韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2007. 02. 제 46권, 제 1호, 123-134.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2007, Vol. 46, No. 1, 123-134.

수학교육에 유용한 표상

유 윤 재 (경북대학교)

I. 서 론

한 전문가 집단이 가진 독특한 지식 체계는 전문적인 훈련을 거친 후에 습득이 되므로 그러한 훈련을 받은 적이 없는 다른 영역의 전문가 집단은 타 집단의 지식을 즉각적으로 이해하기 어렵게 된다. 그러므로 어떤 전문가 집단에 의하여 생성된 지식은 다른 전문가 집단이 이해할 수 있도록 번역될 수 있기를 바란다. 이것을 지식의 번역이라고 한다. 한편 어떤 것을 연구할 때 대상 자체를 연구하는 것보다 그 모형을 연구하는 것이 현대과학의 흐름이며 수학의 응용은 이러한 경향이 매우 강하다. 이러한 번역, 모형화 등은 표상의 전형적 예에 속한다. 즉 표상이란 어떤 대상이 다른 형식으로 재구성한 것을 의미한다.

다양한 표상 중에서 수학교육에서 관심을 가지는 것은 수학적 개념, 문제해결, 등 기성수학에서 제공되는 수학적 실재를 나타내기 위하여 제시되는 표상들과 이러한 표상들이 학습자에게 어떠한 방식으로 나타나는가를 이해하기 위해서 제안된 개인 심적 표상이 있다. 이런 관점에서 본 연구에서 논의할 표상을 다음 3 가지로 분류하였다.

i) 지식과 정보에 대한 개인의 인지과정을 이해하기 위한 심리학적 모형을 제공하는 것으로서 현재 인지심리학에서 연구대상이 되어 있는 심적 표상[1],

ii) 수학에서 개념적 이해, 수학적 아이디어의 발견, 문제해결 등을 용이하게 하기 위한 탐색용 표상,

iii) 수학의 한 영역 내에서 또는 한 영역에서 다른 영역으로 수학적 내용을 변역하는 수학적 표상

i)은 인간의 지식의 내적 표상과정이고, ii)는 내적 표상 과정과 외적 대상과의 인지적 연결과 관련된 것이며 iii)은 외적 표상이라는 점에서 이 세 가지 표상 과정은 수학적 현상이 인간의 마음속에 구체화되어 궁극적으로 수학적 실재로서 실체화되는 전체과정을 묘사한다. 그러므로 수학교육에서 이 세 가지 표상의 이해는 수학화라는 측면에서 본질적이다.

본 연구는 인지심리학의 중요한 결과들이 수학교사에게 보다 이해하기 쉽게 소개될 수 있다면 이로 부터 수학교육에 활용하는 방안도 용이할 것이라는 판단하에 시도되었다.

II. 본 론

1. 심적 표상

인지과정에서 모든 제약조건은 활성화된 표상들의 수가 극히 제한적이라는 것이 인지과정에 중요한 역할을 한다. 이 용량도 발달에 따라 증가한다고 보는데 고전이론에서는 최대 작업 기억 용량을 7 단위 정도라고 하였으나 최근에는 4 단위 정도로 주장하고 있다[2](Case, 1985; English & Halford, 1995; Halford, 1982, Kintsch & van Dijk, 1978). 한편 인지과정에서 정보는 능동적으로 구성한다고 본다고 하는데 이것은 구성주의의 과학적 연구를 가능하게 하는 단서가 된다.

인지심리학에서는 지식의 심적 표상을 기반으로 이론을 전개하고 있다는 점에서 기존의 심리학과는 구별됨과

* 2006년 12월 투고, 2007년 2월 심사 완료.
* ZDM 분류 : C33
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어: 표상, 문제해결

1) 심적 표상은 현재 여러 가설이 경쟁적이다. 그러므로 어느 하나의 이론을 수용하기 보다는 포괄적인 접근이 필요하다.

2) Case의 이론은 작업 기억의 요구를 어떻게 수로 환산할 것인가를 결정하는 것이 어렵다는 이유로 비판받았다 (Flavell,1978).

동시에 표상의 역할을 이해하는 것은 매우 중요한 일이다.

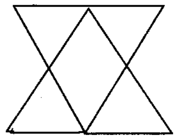
심적 표상은 마음의 인지 과정을 이해하기위하여 심리학자가 사용하는 마음에 대한 모델링이다. 지식의 심적 표상은 다양하게 제시되고 있으나(Anderson, 1995; Sternberg, 2003) 여기서는 Sternberg의 분류 방식을 중심으로 논의하겠다. 다음은 여기서 논의할 지식의 심적 표상을 <표 1>로 나타낸 것이다.

<표 1> 지식의 심적 표상

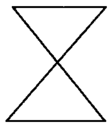
선언적 지식의 표상		절차적 지식의 표상
상사 표상	상징 표상	산출
심상	개념적 표상 도식적 표상 명제적 표상	

심상은 시각적 공간적 정보에 대한 심적 표상이다. 심상은 시각 정보를 그와 유사한 방식으로 표상한다는 점에서 아날로그적 특성을 가지고 있다. 심상은 문제해결과 같은 영역에서 질문속의 대상을 시각화하고 이에 대응하는 심상을 만든다(Kosslyn, 1990; Kosslyn & Rabin, 1999). 심상은 언어적 정보를 취급하는데 있어서도 효과적인데 그 이유는 작업기억 용량의 한계로 인한 처리 부담을 극복하여 다량의 정보를 작동 기억 속에서 동시에 취급할 수 있기 때문이다. 수학교육에서 언어적 명제를 기하학적 대상으로 변환함으로써 개념 이해와 문제해결을 용이하게 해주는 것도 심상이 가진 특성을 활용한 것이다. 특히 문장제 문제를 기하학적으로 표상할 수 있다면 관련 문제해결을 용이하게 할 수 있다. 증명에서도 기하학적 증명은 직관적이고 지루한 분석적 과정을 제거할 수 있기 때문에 효과적이다.[3] 그러나 심상은 언어적 정보를 동시에 줌으로써 심상에 대한 왜곡을 줄 수 있다(Finke et al.,1989). 이 점은 학생들이 수학적 개념을 직관적으로 이해할 때 나타나는 경우에서 확인되며 (Vinner, 1991)적절한 지도가 주어지지 않는다면 오개념을 유지하게 된다. 특히 무한과 같은 고도로 추상적인 경우는 심상에 의존하게 되면 오히려 장애가 되거나 (Luria, 1968), 오개념으로 나타날 가능성이 매우 높기 때문에 심상에 의한 수업지도는 적절한 교수 판단이 주어져야 한다. 한편 심상은 위계적이다. 심상의 위계성을 연구한 <표 2>를 보자(Reed, 1974).

