韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 02. 제 46권, 제 1호, 97-122.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2007, Vol. 46, No. 1, 97-122.

수학 교수·학습과정에서 사고력 신장을 위한 계산기의 활용
- 학생들의 수학화 발달에서 테크놀로지의 효과 -

고 상 숙 (단국대학교)
고 호 경 (도장중학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성과 목적

학생의 수학적 사고력 신장을 위한 조사활동을 동반하는 학습 환경에서는 교사와 학생, 학생과 학생사이의 상호작용이 매우 활발히 진행될 수 있음을 쉽게 예측할 수 있다. 사회문화적 관점을 가진 수학교육자들은 교수학습에서 이런 상호작용을 매우 중요하게 여기며, 이 때 사용되는 컴퓨터와 계산기는 교사와 학생, 학생과 학생을 연결하는 매개체로서 도구적 역할을 한다고 주장한다. Dreyfus(1992)는 그러한 도구는 학생 자신의 생각을 계획하고 추측하고 바꾸는데 유용한 효과를 끼친다고 주장하였는데 학습에서 이루어지는 의사소통을 통해 학생은 공유된 지식을 형성하게 되며 그 지식을 개별적으로 내면화하기 용이해진다고 보았다.

이처럼 테크놀로지의 환경을 지지하는 한편, 이에 대한 활용을 수학에 대한 수학적 사고를 중시한 교수-학습론에 관한 측면은 근래의 관심사 중 하나인데 이는 수학적 지식의 발견을 안내하는 소위 발견학습과 함께, 수학은 불변의 절대적인 진리라기보다는 학습자의 창조적이고 능동적인 활동에 의해 습득된다는 교수-학습이론에 초점을 두고 있다. Poincare와 Klein과 같은 교육에 관심을 가졌던 수학자들은 수학을 수학의 역사적 발달의 과정을 따라 소박하고 직관적인 상태에서 점진적인 형식화 단계를 거쳐 마지막에 연역적인 형식체계에 이르도록 지도하는 것이 자연스럽고 과학적인 지도방법이라고 주장(우정호, 2000) 하던 것과 같이 수학교육의 문제점과 수학교육 인식론의 변화에 따라 수학을 학습하는 학생들은 수학화를 통해 학습자 스스로 수학을 구성해 나가야 한다고 주장한 Freudenthal의 수학화 이론이 학습자의 능동적인 활동을 강조한 교수-학습이론으로 여러 수학교육자에 의해 주목을 받고 있다. 그에 의하면, 수학은 확실성을 추구하는 정신적 활동이며, 현실을 바탕으로 상식에서 출발해서 반성적 사고를 통해 내용과 형식, 현상과 본질의 교대 작용을 거듭하면서 조직화하는 활동이다. Freudenthal(1973)은 이러한 인간의 정신적 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성을 현상의 조직화 활동이라 보고 이것을 수학화라고 표현하였고 학습자들이 효과적으로 수학을 학습하기 위해서는 교사의 적절한 안내를 통해, 학생들의 활동에 의해 스스로 수학을 학습해야 한다고 주장하였다.

그러나 Freudenthal의 수학화 이론에 대한 지금까지의 대부분의 연구는 이론의 탐색에 집중하고 이 이론에 따른 단편적인 학습지도 방향에만 초점이 맞추어 졌을 뿐 실제 이 이론이 어떻게 학습 현장에 적용되고 있는지에 대한 연구는 그리 흔하지 않다. 수학화를 주장한 Freudenthal 자신도 수학화 이론제시와 함께 실제 학습 현장에서 나타날 수 있는 학생 개개인의 학습과정을 분석하는 임상적 방법을 선호하였음에도 불구하고 실제 우리의 교육현장에서 이 이론이 어떻게 적용되어질 수 있는지에 대해 자세히 제시하지 않았다. 이와 같은 점에 착안하여 본 연구는 컴퓨터와 계산기가 제공된 테크놀로

* 이 논문은 2005년 정부부처 교육인적자원부의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임. (KRF-2005-030-B00041)
* 2006년 12월 투고, 2007년 2월 심사 완료.
* ZDM 분류 : C73
* MSC2000 분류 : 97C90
* 주제어 : 수학적 사고력, 수학화, 현실적 수학 교육, 함수, 기술공학, 계산기, 수학적 성취도, 수학적 성향, 검사지.

지 교실현장에서 학생의 Freudenthal의 수학화 발달과정을 조사하고 이 과정에서 나타난 테크놀로지의 활용 효과를 파악하는 것을 목적으로 한다. 정영옥(1999)은 인간은 능동적인 학습자임을 인정하면서, 때로는 학생들에게 얼마나 많은 주도권을 주어야 하는가에 대해 자문하지 않을 수 없음을 지적하였다. 즉 학생들이 지식을 스스로 구성해 간다는 것이 교육현장에 어떻게 반영되어야 하는지에 대해 숙고할 필요가 있는 것이다.

따라서 본 연구논문에서는 위에서 살펴본 연구의 필요성에 의해 Freudenthal의 수학화 이론이 테크놀로지의 학습현장에서 적절하게 적용될 수 있는지에 대한 그 가능성과 학생의 주도성이 강조된 이 이론이 수업현장에서는 실제로 학생의 수학화가 원만히 이루어지기 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하고 이에 초점을 맞추어 연구를 진행하고자 하였다.

2. 연구문제

수학화 과정에서 컴퓨터 및 계산기의 활용의 효과를 조사하는데 있어서 정량적 연구방법만으로는 학생의 사고력 신장과정에 따른 구체적이고 실증적인 연구결과를 얻기가 어렵다. 학생의 사고력 발달과정을 구체적으로 이해할 수 있는 심층적인 연구결과를 산출하기 위해서 정성적 연구방법을 동시에 필요로 한다. 따라서 혼합연구방법에 따라 연구문제를 아래와 같이 크게 두 가지로 구분하여 조사하고자 하였다. 아래 가 항의 연구문제에선 정량적 연구결과를 나 항의 연구문제에선 정성적 연구결과를 얻고자 하였다.

가. 함수에서 학생의 수직적, 수평적, 응용적 수학화 이론에 따른 교수 학습양상에서 테크놀로지의 효과를 파악한다.

1) 검사지의 신뢰도, 적합도, 난이도, 변별도를 조사한다.
2) 테크놀로지를 활용한 학습 환경에서 학습한 학생과 테크놀로지를 사용하지 않은 학습 환경에서 학습한 학생의 성취도의 차이점을 조사한다.
3) 테크놀로지를 활용한 학습 환경에서 학습한 학생과 테크놀로지를 사용하지 않은 학습 환경에서 학습한 학생의 수학적 성향에서 나타나는 차이점을 조사한다.

