 평가 방법의 소개, 한국수학교육학회지 E 수학교육 논문집, 19집 1호, 101-110(2005).
10. 황선욱, 교구 활용을 통한 수학 영재의 창의력 신장, 한국수학교육학회지 F 수학교육 학술지, 제 5집, 117-124(2002).
11. 황선욱, 논리적 사고력 신장을 위한 프로그램 개발의 실제, 수학영재 지도를 위한 교사 연수 교재, 대구교육대학교 부설 초등교육연수원 및 대구광역시 교육청, 322-333(2002).
12. 한국교육개발원, 수학과 영재교육과정 시안; 초·중학교 수학과 영재교육과정 시안 개발을 위한 기초 연구, 한국교육개발원 수탁연구 CR 99-20-3, 1999.
13. Darling, D., *The Universal Book of Mathematics,* Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2004.
14. Dudeney, H. E., *Amusements in Mathematics*. New York: Dover Publications, Inc., 1970.
15. Dudeney, H. E., *The Canterbury Puzzles*. New York: Dover Publications, Inc., 1986.
16. Gardner, M., *The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, The University of Chicago Press, 1987.
17. Golomb, S. W., *Polyominoes; Puzzles, Patterns, Problems, and Packings*, Revised and expanded second edition, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
18. Lee, K. S. & Shim, S. K., *Assessing Creativity in a Mathematical Activity Program*, Paper presented at ICMI-earcome3, Shanghai, China, 2005.
19. Martin, G. E., *Polyominoes; A guide to puzzles and problems in tiling*, The

Mathematical Association of America, 1996.
20. Millington, J., *Pentominoes; Puzzle shapes to make you think*, Norfolk: Tarquin Publications, 1995.
21. Parlett, D., *The Oxford History of Board Games*, New York: Oxford University Press, 1999.
22. SMP Interact, *SMP interact Book 1; The School Mathematics Project 2000*, Cambridge University Press, 2000.
23. van Delft, P. & Botermans, J., *Creative puzzles of the world*, Berkeley: Key Curriculum Press, 1995.

Development of mathematical learning materials through geometric problems and the invention of pentominoes

Department of Mathematics, Soongsil University **Sun wook Hwang**
Department of Mathematics Education, Dankook University **Sang Kil Shim**

Recently, dissection puzzles such as pentominoes have been used in mathematics education. But they are not actively applicable as a tool of problem solving or intruducing mathematical concepts since researches about the historical background and developments of mathematical applications of such puzzles have not been effectively accomplished.

In this article, in order to use pentominoes in mathematical learning effectively, we first investigate geometric problems related to dissection puzzles and the historic background of development of pentominoes. And then we collect and classify data related to pentomino activities which can be applicable to mathematics classes based on the 7th elementary school national curriculum. Finally, we suggest several basic materials and directions to develop more systematic learning materials about pentominoes.

Key words: dissection puzzle, pentomino, geometric problem, mathematical learning material.

2000 Mathematics Subject Classification:

논문 접수: 2006년 11월 심사 완료: 2006년 12월