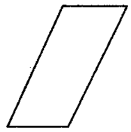
<표 2> 심상의 위계성



<그림 1>



<그림 2>



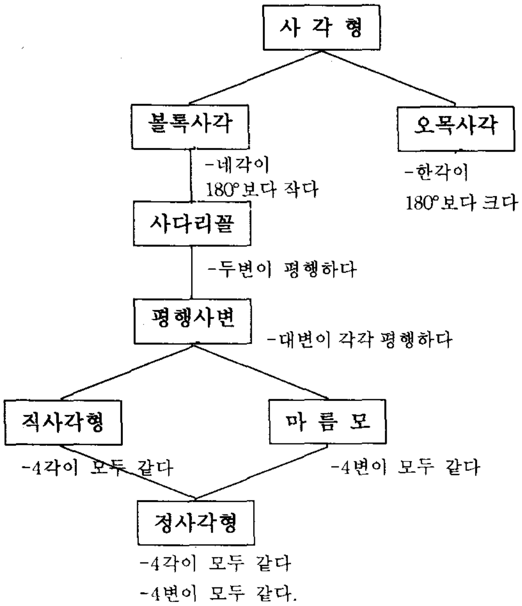
<그림 3>

실험에서 <그림 1>을 제시한 후 재인 검사에서 <그림 2>와 <그림 3>의 재인도를 측정한 결과 <그림 2>가 <그림 3>보다 높은 수준의 재인을 보였다. <그림 1>에서 위계도는 <그림 1> 아래 <그림 2>가 있고 그 아래 <그림 2>의 도형을 두 개의 삼각형으로 위계 분해되며 그 각각의 삼각형은 선분으로 분해된다.

심상의 위계성으로 인하여 학습자는 위계성에 기초하여 도형을 인지하게 되므로 기하문제에서 학생들이 유효한 보조선을 긋는 과정의 어려움을 말해준다. 따라서 수학교육에서 심상의 유연성을 촉진하기 위해서 Dienes의 지각적 다양성의 원리를 수업에서 적극적으로 활용하는 것이 바람직하다.

개념은 의미의 최소 단위이다. 개념적 표상은 개념에 대한 심적 표상이다. 개념적 표상 이론은 Collins & Quillian(1969)에 의하여 제시된 모형인데 위계성을 가진다. 다음 <그림 1>은 사각형에 대한 개념 의미망 모형이다.

3) 기하학적 증명은 증명을 한 눈에 볼 수 있다는 점에서 이해를 돕기는 하지만 그 증명을 개선하는 과정에서 유연성이 떨어지고 또 증명을 일반화하기 어렵다는 단점이 있다.



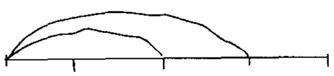
<그림 1> 사각형에 대한 개념 의미망 모형

의미망 모형은 개념이 위계적으로 조직되어 있기 때문에 수학적 개념 구조와 유사한 면이 있다. 개념 표상 모형은 위계성에 의하여 작업 기억의 부담을 덜 수 있다는 장점이 있다. 그러나 수학적 개념들은 일반적으로 추상적이고 대부분은 임의로 정의된 것이기 때문에 통상적 정의가 필요하지 않는 개념과는 구별되어야 한다(Vinner, 1991). 개념의 인지에서 중요한 특징 중에 기본수준(basic level)이라는 것이 있는데 이것은 개념의 위계에서 다른 수준보다 더 선호하는 개념이다(Rosch, 1978). 예를 들면 나무에 달려 있고, 빨갛고, 먹을 수 있는 것은 무엇일까라고 할 때 여러 가지의 답이 있겠지만 대개의 경우 사과라고 대답한다. 수학교육에서도 이 실험의 결과를 지지해주는 기본수준이 있다는 것이 수업을 통한 사례 연구에서 확인되었다. 이 현상은 수업에서 개념적 고착과 같은 인지적 장애로 진행될 수 있다. 이 장애는 충분한 사례와 반례를 통한 인지적 유연성이 확보됨으로써 극복된다. 기본수준과 관련되어 교사의 수업지도의 치밀성을 측정할 수 있다. 기본수준 확인 검사를 통하여 학습자들이 주어진 문제에 대한 답이 어느 하나로 몰린다면 주어진 개념에 대한 고착이 있다는 증거로서 교사의 적절한 처치가 필요하다는 것을 안내한다.

또 개념에 대한 검사에서 범주 경계가 분명치 않다는 점이 발견된다(Labov, 1973). 특히 학습자는 개념의 습득에서 상황 맥락적이며[4] 수학적 개념과 비수학적 개념에 대한 분명한 차이점을 인식하지 않기 때문에 개념을 습득하는 일상적 방식[5]이 수학적 개념 학습에도 같은 방식으로 나타난다. 예를 들면 자생적 개념[6]에 대한 범주 경계의 불명확성은 엄밀한 수학적 정의를 하고 있는 수학에서도 나타난다. 그러므로 개념학습에서 개념 지도를 위해서 필요하다면 명확하게 정의할 필요가 있으며 이 지도 방법은 초등수학과 중등수학의 지도상 근본적 차이점이 된다. 더욱이 고등학교에서의 수학은 보다 형식적으로 접근하기 때문에 개념 정의를 명확하게 할 필요가 있다[7].

개념적 표상의 대안으로 제시된 이론이 명제적 표상 이론이다. 명제적 표상은 인지단위가 개념이 아니라 명제다. 명제는 논항(주부)과 관계(술부)로 구성되어 있다. 작업 기억에 하나의 명제가 표상되면 장기기억에 저장된 관련된 명제들이 활성화 되는데 명제표상이론은 명제 단위의 정보 인지과정 기제를 연구한다. 많은 연구자들이 명제적 표상이론을 지지하며(Anderson & Bower, 1973, Kintsch, 1974; Norman & Rumelhart, 1975), 대표적 이론은 Anderson의 ACT(active control of thought)모형이 있다[8]. 명제적 표상이론에 의하면 문장을 읽은 그대로

---

4) 도형  을 보자. 수학시간에는 분수와 관련된 것을 연상하지만 음악시간에는 악보와 관련된 것을 연상하는 경향이 있다.