나. Freudenthal의 교수학적 현상학에 따라 제시된 함수교육에서 학생의 수학화 과정을 돕기 위한 모델링을 중심으로 테크놀로지 학습 환경에서 사용된 테크놀로지의 역할을 조사한다.

II. 이론적 배경

본 장에서는 앞에서 제시한 연구문제를 위한 검사도구 설정의 근거가 되는 Freudenthal의 수학화 이론에 대하여 살펴보고 함수영역을 중심으로 수학화 활동이 수학교육에 미칠 수 있는 영향을 살펴보기로 한다. 또한 Freudenthal의 수학화 이론에 따라 설정된 검사도구로 성취도 검사와 사례 연구를 통해 나타나는 수학화 과정을 조사하기위한 근거로 Freudenthal의 수학화 이론을 실천적 이론으로 더욱 구체화시킨 네덜란드의 RME의 원리를 살펴보기로 한다.

1. Freudenthal의 교수-학습 원리

Freudenthal은 수학은 무엇이며, 수학의 가장 본질적인 특성은 무엇인가를 탐색함으로써 수학에 가장 적절한 교수-학습 방법을 구안하고자 하였으며, 그 결과 수학화를 중시하는 수학 교수-학습이론을 제시하고 있다. Freudenthal(1973)이 제창한 수학화란 공리화(axtiomasing)에 의해 공리에 이르고 형식화(formalizing)에 의해 형식을 이루어가며, 도식화(schismatizing)에 의해 도식에 이르는 것처럼 수학을 만들기 위해서는 수학화를 하는 것은 당연하며 현실(Reality)이 수학을 포함한 다양한 것들의 영향을 받아서 변하고, 넓어지고, 깊어지는 과정이다. 즉, 현실이 수학을 포함한 어떤 수단에 의해 조직되는 과정이라고 할 수 있다. 따라서 현실이란 실생활 소재일 수 있으며, 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 선행 학습에 의하여 이미 알고 있는 수학 또는 기존의 수학적 경험을 체계화시킨 것일 수도 있다. 수학을 수학적 활동의 결과로서의 기성 수학(ready-made mathematics)과 수학화 활동에 초점을 둔 실행수학(acted-out mathematics)으로 구분하면서, 학생들이 학습해야 하는 수학은 수학화 활동으로서의 실행 수학이라고 주장하였다(강옥기, 2000).

수학화 활동이란 인간의 정신적 활동이며 현실을 정리하는 수단인 본질로 조직되고, 그 본질은 다시 현실이 되어 새로운 본질로 조직되는 끊임없는 재조직화의 과정으로 수학을 설명하면서 현실을 본질로 조직하는 이러한 일련의 과정을 '수학화'로 명명한 것이다(Freudenthal, 1973). 다시 말해서 수학화란 현실을 수학자의 필요에 맞게 적절히 손질하여 새로운 것, 본질로 조직하는 조직화 활동이며, 수학화 과정은 이러한 본질의 교대 작용에 의해 수준 상승이 이루어지는 불연속적인 과정이다. 간단히 말하면 Freudenthal이 주장하는 수학 교수-학습이론이란 수학화를 강조하는 교수-학습 이론이라 말할 수 있으며 교수학적으로는 재발명을 의미하는 것으로 학생들은 교사의 안내 하에 감정이 이입될 수 있는 현실로부터 수학화 활동에 의해 주관적 의미를 갖는 수학적 내용을 재발명해 나가는 과정을 학습 과정에서 반드시 경험해야 한다고 주장한다.

2. 현실적 수학교육(RME)의 교수-학습 원리

현실적 수학교육은 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 재발명과 점진적인 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 핵심원리로 삼고 있으며, 학습자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓고, 어떠한 본질을 그 본질이 조직되는 현상과 관련지어 기술하는 것으로써, 조직화의 수단으로서의 본질이 어떤 현상을 조직하기 위해 만들었는지 그리고 본질이 어디까지 확장될 될 수 있는지, 본질이 현상에 어떻게 작용하는지를 나타내는 것이다. 따라서 어떠한 본질과 현상의 관계에서 교수학적 요소를 강조하는 것, 즉 본질과 현상의 관계가 교수-학습 과정에서 어떻게 획득하는가에 주목되는 것을 말한다. 만일 본질과 현상과의 이러한 관계에서 수학적 요소를 강조할 때, 곧 그 관계가 학습-지도 과정에서 어떻게 획득되는가를 주목하면서 수학적 개념과 구조라는 본질이 조직의 수단으로 작용하는 어떤 현상으로 관련하여 기술하고 교수학적으로 적용하는 것이다(Freudenthal, 1983). Gravemeijer(1994)에 의하면 현실주의적 수학교육은 구체(concrete)와 추상(abstract)간의 매개를 시도한다. 여기서 구체와 추상은 자기 개발 모델에 근거하며 현실주의적 수학교육은 기본 원리에서 출발하여 전체를 구성하는 bottom-up 방식을 취한다, 이는 학생에게 직관력이 필요하기 때문이다. 현실주의적 연구는 학생들의 일상회화적인 지식으로부터 문제를 다루는 것에서 출발하는 반면 top-down은 전체적인 구성에서 출발하여 세부에 이르는 방식에 의존한다. 현실주의적 수학교육은 전통적 교육 연구방법보다 학생들을 다양한 위치에 놓는다. 학생들은 자신을 더 믿게 되어 자신의 답을 확인하기 위해, 또는 표준 풀이과정을 위한 판에 박힌 수업에 의존하지만은 않는다. Cobb, Wood, Yackel 와 Mcneal(1992)에 의하면 이러한 문제가 '교실 사회 규범'(classroom social norm)의 변화를 가져 왔으며 이는 명확히 재교섭이 필요한 부분이다. 수학 수업에서 학생들은 자신이 무엇을 해야 하는지 자각한다. 단순히 따라하도록 또는 정답을 빨리 구하는 것만이 아니라 질문하고 풀이를 설명하고 정당화해야 한다. 다른 사람의 풀이를 이해하기 위해 노력하며 설명을 되묻거나 정당화하는 규범의 변화를 거치며, 교사의 역할 안내자로서, 교육적 활동을 선택하고 토론을 이끌어 내며, 학생의 수학을 재형성 시키는 등의 역할을 한다는 것이다.