5) 개념 정의가 분명하게 주어진 수학의 경우에는 개념 형성에 관한 속성 기반 범주 이론이 잘 적용된다. 그러나 학습자는 일상적으로 속성 기반에 근거하지 않고 대신에 유사한 성질에 의하여 범주가 형성되며 새로운 대상의 범주화는 유사성에 의하여 확장된다는 이론이다(Rosch,1978; Medin & Schaffer,1978).

6) 자생적 개념은 Vygotsky에 의하여 도입된 개념으로서 특별한 안내없이 스스로 세상에 관한 획득한 지식들인데 이러한 개념은 학교에서 안내된 개념에 대하여 오개념으로 작용하는 경우가 많다. 주로 이런 지식은 절차적 지식으로서 암묵적으로 존재한다.

7) 대다수의 학생과 일부 수학 교사들이 함수-미분계수, 도형-접선 간의 관계를 명확하게 구별하지 못하고 있다는 것이 관찰된다.

8) 이 이론은 상징적 지식과 절차적 지식을 통합한 ACT* 이

저장되는 것이 아니라 의미 중심으로 저장된다.

명제적 표상이론에서 중요한 개념은 정교화와 조직화인데 전자는 기존 정보에 새로운 정보를 부가하는 것이고 조직화는 정보들은 위계적으로 구축하는 것이다. 정교화는 정보의 인출에 대안적 통로를 만들어 줄 수 있다는 점에서 이해에 도움을 주고 조직화는 정보의 인출을 효과적으로 만들기 때문에 수학과 같이 위계적 과목은 위계성을 충분하게 고려하는 것이 학습 효과를 올릴 수 있다. 예를 들면 고등학교에서 한 과목을 여러 교사가 나누어서 가르치는 것이 통상적인데 이것은 매우 비효과적이다. 수업에서 정교화와 조직화는 수업효과를 촉진시키기 때문에 정교화와 조직화를 촉진시킬 수 있는 방안이 필요한데 이런 방안으로써 심상이나 정신모델을 활용하는 수업 또는 유추에 의한 지도를 권고하고 있다(E. Gagne, 1985).

명제적 표상이론이 수학교육에 함의하는 것은 다음과 같다. 정의에 대한 지도시 정의 그자체는 명확하게 인식되어야 하고 관련 명제와의 연결성을 강조해야 한다. 이해의 중요한 수단으로서 연결성을 강조하는 교육에 대한 관심이 모아지고 있다.

상징적 표상 이론에서 보다 일반적 이론이 있는데 이것은 도식적 표상 이론으로서 이 이론은 최초에 개념이 머릿속에서 어떻게 연결되어 있는지를 알기위해서 제시된 이론이다 (Rumelhart & Ortony, 1977). 도식(schema)은 Bartlett(1932)에 의하여 아동들이 어떻게 세상을 이해하는지에 대한 연구에서 시작되었다고 하나 현재의 도식 이론은 그 당시와는 매우 다르게 접근하고 있으며 개념 표상이나 명제 표상의 대안으로 제시되고 있다 (Anderson, 1995).

도식적 표상의 구조는 하나의 개념에 속성(attribute)라고 하는 슬롯(slot)에 속성가(value)라는 명세로 구성된다. 다음 <표 3>는 삼각형 도식의 일부이다.

위의 예에서 '이다' 속성은 개념적 위계성을 나타낸다. 또 속성가도 도식이 될 수 있다. 이와 같은 성질 때문에 도식은 위계적 구조를 가짐으로써 개념적 표상보다 유연하다. 위의 도식에서

삼각형은 (속성가) (속성)를 가진다.

라는 명제를 만든다면 삼각형의 도식으로부터 다양한 명제들이 생길 것이다. 이와 같이 도식은 개념적 표상이나 명제적 표상의 단순한 연장이 아니고 구체적 범례에 관하여 진술하는 것이 아니라 일반적 지식을 표상한다[9].

<표 3> 삼각형 도식의 일부

속성	속성가
이다	다각형
각의 크기	(30, 30, 120), (60, 60, 60), (90, 60, 30), (90, 45, 45),...
변의 크기	(2, 4, 2), (3, 7, 5), (5, 5, 5),...
넓이	20, 40, 10, 5,....
넓이 공식	$S=\frac{ab}{2}$, $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$, 헤론의 공식,...
관련 공식	사인의 법칙, 코사인의 법칙,....
점	내심, 외심, 수심, 방심,...
합성	다각형, 일반 평면도형,,,,
합동	SSS, SAS, ASA, 포개기,...
닮음	....
관련 도형	정사면체, 정팔면체, ...

위에서 얼마나 많은 속성가를 가지고 있는가는 확인하는 방법은 속성가를 직접 진술하게 함으로써 가능하다. 이것은 마치 어떤 개념에 대한 이해도를 측정하기 위하여 관련 단어 연상검사와 유사하다.

상징적 지식에 관한 앞의 논의는 수학적 개념 형성에 대한 교육적 시사점을 던진다. 개념 형성에 관한 고전적 이론은 주로 아리스토텔레스 이래로 지지해왔던 속성기반 이론인데 이 이론은 개념이 정의에 의하여 규정된다는 것이다. 속성기반 이론은 개념의 범주 경계가 명확한데 수학적 개념의 정의도 이 경우에 속한다. 그러나 속성기반 이론은 1970년대에 Rosch와 Posner의 기념비적인 연구에 의하여 대치되었는데[10] 이 대안적 이론들은 모두 구성주의의 이론화 과정에서 제시되었다는 점에 주목할 필요가 있다.

론(1983)으로 발전되었다.

9) Komatsu(1992)는 속성에는 i) 상위 개념 ii) 개념 자체의 속성, iii) 개념과 관련된 속성, iv) 개념의 특정한 배경, v) 개념의 일반적인 배경 지식 등과 같은 정보를 포함할 수 있다고 제안했다.

10) 대안적 이론들은 유사성기반 이론과 설명기반 이론으로 압축할 수 있는데 이 대안적 이론들은 전형적 사례를 통한 직관적 습득을 골자로 한다.