Treffers(1987)는 수학화의 과정에 있어서 수학화의 수평적인 것과 수직적인 것을 구분하였다. 수평적 수학화란 문맥 문제를 수학적 문제로 전환하는 것을 포함하고, 수직적 수학화는 수학적 문제를 더 고차원적인 수준으로 끌어올리는 것을 의미하고 있다. 즉, 현실적 수학교육은 Treffers가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통해 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른데 기인한다. Treffers는 Freudenthal의 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀 더 구체적인 원리로서 현실적 수학교육의 수업이론으로 다음의 다섯 가지 사항을 제안하였다. 첫째, 현상학적 탐구, 둘째, 수직적 도구에 의한 연결, 셋째, 학생들 자신의 구성과 산물, 넷째, 상호작용수업, 다섯째, 학습 가닥의 연결이다(Treffers, 1987). 본 연구에서는 현실적 수학교육의 핵심요소인 수평적·수직적 수학화와 매개 모델 그리고 문맥수학에 대하여 간단히 살펴보고자 한다.

가. 수평적 수학화 (horizontal mathematization)

Freudenthal은 문제의 수학적 측면들을 알아내고 규칙성을 발견하는 단계로 현실 세계의 문맥을 직관적으로 탐구하는 단계에서 학생들 간의 상호 작용, 학생들과 교사와의 상호 작용 그리고 학생들의 형식화, 추상화 능력과 같은 요인에 의존해서, 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해낸다고 하였는데 이 과정을 수평적 수학화의 단계로 명명하였다.

나. 수직적 수학화 (vertical mathematization)

Freudenthal은 수평화의 단계 후의 수학화 과정에서 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다고 하였는데 이 과정을 수직화의 단계라고 불렀다.

다. 매개모델(meditating model)

매개모델이란 상황지식과 형식수학간의 간격을 잇는 매개도구(meditating tools)이다. 처음에는 수학적 개념과의 관계가 전연 의식되지 않은 현실적 소재지만 점차 수학적인 관점에서 세련되게 가꾸어 주는데 이용되는 매개도구이다(Doorman, 2002).

라. 문맥수학

현실적 수학교육에서의 수업의 첫 번째 단계는 구체적인 문맥으로 시작된다. 문맥이란 "어떤 구체적인 수업과정에서 학생들에게 열려 있는, 수학화 되어야 할 현실의 영역"(Freudenthal, 1991, p.73)을 의미한다. 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 이러한 탐구에서 중요한 것은 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념 또는 비형식적 지식과 전략을 개발하도록 하는 것이다, 이는 '현실적'이라는 것을 의미하며, 학생이 상상하고 그 자신의 경험을 활용하고 자신의 비형식적 전략들이 표출될 수 있는 상황을 의미한다. 또한, 문맥이란 처음에 현실 세계에서 출발하여 수학화 과정을 거치고 다시 현실 세계로 돌아올 수 있도록 하는 것을 의미한다. 현실과의 밀접한 관련성을 유지하기 위해서는 수학적으로 정련된 설명과 단순한 수학적인 문제풀이 위주의 수업이 아니라 풍부한 문맥을 학생들에게 제공해야 하며 이를 기반으로 수학화를 이루려 함이다.

Treffers(1987)는 Freudenthal의 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀 더 구체적인 원리로서 현실적 수학교육의 수업이론으로 다음의 다섯 가지 사항을 제안하였다. 첫째, 현상학적 탐구, 둘째, 수직적 도구에 의한 연결, 셋째, 학생들 자신의 구성과 산물, 넷째, 상호작용수업, 다섯째, 학습 가닥의 연결이다. 본 연구를 위한 함수적 사고를 위한 수업과정에는 위의 다섯 사항을 고려한 문맥수학이 접목되어야하고 또한 테크놀로지 환경과 잘 통합할 수 있게 재구성할 필요가 있 예비연구를 통한 자료수정에 의해 좀 더 구체적으로 조사되었다.

3. 수학적 표상과 모델링

Kaput (1994)는 테크놀로지를 활용하여 수학적 표상체계와 일상적 경험을 연결시켜 나가며 탐구적 모델을 발전시킬 수 있도록 하였다. 이와 같은 시도는 모두 학생들의 비형식적 일상적 관점에서의 이해를 시작으로 하여 점차 형식적 수학으로의 접근을 시도한 것으로 이러한 과정을 모델-구축(model building)접근법을 사용한 것이다.

Kaput(1994)와 Nemirovsky(1996)의 연구에서, 탐구적 모델의 접근법은 형식적 수학과 실제적 경험 사이의 간격을 이어줄 다리를 어떻게 연결할 수 있는가가 초점이 되었다. 이러한 역할과 과정을 정교하게 잘 관찰하여 제시하지는 못했으나 어쨌든 컴퓨터를 활용한 탐구를 통하여 수학적 표상체계가 적절히 성숙해 나갈 수 있는 교수학적 가능성을 보여주고자 하였다. 먼저 그들이 제시한 탐구적 접근이란 경험적 실제 상황 속에서 수학적 표상체계를 경험하는 것이다. Kaput(1994)에 따르면 우리가 일상에서 만나는 표상 체계와 잘 다듬어진 수학적 상황은 결코 일치 될 수 없기 때문에 학생들에게 있어서 학교에서 배우는 수학은 "고립된 수학적 기호체계"에 불과하다고 하였다. 따라서 테크놀로지를 그저 이러한 제한된 표상체계에 국한되어 함수나 함수의 그래프를 학습하는 데 사용하는 것이 아니라, 실제적 상황을 주고 이것으로부터 실제적 데이터를 가지고 탐구하며 수학적 표상체계에 접근하고 결국은 "고립된 수학적 표상체계"를 느

끼거나 활용할 수 있도록 사용하는 것, 즉 수학화 상황에 사용해야 할 것을 논하였다.

이러한 Kaput의 주장을 정리해보면, 고립된 형식적 수학과 실제적 경험 사이의 간격을 테크놀로지를 사용하여 연결해보고자 하는 것이다. 학생들이 정형화된 그래프만을 다루고 그 그래프에 관련된 두 변수간의 식만을 찾는 활동에 가치를 두지 않고 학생들 스스로 가능한 최대로 자신이 탐구해 나가며 표상체계를 이해해 나가는 것에 가치를 두었다. 이러한 과정에서 그래프, 표, 함수식 표현 등과 같은 다양한 수학적 표상 체계를 통합해 나갈 수 있으며 또한 적절히 변환시키는 게 가능하도록 해야 한다고 하였다.