여기서 수학적 상황에서 속성기반 이론과 대안적 이론이 주는 차이점을 구별할 필요가 있다. 정의에 의하여 규정된 개념은 범주 경계가 분명하다는 점에서 장점이 있지만 그 명확성은 수학적 발견과 관련된 상황에서 문제가 될 수 있다. 한 예를 보자. 함수의 개념은 20세기 초, 칸토어의 집합론적 방법에 의하여 근대적 의미로 규정되었는데 이것은 고전 이론에 함의된다. 그러나 이후 함수의 칸토어식 정의로는 디랙의 델타 함수를 설명할 수 없게 되었다. 이 후 이 문제는 Schwartz의 초함수 이론으로 긍정적으로 해결되었지만 이 사실은 정의가 수학적 발견의 과정에서 나타나는 새로운 상황에서 인지적 장애를 가져올 수 있다는 점을 보여준다. 전문적 수학 상황에서도 대수학자는 함수 개념으로서 칸토어식 정의를 가지고 있겠지만 해석학자의 경우, 르베그의 의미의 적분가능 함수, 더 나아가 초함수를 정의로 하고 있다는 점에서 함수 개념이 실로 다양한 국면을 띄고 있다. 한편 전문적이던 비전문적이던 간에 수학적 발견의 상황이 아닌 수학적 의사소통의 상황에서는 정의의 역할은 분명 중요하다[11]. 즉 정의가 모호하다면 수학적 의사소통이 불가능하지는 않더라도 불편하게 되는데 공학자와 수학자간에 나타나는 수학적 개념 차이로 인한 의사소통 장애의 사례를 찾는 것은 어렵지 않다. 이제 분명한 점은 수학적 개념의 구성과 수학적 발견의 논리를 이해하기 위해서는 개념이 성장하고 있다는 점과 정의에 의한 개념 규정은 수학적 의사소통을 하기위한 최소한의 도구임을 주목할 필요가 있다. 정의가 가지고 있는 이러한 양면성은 교수 상황에서 신중하게 구별되어야 한다고 본다.

마지막으로 절차적 지식의 표상에 대하여 논의하자. 절차적 지식은 knowing how에 관한 지식으로 산출로 표상된다. 산출은 If A, then B 형식으로 구성되어 있고 A가 만족되면 B가 수행된다. 하나의 과제를 수행할 때 산출은 두 개 이상 또는 여러 개로 산출로 구성될 수 있는데 훈련 효과에 의하여 여러 개의 산출은 한 개로 연결된다. 예를 들면 운전 연습에서 처음에는 각각의 단계를 통하여 구분된 방식으로 연습을 하지만 숙달이 되면 자동적으로 처리하게 된다. 절차적 지식은 명제적 지식과 달리 환경에 의존하는 특성이 있으며 훈련에 의하여 자동화된다.

절차적 지식은 정보를 분류하는 능력의 기초가 되는 형태재인과 계열을 조작하는 능력에 관계된 행위계열이 있다. 예를 들면 $x^2+y^2=1$은 무엇인가 했을 때 원이라고 대답하는 것은 형태재인이고 $x^2+y^2=1$을 그려라고 했을 때 그림을 그리는 것은 행위계열이다. 이 두 가지 방식은 서로 다른 학습과정을 요구한다. 형태재인을 촉진하기 위한 교수학습은 사례와 반례에 의한 학습, Dienes의 지각적, 수학적 다양성의 원리의 활용이 효과적인 반면에 행위계열을 촉진하기 위한 교수학습을 위한 인지이론 기반의 모형은 아직 없는 편이고 대신에 학습심리학에 다루는 연습과 피드백이 아직 유용한 것같이 보인다[12].

절차적 지식의 결함으로 발생하는 학습 부진의 문제를 보자. 예를 들면 분수의 계산에서 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$의 계산에서 다양한 인지적 오류를 야기하는데 이런 문제의 연구는 주로 오개념 연구로 압축된다. $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$의 성공적인 계산은 일련의 하위 기능의 성공적 수행으로 이어지기 때문에 이런 종류의 문제에 관한 오개념 연구시, 문항을 선다형 문제를 사용하게 되면 오개념을 분석할 수 없다. 계산의 절차 과정을 정확하게 분석하기 위해서는 분모 통분의 수행, 통분 후의 수행, 등 하위 기능이 각 단계별로 분석되어야 한다.

절차적 지식은 문제해결과 매우 밀접한 관계가 있다. 인간의 행위는 궁극적으로 문제해결의 측면에서 볼 수 있다. 즉 인간의 인지활동은 목표를 세우고 목표 달성을 위한 전략을 세우며 목표를 달성을 방해하는 장애물을 제거하는 일련의 활동을 모색한다고 주장한다(Anderson, 1983). 이런 맥락에서 절차적 지식의 표상과정의 이해는 문제해결 특히 수학 문제해결에서 매우 중요한 시사점을 던진다.

---

11) Vinner(1991. pp. 90-91)는 이 문제를 전문적 수학적 상황과 비전문적 상황으로 구분하고 있는데 이러한 구분은 약간 모호하다. 여기서 보다 명확성을 기하기 위하여 여기서는 수학적 의사소통 상황과 수학적 발견의 상황으로 구분하였다.

12) 교육이론을 모두 설명할 수 있는 심리학은 없다고 본다. 인지 심리학은 작업기억에 보다 관심을 가지고 있고 행동주의 심리학은 장기기억에 관심을 가지고 있다는 점에서 중요하다.

문제해결에서 절차적 지식이 어떻게 작용하는지 알아보기 위해서 문제해결에 관한 이론을 살펴볼 필요가 있다. 문제해결을 이론적으로 접근하는 경우, 문제공간을 설정하는데 (구조화된) 문제공간은 자신의 현재 상태(조건)와 해결해야 할 목표상태(산출)를 합리적으로 연결할 수 있는 연결고리로 구성되어 있다. 여기서 연결고리를 조작자(operator)라고 한다. 조작자는 어딘가 있지만 해결자가 그것을 자신의 인지구조에서 찾아야 된다. 그러므로 문제해결이란 문제공간에서 시작상태와 목표상태를 확인하고 그 간격을 최소화 할 수 있는 지름길을 찾는 것이라고 할 수 있다. 이것을 수단-목표 분석에 의한 발견술이라고 한다.

문제해결의 다른 전략으로서는 전진법과 후진법이 있다. 이것을 설명하기 위하여 문제 해결을 다음과 같이 형식적으로 진술하자. S 를 시작상태, G 를 목표 상태라고 하고 문제를 (S, G)로 나타내자. 만약 원래의 문제 (S, G)가 (S_1, G)상태가 되었다고 하고 이 상태가 목표를 향하여 약간의 전진이 있다고 하자. 이와 같이 주어진 목표를 향하여 전진하는 형태의 해결법을 전진법이라고 한다. 이와 반대로 (S, G_1)가 되었을 때를 후진법이라고 한다. 여기서 수단-목표 분석은 (S_1, G_1)이 되겠다.

문제의 시작 상태를 있는 그대로 두면 자신이 가지고 있는 지식을 적용하기 어렵기 때문에 해결자는 조작자가 산출의 then(수행) 역할을 할 수 있도록 if(조건)를 재해석하는 것이 필요하게 되는데 이렇게 재해석된 문제를 문제표상이라고 한다. 문제표상은 관련 조작자를 선택하기 위한 전략 과정이다. 실제로 문제 표상과 조작자는 상호작용하기 때문에 문제표상은 문제해결에서 매우 중요한 과정이다. Polya의 발견술에서는 문제표상을 구체적으로 언급하지 않지만 문제 이해 단계에서 수립되어야 한다[13]. 문제 표상은 심상적이 될 수도 있고 상징적이 될 수도 있다.

다음 <표 4>에서 <표 10>은 어떤 함수값의 범위를 구하는 문제인제 실제 문제와 그 문제의 문제표상과 차이점, 문제해결의 전략 과정을 위에서 논의한 방식으로 진술했다. 다음 예시들은 문제와 문제표상, 및 조작자의 설정과 관련된 개념적 이해를 돕기위한 가상적 상황으로서 학교수학의 어떤 특정한 학년을 지정하는 것은 아님을 밝혀둔다.

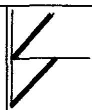
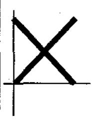
1) <표 4>의 해결자는 2차함수에 관한 지식이 전혀 없는 상태에서 최대값에 대한 유추적 해를 구하는 경우이다. 이 해결자는 최대값에 대한 용어 정의를 근사적으로 정의하고 있을 수도 있다.

<표 4> 2차함수 지식이 없는 경우

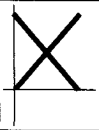
문제	$y=x^2-x+2$	$y=x^2-x+2$
문제표상	근사값을 찾자	좀더 많은 점을 사용하여 그래프를 그리자
조작자	여러 가지 점을 선택하여 해당 함수값을 비교한다.	좀더 많은 점을 plotting 하여 값들을 비교한다.
하위목표		

2) <표 5>의 해결자는 단지 1차함수에 대한 지식을 가진 상황에서 이차함수에 관련된 문제를 해결하는 상황을 예시하고 있는데 여기서는 수단-목표 분석법을 사용하고 있다.

<표 5> 1차함수의 지식만 가진 경우

문제	$y=x^2-x+2$	$y=x^2-x$	 의 곱의 범위를 구하라.	 의 최대값을 구하라.
문제표상	주어진 문제는 $y=x^2-x$의 값의 범위를 구하는 것과 본질적으로 같다.	$y=x(x-1)$에서 x와 $x-1$의 곱이다.	$y=x$와 $y=1-x$의 곱의 최대값을 구하는 것과 같은 문제이다.	두 그래프가 대칭적이다.

13) Polya의 발견술은 문제 표상과 자원 인출을 동일시하고 있다고 본다. 그러나 여기서는 문제표상이 메타인지에 관련된 것이라고 본다.

조작자	원래 문제를 바꿈	$y=x$와 $y=x-1$의 그래프를 그린다.		최대값은 1/2이다.
하위목표		$x \leq 0$일 때와 $x \geq 1$인 경우는 양이므로 고려할 필요없다.		

3) <표 6>의 해결자는 2차함수의 스키마를 사용하고 있다.

<표 6> 2차함수 지식이 있는 경우

문제	$y=x^2-x+2$
문제표상	문제는 x에 관한 2차 함수다.
조작자	완전 제곱형으로 고친다.
하위목표	

4) <표 7>의 해결자는 2차방정식 스키마를 사용하고 있다.

<표 7> 2차방정식 지식이 있는 경우

문제	$y=x^2-x+2$
문제표상	문제는 x에 관한 2차 방정식이다.
조작자	판별식을 이용해서 실근조건을 구한다.
하위목표	

5) 다음은 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위를 구하는 문제인데 <표8>의 해결자는 전진법을 사용하고 있다.

<표 8> 전진법을 사용하는 경우

문제	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위	$\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{1}{x+1}$의 값의 범위
문제표상	$\dfrac{1}{y}$의 값의 범위	$p+\dfrac{1}{p}$의 값의 범위
조작자	$\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{1}{x+1}$	$p+\dfrac{1}{p}\geq 2$
하위목표	적절한 하위목표 설정 고려함	p의 범위에 대한 하위목표 설정 고려함

6) 다음은 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위를 구하는 문제인데 <표 9>의 해결자는 전진법을 사용하고 있으며 2차방정식 스키마를 사용한다.

<표 9> 전진법과 2차방정식의 사용

문제	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위
문제표상	2차 방정식의 문제
조작자	판별식 사용
하위목표	적절한 하위목표 설정 고려함

7) 다음은 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위를 구하는 문제인데 <표 10>의 해결자는 전진법을 사용하고 있으며 미분 스키마를 사용한다.