또한, Nemirovsky(1996)는 표상화의 방법에서 학생들은 적절한 수학적 의미를 학생들이 물리적 활동과 그래프 표상 활동 간의 연결을 시도하는 탐구활동을 통해서 이루어져야 한다고 주장한다. Kaput이 개인적 수학적 활동에 초점을 두었다면 Nemirovsky는 사용 과정에 좀 더 주안점을 두었다고 할 수 있다. 그는 표상 체계와 표상 사용을 구분하여 표상 체계는 어떤 개체로서 활동 그 자체와는 따로 구분되어 해석되어질 수 있으나 표상의 사용은 의미가 부여되고 상황화된 활동으로 보았다. 예를 들어, 좌표 평면과 같은 것은 표상 체계 그 자체로 볼 수 있으며 표상의 사용은 좌표 평면 그래프에 대한 함수적 관계의 추론 과정이 포함된다는 것이다. Nemirovsky가 이렇게 표상 체계와 표상 사용을 구분 짓는 이유 중 하나는, 일정한 규칙에 의해 사용하는 표상화 학습, 즉 정형화된 표상 체계 학습에서 벗어나고자 하였다. 그는 활동으로서의 표상화를 주장하며 표상화를 가지고 추론을 위한 학습 과정을 제시하였는데, 가령 그래프가 단지 학습의 산출물이나 표상화 그 자체가 아니고 그래프를 이용하여 표상화된 상황을 재인지(reconceptualizing)하는 것에 의하여 의미를 발전시켜나가는 것이 중요하다고 하였다. 또한 이러한 그래프적 표상이 물리적 변화를 추론하는 데 활용되어질 수 있는 학습 환경을 중시 여겼으며 이에 대한 대안으로 컴퓨터 환경을 제안하기도 하였다.

Bednarz 외 (1993)은 조금 다른 차원에서 표상화를 제안하였는데, 표상화를 수학적 관계를 기술하기 위한 외적 기호 체제로써 강조할 것을 주장하였다. 따라서 수학을 지속적인 인간의 사회적 구성의 발달 측면에서 바라보면서 표상화란 것은 개인적, 통합적 관계 모두를 강조하여야 한다고 보았다. 즉, 표상화란 새로운 지식을 구성해 나갈 수 있도록 수학적 실체로 통합되어야 한다는 것이다. 이러한 교수학적 관점에서 다양한 표상화가 학생들에 의해 고안되어질 것을 제안한 바, 예를 들어 학생들은 수나 화살표와 같이 자신들에게 이미 익숙한 몇 가지 기호체제를 조합시키면서 자신만의 기호화를 먼저 경험해 보는 것이 중요하다는 것이다. 여기서 강조된 것은 이미 형성되어 있는 표상화를 다른 사람에 의해 주어지는 것이 아니라 자연스럽게 경험에 의해 비판적으로 받아드리며 산출될 수 있는 기회가 주어져야 한다는 것이다. 이러한 과정에서 표상화 과정에는 의사소통의 기회가 강조되었다. 일련의 교수학적 과정 속에서 표상화 되어지기 위하여 의미가 발전되며 적절한 표상이 고안되어지는 대안적 방법을 제안하면서 이러한 방법 중에 하나로써 상향화(buttom-up)를 제안하기도 하였다. 이것은 어떤 지점에서 시작하여 학생들이 표상화해 나갈 수 있는 방식으로 하향화(top-down)방식으로 불리는 탐구적 방식과는 반대되는 입장이다. 이러한 두 가지 서로 다른 접근법은 창안을 강조하느냐 발견을 강조하느냐에 따라 그 입장을 달리하나 Gravemeijer 외 (2000)는 수학적 의미와 학생들 개개인의 자체발생적인 수학적 이해를 위하여 통합한 교수학적 설계에 관심을 두었다. 따라서 이를 위하여 현실적 수학교육 하을 이루기 위하여 표상의 고안을 강조하는 표현적 모델과 표상의 의미 경험을 강조하는 탐구적 모델 구현 모두를 제안하였다. 또한 Doerr(1995) 역시, 컴퓨터를 사용한 교수학적 접근을 시도하면서 이를 통한 표현적, 탐구적 모델링 접근을 시도하였다. 학생들은 가설을 세우고 이를 다양한 변수들을 컴퓨터에 입력하며 처음에 자신이 세운 가설들을 발전시켜 나가면서 자신이 추측한 것이 모델과 어떻게 일치하거나 어떤 점이 다른 가를 탐구해 나가도록 한 것이다. 여기서 그는 학생들이 컴퓨터 프로그램을 활용하여 현상을 설명하기 위하여 표현적 모델을 학생스스로 개발해 나갈 수 있도록 유도하였다.

학생들의 수학적 모델링 활동은 가장 중요한 교수학적 목적 중 하나로서(Confrey, 1994, Lesh & Lamon, 1994), 학생들은 모델링 과정에서 자신이 생각하고 있는

것을 검증할 수 있고 이를 토대로 변화를 시도할 수 있어야 한다고 하였다(Lesh & Doerr, 2000). 이렇게 실제적 상황에서 출발하여 경험을 토대로 의미 있는 모델들을 창출해 나갈 때 학습자는 의미 있는 수학을 창안해 나갈 수 있게 된다는 것이다. 따라서 상황에 필요한 적절한 언어, 그래프, 그림, 표기 체계 등을 동원하여 학습자의 표상적 능력 향상을 도모하기 위하여 다양한 표상 체계를 접할 것과 이를 적절히 통합할 수 있는 환경을 제안하였다. 다시 말하면, 역동적이고 기능적으로 서로 연결시켜 나가면서 기본적인 수학적 추론을 구성해 나가기 위하여 모델링을 원활히 할 수 있는 풍부한 표상적 접근이 가능한 환경을 언급하면서 적절한 테크놀로지 환경을 제시하였다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법

본 연구에서는 Freudenthal의 수학화 이론과 이를 근거로 발달한 네덜란드의 현실적인 수학교육의 특성에 대한 문헌연구를 바탕으로 중등 교육과정의 함수에서 테크놀로지를 활용한 교수학적 자료를 개발하고 이를 현장 수업에 사용하여 이 이론의 현장 통합화 가능성을 파악하고자 하였다. 최근 들어 혼합연구 방법론이 미래 교과 교육의 개선을 위하여 제시되고 있다(Greene, Caracelli, & Graham, 1989; Mathison, 1988; Swanson, 1992, Creswell, 2003)는 주장에 비중을 두어, 자료의 효과를 보다 구체적으로 파악하기위해 정량연구와 정성연구를 사용하는 혼합연구 방법을 사용하여 연구의 신뢰도를 향상시키고자 하였다. 만약 두 연구방법에서 비슷한 연구결과를 얻는다면 연구의 신뢰도를 높이는 결과를 가져올 것이며 반대로 상이한 연구결과가 발생한다면 구체적인 원인 분석을 통해 그 요인을 파악해냄으로써 연구의 제한성을 구체적으로 묘사할 수 있을 것이므로 더 의미 있는 연구결과를 산출할 수 있을 것으로 사료된다.

본 연구는 수학교수 학습과정에서 사고력 신장을 위한 컴퓨터 및 계산기의 활용을 조사하는 것이므로 처치로는 테크놀로지(T1)와 수학화(T2)이 되며 이들의 효과를 파악하기 위해 학생들의 성취도, 수학적 성향, 수학적 성향의 구성요소 등이 종속변인으로 조사되었다. 정량연구방법으로 이 두 가지 처치에 따른 120명의 연구대상(학생집단)을 3개의 그룹(~T1X~T2, T1XT2, ~T1XT2)으로 분류하고 수학화를 진행하는 각 집단에 대한 T1과 T2의 효과를 연역적인 방법에 의해 그 결과를 산출할 수 있다. 그러나 T1에 해당하는 수학적 사고과정에서 테크놀로지의 효과는 본 연구의 제목에서 나타나듯이 본 연구의 주요 질문이다. 이 과정은 통계적 수치가 말하는 효과가 있다 없다를 묘사하는 그 이상의 것을 얻기를 원한다. 수학적 사고력의 변화에서 테크놀로지가 어떤 사고력의 강화를 이끌어가는지 또는 기존의 전통적 학습에서와는 다른 어떤 학습의 특성을 가져오는지 등의 구체적이고 현실적인 자료를 얻기를 원한다. 따라서 T1에 대한 효과는 정성연구방법의 사례연구를 선택하여 귀납적이고 생생한 학습과정의 산출물을 제공할 필요가 있다. 본 연구는 수학화 과정에서 테크놀로지의 효과에 초점이 맞추어진 연구이므로 수학화를 하지 않고 테크놀로지도 사용하지 않은 반을 비교반으로 분류하였다.

<표 1> 비교반과 실험반의 설정

	테크놀로지 활용(T1)	수학화(T2)
비교반(G1)	×	×
제 1실험반(G2)	O	O
제 2실험반(G3)	×	O

2. 연구대상

본 연구는 안산의 S중학교 3학년을 대상으로 한 반(38명)을 비교반으로, 또 다른 두 반 중에서 한 반(42명)은 제 1 실험반(테크놀로지를 활용한 수학화)을 나머지 한 반(40명)을 제 2 실험반(테크놀로지를 활용하지 않은 수학화)으로 선정하였다. 본 실험학교는 경기도 소재의 공단 지역과 안산 시내의 중간위치에 있으며 부모 대부분 안산 시내에서 근무하며 공단 근로자(약 50%) 상업 및 자유업(30%) 기타 (20%) 업종에 종사한다. 학생들 대부분 대도시 학생들과는 다르게 선행학습을 하는 것은 아니며 한 학급에서 5%~10%정도 학생들만이 학원수업을 통하여 선행학습 경험이 있었다. 그 외의 대부분의 학생들이 학교 수업에 의지를 하고 있으며 약 10%의 학

생들은 학원에 다니며 부족한 학습을 보충하고 있다. 실험에 참가하는 반은 같은 수학교과 담당교사에게 지도받은 학생들을 대상으로 무작위로 비슷한 세 개 반을 선택하여 실험에 가담시켰으며 가장 학업성취도와 사전 수학적 성향이 가장 낮게 나온 반을 테크놀로지+수학화를 위한 제 1 실험반으로 선택하였다. 수업을 담당한 교사와 다른 과목을 담당하는 교사가 공통적으로 느끼는 학급 분위기는 제 1 실험반은 단합이 잘 되고 반 분위기 따듯하며 문과적 기질이 있어서 다른 과목 성적은 좋은 편이나 유난히 과학과 수학 점수가 낮다하였다. 또한 유머 있고, 긍정적이고, 분위기가 좋아 선생님들마다 좋아하는 반이나 항상 수학이 6교시에 들어 있어서인지는 모르나 수학 성적이 항상 안 좋은 것이 안타깝다고 하였다. 또한, 비교반은 반 분위기가 산만하고 이기적인 분위기여서 전반적으로 반 수업분위기가 좋지 않다고 입을 모은다. 그러나 성적에 들어가는 것이나 보상이 있으면 너무나 열심히 하며 경쟁적인 성향이 있다고 하였다. 떠들고 산만하여 선생님들이 분위기가 좋지 않다고는 하나 성적은 좋으며 수업시간에 질문에 대한 대답이 즉각적이고 예리하며 예습이 잘 되어 있는 아이들이 많다고 하였으며 다른 과목 뿐 아니라 수학 성적도 제일 좋았다.

3. 연구 절차

자료수집방법으로는 정량연구방법을 위해서는 전체학생을 대상으로 하여 총 10 차시의 학습내용을 중심으로 사전, 사후 검사지를 활용하여 그 결과를 ANCOVA 통계분석 처리를 하였다. 정성연구의 자료 수집을 위해서 이론적 바탕이 되는 수학화의 과정은 학습내용이 학생들의 각 개인과 통합이 되게 하는 정의적인 측면의 목적성을 고려하여, 학습과정을 개별적으로 면밀히 관찰할 수 있도록 위의 정량연구를 위한 실험반 학생들 중 뚜렷한 양상을 나타내는 두 개 모둠의 학생(모두 8명) 대상으로 조사를 실시하였다. 총 네 대의 비디오 중, 한 대는 전체 학급과 교사를 대상으로 녹화를 하였으며, 두 대는 선택된 두 개 모둠별 학생들을 대상으로, 나머지 한 대는 돌아다니며 특이 사항을 녹화하였다. 녹화된 내용은 당일에 녹취록으로 보존하였으며 녹취록과 학생이 남긴 기록, 관찰자의 기록으로 이들 세 자료 출처를 고려하여 연구 분석이 이루어졌다. 정성연구방법에서 연구 분석 방법으로는 일정비교분석법을 사용하여 서로 다른 모둠별 학생들의 사고(수학화) 발달과정을 일정한 구성요소에 따라 지속적으로 비교해나가 학생들의 사고력 발달과정을 심층적으로 묘사해 나갔다.