<표 10> 전진법과 미분의 사용

문제	$y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$의 값의 범위
문제표상	미분의 문제
조작자	주어진 함수의 미분
하위목표	극대 극소 찾기

문제 표상에 전문가-초보자 차이가 있는데 전문가는 문제를 표상하는데 초보자보다 시간을 많이 보내고 대신에 해결 수행에는 초보자들보다 더 적은 시간을 소비하는 반면에 초보자는 문제 표상보다는 전략을 찾고 실행하는데 더 많은 시간을 보낸다. 전문가는 문제 표상에 맞지 않는 새로운 정보가 제공되면 더 적절한 전략을 찾는데 시간을 보내지만 초보자는 이 상황에서 새로운 정보에 대처하는 능력이 떨어진다(Lesgold, 1988). 전문가의 도식은 방대하고 고도로 상호 연관된 지식 단위간의 구조적 유사성에 의하여 조직되어 있는데 반해 초보자는 상대적으로 빈약하고 단절된 지식 단위를 포함하며 표면적으로 나타난 지엽적 유사성에 의하여 조직되어 있다고 한다(Glaser & Chi, 1988). 전문가는 주어진 문제의 정보와 자신의 도식을 비교하는데 초보자 보다 많은 시간을 보낸다. 전문가는 미지의 정보를 검색하기 위하여 주어진 정보로부터 전진하여 문제를 해결하려는 경향이 있다. 반면에 초보자는 전진법보다 수단-목표 분석이나 후진 전

략을 많이 사용한다(Hunt, 1994; Chi, et.al., 1982). 전문가에게는 수단-목표분석이 예비 전략이며 주로 도식에 의하여 문제를 해결하려는 경향이 있다(Holyoak,1990). 그러나 수학적 지식이 많이 있는 사람이라 하더라도 비수학적 문제를 접하는 경우가 되면 문제해결의 어려움을 자주 관찰할 수 있는데 이것은 이 문제에 대한 스키마가 빈약하기 때문이라고 본다.

2. 탐색용 표상

이해를 위한 표상은 위에서 언급한 바와 같이 문장의 이해, 아이디어의 탐색 및 적용과 관련된 이해, 문제해결에서 문제의 이해와 관련된 표상들인데 모든 학문 영역에서 나타난다.

여기서 논의할 표상들은 덩이글의 이해, 모델링, 유추, 그리고 과학적 이해를 촉진하기 위하여 제반 과학에서 사용하는 특수한 표상 등이다. 이해를 위한 표상은 수학 내적 표상과는 달리 엄밀한 정확성을 요구하지는 않으나 바람직한 정확도를 요구한다.

먼저 덩이글의 이해와 관련된 표상을 논의하자. 덩이글과 같은 여러 문장을 이해할 경우, 주어진 글의 정보를 그대로 가지는 것은 작업 기억의 용량제한으로 인하여 부담을 준다. 한 문장에서 다음 문장을 연결하기 위해서는 동일 단어가 있다면 그것을 매체로 하여 이해할 수 있겠지만 그렇지 않는 경우에는 추론을 통하여 이해하게 하게 되므로 이해가 어려워진다. 학습자들은 덩이글의 이해를 위하여 가장 핵심적 문장(논지)을 중심으로 위계적 재구성을 한다고 한다(Kintsch, 1986; Kintsch & van Dijk, 1978). 이때 생성된 덩이글의 재구성을 대형구조(macrostructure)라고 한다[14]. 즉 덩이글은 논지를 중심으로 요약함으로써 작업 기억이 가진 용량 제한을 극복하게 된다. 특히 이 연구는 수학교육에서 있어서 문장제 문제의 학습에 중요한 단서를 줄 것이다.

한편 학습자들이 범주 3단 논법과 같은 추론을 할 때 규칙에 의해서 추론하는 것이 아니라 머릿속에서 전제에 합당한 그림을 그린 후 그 그림으로부터 결론을 내린다고 하는데 이와 같은 심적 표상을 정신모델(mental model)이라고 한다(Johnson-Laird, 1983). 정신 모델과 스키마가 다른 점은 스키마는 이미 마음속에 있는 것이지만 정신 모델은 상황이 주어질 때 그 상황을 이해하기 위하여 새로이 조직된 지식 구조로서 주로 심상적이다 (이정모 외, 276). 범주 삼단 논법과 같은 추론이 아니라 단순 덩이글의 이해를 위해서도 정신모델을 사용한다. 다음 문장을 보자.

> 나는 이 길을 따라 계속해서 걸었다. 날씨가 너무 추워서 오른 손을 좌측 가슴에 넣어 손을 따뜻하게 하려고 했다. 길은 너무 멀었고 어둡기 때문에 그냥 나침반만 의존해서 계속해서 북으로 걸었다. 들리는 것은 내 심장 소리뿐이었다. 한참 동안 걸었다고 생각했는데 주위 상황이 처음 있었던 곳과 비슷하다는 느낌이 들었다. 이상한 느낌이었다. 더 이상한 것은 지금 내 심장소리가 오른쪽에서 들린다. 무언가 이상한 느낌이 들었다. 너무 추워서 감각이 이상하게 된 것인가?

위에서 글은 각 문장이 평범한 용어로 구성되어 있는데도 불구하고 어떤 상황인지 이해하기 어렵다. 이 글은 대형구조를 만드는 것도 아님에도 불구하고 어떤 상황인지 이해하기 어려운데 그 이유는 상황을 묘사할 이미지를 그리기 어렵기 때문이다. 이 상황을 뫼비우스 띠를 따라 여행하는 2차원 생명체의 이야기로 생각하면 위의 덩이글은 쉽게 이해될 것이다.

정신 모델은 조종 실행력을 가지기도 해서 행위의 예견과 계획을 도출하는데 도움을 주는 정신적 시뮬레이션을 활성화시킨다. 그러나 정신 모델을 계획, 예견, 발명 혹은 절절히 사용하기 위해서는 정신모델을 가지는 것만으로는 부족하며 이것을 가지고 그리고 이것을 통해서 행위를 수행할 수 있어야 한다(Perkins & Unger, 1999). 즉 여기서 정신모델을 절차적 지식을 돕기 위한 것으로 활용되어야 한다고 주장하고 있다.

정신 모델은 수학 교육에서 문장제 문제의 이해를 위하여 정신 모델을 구축하고 그것이 심상적이면 이에 대응하는 도형으로 변환시킬 수 있다. 이 과정은 Polya의 발견술에서 보이는데 예를 들면 문제와 관련된 그림을 그려라와 같은 방법술로 나타난다. 그러나 정신모델은 정확하게 표상되는 것은 아니며 많은 정보가 표상 과정

14) 이런 의미에서 이것을 상황 모델이라고도 한다.