<표 2> 사전검사 결과

	중간고사 학업 성취도	수학적 성향 검사
비교반G1	66.58	70.63
제1 실험반G2	66.86	66.17
제2 실험반G3	66.85	71.00

<표 3> 연구 일정

기간	연구 내용
2005/10	문헌 조사 및 교수학적 자료 개발
11	일차 교재(교수학적 자료) 개발
12	자료 수정을 위한 자문회의 1
2006/1	예비연구 실시
2	연구목적에 맞는 검사지 타당도 검사 및 자료구성 적절성 조사
3	예비연구를 바탕으로 한 자문회의 사전검사 실시
4	검사지 수정 보완
5	이차 교재 개발
6	실험연구를 통한 자료수집, 중간학술발표
7	실험연구를 통한 자료수집, 사후 검사 실시
8	연구분석(정량적 데이터)
9	연구분석(정성적 데이터)
10	결과 보고서 작성

4. 검사도구

가. 수학 성취도 검사지

학생의 성취 정도의 효과를 파악하기 위해 사전 검사에서는 학생들의 중간고사 점수를 사용하였고, 사후 검사지로는 본 연구목적에 적절한 10문항의 검사지가 연구자에 의해 예비연구와 본 연구를 수행한 경험을 바탕으로 평가기준과 함께 만들어졌다(부록 1참고). 평가요소로는 수평적 수학화, 수직적 수학화, 응용적 수학화를 포함하였고 각 문항의 배점은 각 1점으로 성취도 검사지에 대한 문항분석은 연구결과의 연구문제 1에서 다룬다.

나. 수학성향 검사지

교육개발원(1992)에서 개발한 수학 성향 검사지와 고상숙(2005)의 연구를 참고하여 마지막 요소인 수학적 심미성 영역이 역시 포함되었다. 사전검사에서 산출된 검사도구의 양호도는 <표 4>와 같다. 이를 바탕으로 사후검사지의 문항을 위해 1) 변별도가 음수인 경우, 2) 내적적합도가 1.2를 초과한 경우, 그리고 3) 신뢰도가 상대적으로 낮은 경우에 해당하는 문항들은 부적절한 것으로 사료되어 각 영역당 한 문항씩(4번, 5번, 12번, 16번, 17번, 22번, 27번) 제외하는 수정이 이루어졌다(부록 2 참고). 특히 문항에서 부정문으로 구성된 문항들은 신뢰도가 상대적으로 낮아 학생들의 응답에 혼돈을 야기하는 것으로 보여 문항으로써 다시 연구되어야 할 필요가 제기되었다.

검사의 신뢰도를 위하여 문항 내적 일관성 신뢰도, Cronbach α가 구해졌는데 이는 1에 가까울 수록 높은 신뢰도를 의미하므로 0.911로써 높게 나타나고 있다.

<표 4> 검사도구의 양호도 분석(Pre-MDT)

문항		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
신뢰도		.904	.904	.904	.904	.916	.912	.910	.907	.906	.907
내적적합도	Infit	.71	.76	.77	.68	1.45	1.22	1.11	1.04	1.10	1.09
	Outfit	.70	.74	.76	.66	1.83	1.48	1.48	1.45	.95	1.02
난이도		-.06	-.16	-.08	.03	-.63	.24	.69	.40	.48	.15
변별도		.745	.740	.744	.728	-.033	.276	.367	.582	.625	.588
문항		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
신뢰도		.905	.908	.906	.905	.904	.910	.921	.907	.905	.910
내적적합도	Infit	.82	.76	.94	.69	.84	1.48	2.20	1.00	.72	1.06
	Outfit	.80	.81	.90	.65	.86	1.48	3.02	1.01	.76	1.08
난이도		-.47	-.50	-.05	.27	-.47	-.55	-.81	-.49	-.49	-.61
변별도		.683	.546	.648	.690	.738	.460	-.218	.594	.684	.422
문항		21	22	23	24	25	26	27	28	총합	
신뢰도		.908	.907	.906	.909	.906	.908	.908	.908	.911	
내적적합도	Infit	1.22	.72	1.11	1.03	.73	1.12	1.14	.94	1.02	
	Outfit	1.18	.62	1.08	1.05	.70	1.09	1.27	1.03	1.07	
난이도		.34	1.22	-.46	-.17	.55	.68	.34	.62	.00	
변별도		.510	.635	.625	.499	.667	.495	.517	.511	1.00	

검사 문항에 대한 내적 타당도는 문항 반응 이론 중 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 모수치를 측정하고 문항 분석을 하도록 하는 컴퓨터 프로그램인 BIGSTEPS를 사용하여 문항들의 적합도 지수를 산출하였다. 사용된 분석 모형은 부분점수(Partial Credit) 모형이다. Infit과 Outfit 지수가 1.2보다 모두 작으면 분석모형에 적합한 문항이라고 볼 수 있다. 적합도 지수가 1.2를 벗어나는 5번, 12번, 16번 17번, 27번 문항은 수정대상이 되었다.

문항 난이도는 문항의 어렵고 쉬운 정도를 나타내는 것으로서 본 연구에서는 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 계산하였다. 문항 난이도가 0.0인 것은 문항들 중에서 평균정도라는 것을 의미하며 양수(+)값을 가질수록 어려운 문항이다. 본 검사에서는 로짓트 점수로 난이도가 문항 22번은 1.22로 수정의 대상이 되었다.

다. 변별도

문항의 변별도는 점이연상관(point-biserial correlation)에 의하여 분석하였다. 점이연상관은 해당 문항 점수와 총점과의 상관으로서 유수(-)값을 나타내는 문항은 능력이 높은 피험자와 낮은 피험자를 제대로 변별하지 못하는 문항이라 할 수 있다. 점이연상이 음수로 산출된 문항들의 경우는 대부분 그 동안의 지식을 바탕으로 쉽게 점수를 받을 수 있는 문항이기 때문에 문항을 변별해 주기에는 부적절함을 나타내는데 문항 5번, 17번은 수정의 대상이 되었다.

5. 예비연구

현재 중학교 3학년 학생들이 갖고 있는 함수의 개념의 특성을 파악하여 연구목적에 맞는 본 연구의 지도안 구성을 위해 예비 검사지를 바탕으로 인터뷰를 통해 본 연구를 위한 예비 연구가 실시되었다. 예비 인터뷰 대상 학생들은 동일교의 학생들이지만 본 연구에 참여하지 않은 학생들로 각반에서 3명씩 구성하여 4개의 그룹을 실시하였다. 이때 구성원의 성적분포는 대략 상위 10% 학생 2명과 상위50%학생 중에서 2명으로 구성하였다. 성적이 너무 하위인 학생들은 전반적인 학력부진으로 인하여 예비연구에서 학생들이 함수에 대한 함수자체의 오류를 파악하기 어려울 수도 있다는 판단에서였다. 함수

에 대한 학생들의 이해도가 다음과 같은 유형을 갖는다는 것을 재확인하고 그 외의 더 필요한 부분을 추출하여 연구의 수업지도안의 부족한 부분이 보완되었다.

가설 1: 두 수량 사이의 연결만을 찾는다.
가설 2: 두 수량 사이의 상관관계를 알아보려 한다.
가설 3: 변량사이의 상관관계 중 비례나 반비례의 관계만을 함수로 생각한다.
가설 4: x값에 y값 하나를 집합적 개념의 '대응'이라기보다는 한 수량의 다른 수량의 '지정'으로 종속적인 개념이 포함된 것으로 인지한다.
가설 5: 일차함수식만을 함수로 제한한다.
가설 6: x 값에 하나의 y값의 일가성을 인지한다.

가. 예비연구지도안

예비 검사에서는 19문항을 중심으로 인터뷰 형식으로 이루어졌으며 이들 문항은 함수의 그래프, 표, 방정식으로의 표현과 전환을 시도하는 다중-표현(multi-representation) 함수와 더불어 함수의 양적(quantitative)·현상적(phenomenological) 의미를 내포하는 문제들로 구성되었다. 함수가 되는 총 19개의 문항 중에서(18번의 4개의 예시 중 한 개의 식만 함수가 아님), 4개는 이차함수의 문제로 학생들이 갖고 있는 이차함수의 지식, 개념, 통찰을 알고자 하였으며 그 외의 문항들은 1, 2학년 때 배운 내용들로 표 자료로 주어진 규칙으로써의 함수, 대응으로써의 함수, 그래프, 비례, 반비례로서의 함수 등의 내용들을 포함하였다. 예비 연구는 학생들의 함수개념에 대한 선 개념의 특성과 양상을 조사하여 본 연구를 위한 학습자료 구성에 활용하기 위한 것이므로 질적 연구를 통한 구체적인 사례를 찾아 조사하여 그 목적을 달성하고자 실시하였다.

나. 예비검사 분석

예비 인터뷰 프로토콜

(1) 질문: 이것은 함수인가?

(가) 함수라고 대답한 경우: 함수라고 생각하는 이유는?
- 함수의 정의가 무엇이라고 생각하는가?
- 함수식으로는 표시 가능한가?
- 변수는 어떤 것들인가?
- 두 변수간의 관계를 표현하면?
- 어떤 관계라고 생각하는가?
- 어떤 규칙이 있다고 생각하는가?

(나) 함수가 아니라고 대답한 경우: 함수가 아니라고 생각하는 이유는?
- 함수가 안 돼는 이유는?
- 함수가 무엇이라 생각하는가?
- 어떠한 규칙도 없다고 생각하는 이유는?
- 어떤 규칙이 있어야 함수가 되는가?

(2) 예비인터뷰 분석 예시

(가) 두 학생, A, B의 프로토콜 분석

<표 5> 예비검사에서 나타난 학생들의 함수개념 예시 1
[A; 여학생(성적: 상위10%), B: 남학생(성적: 상위10%)]

	함수이다	함수가 아니다
1	A: x의 10배 값이 y이므로 B: x에 값에 y의 값이 정해지므로	
2	A: x의 값이 정해지면 y의 값이 정해지므로 B: x에 값에 y의 값이 정해지므로	
3	A, B: 함수의 정의다	
4	A: 시간과 경사면이 비례하므로 B: 시간과 경사면이 반비례관계이므로	
5	B: 속력-거리/시간의 관계가 주어진 식이므로(속도가 빨라지면 시간이 짧아지므로)	A: 시간이 증가할 때 거리가 일정하게 늘어나는 것이 아니므로(일정하게 늘어나야 함수이다)
6	A: x가 1씩 증가할 때 y는 배수씩 커지므로	B: 일정한 관계가 성립하지 않으므로(함수식으로 표현할 수 없어서)
7		A: 어떤 규칙도 찾을 수 없으므로 (비례든 반비례든 되어야 하는데 어느 것도 해당되지 않는다)
8	A, B: 비례이므로	
9	A: 높이가 높으면 시간이 많이 걸리므로 어떤 관계가 성립한다	B: 높이가 높으면 시간이 많이 걸리나 가속도이므로 어떤 관계가 성립하지 않는다.
10	A, B: 일정한 관계(반비례)가 성립하므로	
11	A,B: 첫 번째는 x하나에 y하나가 나오므로	A: x값에 y값이 일정하게 대응되지 않는다. B: 두 번째 것은 함수식이 성립하지 않으며 x하나에 y하나가 다르게 나오므로

	함수이다	함수가 아니다
12	A: x에 어떤 값을 대입하더라도 일정하게 커지므로	B: 너무 복잡한 식(수)이 주어졌으므로
13	A, B: x가 1씩 커지면 y는 3의 배수로 커지므로	
14	A, B: x값에 수를 넣으면 y값이 하나씩 나오므로	
15	B: x가 3이면 y축에 평행한 직선이므로 책에서 본 듯하다	A: y값이 없으므로 함수가 되지 않는다.
16	A; 대입해보면 하나가 커지면 나머지 하나도 커지므로 B: 증가하는 비례그래프가 나오므로 (x가 양수일 경우에만)	
18	A: y-3x B: y-4x	

(나) 두 학생 C, D의 프로토콜 분석

<표 6> 예비검사에서 나타난 학생들의 함수개념 예시 2
[C; 여학생(성적:상위10%), D:남학생(성적:상위)10%)]

	함수이다	함수가 아니다
1	C: 대입하면 나오는 공식이므로 D: x에 대입하면 y의 값이 나오므로	
2	C: 대입하면 성립하므로 D: 식에 x를 대입하면 y의 값이 나오므로	
3	D:하나의 값에 하나씩 대응되므로	A:x값에 y값 하나만 대응되므로
4	D: 시간과 경사변이 비례하므로	
5	C:반비례이므로 D:비례이므로	
6	C:3배씩 증가하므로	A:식이 성립하지 않으므로(정확한 값이 나오지 않는다)
7	C:함수식이 나오므로 D:$y-\frac{6}{x}$ 의 함수식이 나오므로	
8	C, D: 비례하면서 증가하므로	
9		A: 비례도 반비례도 아니므로.
10	D:초가 타는 시간과 초의 길이 사이에 반비례 식이 나오므로	A:초가 타는 정확히 타는게 아니므로 어떤 식도 나오지 않을 것 같다(예외가 많을 것 같아서)
11	C:그래프 상에 나타낼 수 있고, 식을 쓸 수 있고, 대입하면 값이 나오므로 D: x값이 정해짐에 따라 y값도 정해지므로	
12	C: x-ay+b의 식처럼 문제의 식에 h와 t를 x,y로 대체하면 함수식이 되므로 D:주어진 문제의 식을y-ax+b로 바꿔 생각해보면 x값에 대입하면 y값이 나오므로	
13		
14	D:x값에 대입하면 y값이 나오므로	C:x와 y의 지수가 다르므로
15	C:그래프 상에 그릴 수 있으므로	D: x값만 있으므로 함수가 되지 않는다.
16		C:x와 y의 지수가 다르므로
17	C,D:그래프 상에 그릴 수 있으므로	
18	C: y=2x, x=3y-3	D:수돗물이 몇 분 동안 어떤 용기를 채우는 것