에 손실되기도 하고 왜곡되기도 하기 때문에 수업 지도에서 유의해야 한다(Vinner, 1991)[15]. 한편 수학적 정의들은 단일 명제이지만 내용이 매우 추상적이기 때문에 덩이글 만큼 이해하기 어려운 경우가 많이 나타나는데 이 경우에도 정신 모델을 의도적으로 사용하게 한다면 학습에 도움을 준다. 문제 해결과 관련된 대학생들의 정신 모델의 구성과 관련된 관찰에서 정확한 정신모델의 구축이 문제 해결의 결정적 단서를 제공하고 있다는 것이 관찰되었다. 정신 모델은 문제해결에서의 이해 단계에서 나타나는 문제 표상의 역할도 수행한다. 특히 문장제 문제의 경우 정신모델의 사용은 매우 중요하다 (Kintsch, 1974; Greeno & Simon, 1986)

아마도 현상계의 어떤 패턴을 이해하기위하여 사용하는 가장 통상적인 표상 과정은 모델링이라고 할 수 있다. 즉 모델링이란 관찰자 자신이 가진 지식으로 현상계를 이해하기 위하여 만든 표상을 말한다. 실제로 모든 현대 과학은 물리적 세계 그 자체보다는 그것에 대한 모델링을 통해서 연구한다고 볼 수 있다. 이때 모델링은 실제로 현상에 대한 근사이다. 정밀도를 높이기 위해서는 추가비용을 지불해야 하기 때문에 적절한 타협이 필요하다.

각 학문에서 이해를 위한 표상은 다양하게 존재한다. 수학에서 기호 또는 언어와 같은 대상을 도형으로 표상하는 것 또는 그 역과정은 수학 학습에 중요한 수단이다, 다른 분야에서도 이런 종류의 표상은 여러 곳에서 발견되는데 예를 들면 물리학에서 Feynman 다이어그램, 화학에서 반응식과 구조식, 전기 전자공학에서 회로도, 건축에서 설계도, 그래프 이론에서 그래프, 통사론에서 사용하는 다이어그램 등이며 이런 표상들은 학문의 발전과 함께 개발되고 있다. 이러한 표상들은 각 영역의 전문가만이 이해할 수 있는 특징이 있고 이것을 통하여 이해의 폭을 확대시킨다. 그러므로 이러한 표상의 사용하기 위해서는 충분한 훈련이 필요하다. 마지막으로 Bruner의 EIS 이론은 수학적 구조를 이해하기 위한 교육적 목표를 위하여 조작된 표상이라고 하겠다.

15) 수학적 개념과 같이 정의된 개념은 명제 형태로 나타나기 때문에 수학적 개념은 덩이글로 간주될 수 있다. Vinner(1991)가 개념이미지라고 하는 것은 심상과 정신모델을 통합적으로 사용하고 있는데 주로 도형적임을 강조하고 있다.

3. 수학적 표상

앞에서 다룬 이해를 위한 표상은 유추적이고 근사적인 특징이 있다고 하면 수학 내적 표상은 내용적으로 동일한 것이다. 이런 의미에서 수학 내적 표상은 구조적이다.

수학 내적 표상은 다음의 구조내적 동형과 구조외적 동형을 분류할 수 있다. 전자는 하나의 수학적 구조에서 다른 두 대상이 동형이라는 일반적 동형을 의미한다. 예를 들면 두 군 G와 H가 군동형(group isomorphic)이라고 할 때는 전자의 경우가 된다. 이에 반하여 구조외적 동형은 주로 의미론적 중요성을 가진다. 예를 들면 종합기하학을 계량기하학으로 번역할 경우, 기하학을 대수적으로 연구하는 대수적 기하(대수적 위상기하, 대수기하) 등은 이미 수학에서 중요한 방법론으로 정착되었다. 한편 이러한 방법론적 변환은 이해 또는 추론과정에서 상징적 표현이 가지고 있는 한계를 극복하게 해준다. 즉 상징적 표상에 의한 작업기억의 용량 한계를 심상적 표상을 대체함으로써 작업기억의 용량을 확보해주는 것이다. 예를 들면 도형에 의한 증명도 여기에 해당된다.

새로운 수학적 구조를 기존의 수학적 구조로 환원할 수 있다면 이해가 용이하고 이에 따라 수학적 연구가 수월해질 수 있는데 수학 내적 표상을 통하여 이런 점을 가능하게 한다[16]. 유리수를 정의할 때 정수의 쌍의 집합에서 어떤 동치류를 쓰는 것 보다는 간단한 다른 기호로 나타내는 것이 편리하다. 이러한 점에서 수학 내적 표상은 기호 사용의 중요성을 시사한다.

III. 결 론

위에서 우리는 다양한 표상에 대하여 논하고 각각의 표상들이 상호작용하는 모습을 개략적으로 살펴보았다. 위에서 논의된 각각의 표상들이 서로 다른 성격을 가졌지만 모두 수학적 세계를 이해하기 위한 것들이다. 이 점을 인정한다면 표상의 형성과정에 대한 이해는 교수학적 연구 대상이 된다. 실제로 기성수학에서 세련된 수학적 결과들이 학교수학으로 번역되기 위해서는 무엇보다도 심적 표상에 대한 충분한 이해가 있어야 한다고 본다.

16) 이런 의미에서 매장정리나 Dunford & Schwartz의 선형 작용소론은 고전이다.

수학적 개념들이 추상적이라는 점은 오개념을 낳게 될 가능성이 있다. 이러한 문제에 대한 하나의 대안은 다양한 표상을 제공할 수 있는 교수설계의 개발이라고 본다. 여기서 하나의 방법은 심상을 형성할 수 있는 수업방법의 개발이다. 예를 들면 문장제 문제를 그림으로 상상하거나 그릴 수 있도록 지도되어야 하거나 표상간의 전이를 수월하게 할 수 있는 학습 방법의 연구이다. 한편 기성수학에서 도형에 의존한 기하는 쇠락했지만 학교수학에서의 기하교육은 심상을 풍부하게 하는 자원이므로 강조될 필요가 있다.

마지막으로 수학 교수학이란 형이상학적 학문이 아니라 처방적이고 상황적 학문으로서 관찰과 실험을 기반으로 하기에 모든 교수학습은 타당한 실증적 근거에 의하여 실천되어야 한다. 이러한 근거를 제시하기 위해서는 학습자의 인지 기제를 이해해야 하고 이에 탐침이 필요하다. 여기서 탐침의 대안이 인지심리학의 역할인데, 훈련이 아닌 이해의 측면에서 인지심리학은 이전의 심리학이 설명할 수 없었던 많은 문제를 해결해주고 있다는 점에서 수학교육계에서 보다 폭넓은 관심을 가질 필요하다고 본다. 특히 구성주의의 이론을 정립한 학자들은 대개 인지심리학자이거나 인지심리학에 관심을 가졌다는 점을 감안하면 수학교육에서도 인지심리학에 대한 이해가 보다 확대되어야 할 것 같다.

참 고 문 헌

이정모 외 (2003). 인지심리학. 한국실험심리학 편. 서울: 학지사.

Anderson, J. R. (1983). *The architecture of cognition.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Anderson, J. R. (1995). *Cognitive Psychology and Its Applications*(4th ed.). Freeman & Company. [이영애 옮김 (2000). 인지심리학과 그 응용. 서울: 이화여자대학교 출판부]

Anderson, J. R. & Bower, G. H. (1973). *Human associative memory*, Washington DC: Winston.

Bartlett, F. C. (1932). *Remembering: A study inexperimental and social psychology.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

Case, R. (1985). *Intellectual development: A systematic reinterpretation.* New York: Academy Press

Chi, M. T. H., Glaser, R. & Rees, E.(Eds.) (1982). Expertise in problem solving. In R.J. Sternberg(Ed.), *Advances in psychology of expertise.* **1**, pp.7-76. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Collins, A. M. & Quillian, M. R. (1969). Retrieval time from sematic memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior.* **8**, pp.240-248.

Dunford, N. & Schwartz J. T. (1958), *Linear operators.* Interscience, New York.

English L. D. & Halford, G. S. (1995). *Mathematics Education: Models and Processes.* Hillsdale, NJ: Erlbaum. [고상숙 외 옮김(2004) 수학교육론. 서울: 경문사.]

Finke, R. A., Pinker, S. & Farah, M. J. (1989). Reinterpreting visual patterns in mental imagery. *Cognitive Science.* **13(3)**, pp.252-257.

Flavell, J. H. (1978). Comment. In R.S. Siegler(Eds.), *Childern's thinking: What develop?* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Gagne, E. D., Yekovich, C. W. & Yekovich, F. R. (1993). *The cognitive psychology of school learning.* [이용남 외 옮김(2005). 인지심리와 교수학습. 서울: 교육과학사]

Glaser, R. & Chi, M. T. H. (1988). Overview. In M. T. H. Chi, R. Glaser, & M. Farr(Eds.), *The nature of expertise*(pp. xv-xxxvi). Hillsdale, NJ. Erlbaum.

Greeno, J. G. & Simon H. A. (1988). Problem solving and reasoning. In R. C. Atkinson, R. Herrnstein, G. Lindzey & R.D. Ruce(Eds.), *Steven' handbook of experimental psychology* Rev. ed., pp.589-672, New York: Wiley.

Halford, G. S. (1982). *The development of thought.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Holyoak, K. J. (1990). Problem solving. In D.N. Osherson & E.E. Smith(Eds.), *Invitation to the cognitive science,* **3**. *Thinking.* pp.116-146. Cambridge, MA: MIT Press.

Hunt, E. B. (1994). Problem solving. In R.J. Sternberg(Ed.), *Handbook of perception and cognition*, **12**. pp.215-232. New York: Academic Press.

Kintsch, W. (1974). *The representation of meaning in memory*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kintsch, W. (1986). *Learning from text. Cognition and Instruction* **3(2)**, p.99.

Kintsch, W. & van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and reproduction. *Psychological Review* **85**, pp.363-394.

Komatsu, L. K. (1992). Recent views on conceptual structure. *Psychological Bulletin*. **112(3)**, pp.500-526.

Kosslyn, S. M. (1990). Mental imagery. In D.N. Osherson, S. M. Kosslyn, & J. M. Hollerbach (Eds.), *Visual cognition and action: 2. An invitation to cognitive science*. pp.73-79

Kosslyn, S. M. & Rabin, C. S. (1999). Imagery. In R.A. Wilson & F.C. Keil(Eds.), *The MIT encyclopedia of the cognitive science* pp.387-389. Cambridge, MA: MIT Press.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Labov, W. (1973). The boundaries of words and their meanings. In C.-J. N. Bailey & R. W. Shuy(Eds.), *New ways of analyzing variations in English*. Washington, DC: Georgetown University Press.

Lesgold, A. M. (1988). Problem solving.In R. J. Sternberg & E.E. Smith(Eds.), *The psychology of human thought*, pp.188-213. New York: Cambridge University Press.

Luria, A. R. (1968). *The mind of mnemonist*. New York: Basic Books.

Medin, D. L. & Schaffer, M. M. (1978). Context theory of classfication learning. *Psychological Review*, **85**, 208-238.

Norman D. A. & Rumelhart, D. E. (1975). *Exploration in cognition*. NY.: McGraw-Hill.

Perkins, D. N. & Unger, C. (1999). Instruction and learning for understanding. In C.M. Reigeluth(Ed.), *Instructional-Design Theories and Models; A New Paradigm of Instructional Theory*(Vol II). Hillsdale, NJ: Erlbaum. [최욱 외 옮김(2005). 교수설계 이론과 모형, 서울: 아카데미 프레스.]

Reed, S. K. (1974). Structural descriptions and the limitations of visual images. *Memory and Cognition*. **2**. pp.329-336.

Rosch, E. (1978). Principles of categorization. In E. Rosch and B.B. Lloyd(Eds.), *Cognition and Categorizations*. Hillsdale, NJ.: Erlbaum.

Rumelhart, D. E. & Ortony, A. (1977). The representation of knowledge in memory. In R. C. Anderson, R. J. Spiro, W. E. Mongtague, *Schooling and the acquisition of knowledge*, pp.99-135. Hillsdale, NJ.: Erlbaum.

Sternberg, R. J. (2003). *Cognitive Psychology*(3rd ed). Wadsworth Publishing.[김민식, 손영숙, 안서원 옮김 (2005). 인지심리학. 서울: 박학사]

Vinner, S. (1991). In David Tall(Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*.[류희찬 외 옮김(2003). 고등 수학적 사고, 서울: 경문사]

Representations Useful in Mathematics Education

Yoo, Yoon Jae
Department of Mathematics Education, Kyungpook National University, 1370 Sankyuckdong, Bukgu, Taegu, Korea
E-mail: yjyoo@knu.ac.kr

In the article, representations useful in mathematics education are introduced and show how they are related in the context of mathematics education. They are classified in three categories: representations in mind, representations for understanding and problem solving, and mathematical representations.

* ZDM Classification : C33
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : representation, problem solving