C는 함수식에 보다 강하게 집착하였다. 눈에 익숙한 함수식이 나오지 않으면 함수로 여기기 않는 경향이 강하다. 반면 D는 처음에는 대응 관계로 변수들을 찾다가 점차 C의 영향을 받아서 함수식에 집착을 보이기도 하였으나 좀 더 폭넓은 의미로서의 함수를 인식하고 있었으며 그래프 개념을 보다 정확하게 인식하고 있었다. 또한 C는 함수식 면에서도 동형이어야만 함수식이 성립하며 일차함수 이외의 함수에 대한 확장이 이루어지지 않았다. D는 비례, 반비례로서의 함수를 인식하고 있었다. 전반적으로 학생 C는 함수식으로 함수를 판단하였으며 학생 D는 '하나에 하나가 대응 될 수 있는가'에 따라 함수를 판단하였다. 마지막 문항에서도 파악할 수 있듯이 C는 함수에 대한 진술에서 역시 익숙한 일차함수 식만을 거론하였으나 학생 D는 실세계의 변화 현상으로 진술한 것으로 미루어 보아 함수를 현상의 변화로의 인식으로 형성이 되었음을 알 수 있었다. 위의 예비연구를 바탕으로 본 연구를 위한 10차시 학습자료를 구성하였다.

6. 자료분석

양적 자료분석은 윈도우즈용 통계 프로그램 SPSS/PC 10.0K을 통하여 처리되었다. 사전성취도(Pre-MAT)와 사후성취도(Post MAT)로부터 수집된 자료는 함수를 이해하기 위한 수학화 학습에서 테크놀로지의 효과를 발견하기 위하여 공분산 분석(ANCOVA)에 의해 분석하였다.

임종원 (1996)은 공분산분석은 종속변인에 영향을 주

는 실험처치 변인 이외의 외생변수를 제거함으로써 오차 변량을 줄여 검증의 정확도를 높여줄 수 있을 뿐만 아니라 사전에 외생변수의 영향이 실험단위에 무작위로 할당되지 못해 발생되는 실험처치 단위간의 실험전 차이를 없애줄 수 있다고 주장한 바 신뢰도가 가장 높은 분석방법 중 하나이다.

본 연구 분석에서 사전검사(Pre-MAT)가 공변량으로 사용되었는데 이는 실험설계에서 변인을 줄이는 역할을 하여 성취도에 대한 정확도를 기하기 위함이다. 수학적 성향(MDT) 역시 자료를 분석하기 위하여 수학적 성향의 7개 영역으로 구성된 학생의 수학적 정의적 영역의 변화를 파악하기 위하여 공변량 분석(ANCOVA)를 구하였다. 이 역시 공변량으로는 역시 사전검사(Pre-MDT)를 취해서 사후검사에서 변인을 제거함으로 변별력을 높이고자 하였다.

IV. 연구결과

1. 수학화 이론에 따른 교수 학습양상에서 테크놀로지의 효과

가. 검사지의 신뢰도, 적합도, 난이도, 변별도

본 연구에서 수학 성취도와 수학적 성향 검사의 문항 내적 문항의 양호도 분석 중 문항 내적 일관성 신뢰도와 변별도를 구하기 위하여 SPSS 12.0를 사용하여 Cronbach α를 구하였고, 내적 타당도와 난이도를 구하기 위하여 문항 반응 이론 중 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 BIGSTEPS(Livacre & Wright, 1994, 2003)를 사용하여 분석하였다. 검사 도구의 양호도는 <표 7 & 8>과 같다.

1) 수학성취도 검사

가) 문항 내적 일관성 신뢰도

검사의 신뢰도를 위하여 문항 내적 일관성 신뢰도인 Cronbach α를 구하였다. 문항 10개에 대한 신뢰도 계수는 0.784로 높게 나타나고 있다. 문항 신뢰도 지수가 모두 0.729보다 높은 것으로 나타나 사용된 문항들은 서로 잘 분리되어 문제를 추정하고 변별하는데 무리가 없다고 볼 수 있다.

나) 문항 적합도 지수로 본 내적 타당도

검사 문항에 대한 내적 타당도는 문항 반응 이론 중 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 모수치를 측정하고 문항 분석을 하도록 하는 컴퓨터 프로그램인 BIGSTEPS를 사용하여 문항들의 적합도 지수를 산출하였다. 사용된 분석 모형은 부분점수(Partial Credit) 모형이다. Infit과 Outfit 지수가 1.2보다 모두 작으면 분석모형에 적합한 문항이라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 문제에서는 문항 1과 문항 10번을 제외하고는 Infit과 Outfit 지수가 1.2보다 모두 작으므로 분석모형에 적합한 문항이라고 볼 수 있다. 따라서 1과 10번 문항은 후속연구에선 수정이 요구된다.

다) 난이도

문항 난이도는 문항의 어렵고 쉬운 정도를 나타내는 것으로서 본 연구에서는 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 계산하였다. 문항 난이도가 0.0인 것은 문항들 중에서 평균정도라는 것을 의미하며 양수(+)값을 가질수록 어려운 문항이다. 본 검사에서는 로짓트 점수로 본 난이도가 3번 문항을 제외하고 0.74을 넘는 문항은 없었다. 난이도 척도상에 각 문항의 난이도를 나열해 보았을 때, 문항간의 난이도의 차이는 로짓트 점수가 0.74를 넘지 않은 범위에서 골고루 분포되어 있고, 1번 문항이 가장 쉬운 문항이고, 3번 문항은 가장 어려운 문항으로 이들에 대한 더 많은 연구가 필요하다.

라) 변별도

문항의 변별도는 점이연상관(point-biserial correlation)에 의하여 분석하였다. 점이연상관은 해당 문항 점수와 총점과의 상관으로서 유수(-)값을 나타내는 문항은 능력이 높은 피험자와 낮은 피험자를 제대로 변별하지 못하는 문항이라 할 수 있다. 점이연상이 음수로 산출된 문항들의 경우는 대부분 그 동안의 지식을 바탕으로 쉽게 점수를 받을 수 있는 문항이기 때문에 문항을 변별해 주기에는 부적절함을 나타내는데 본 연구의 검사지 MAT 에선 음수로 산출된 문항이 없어 모든 문항이 능력을 변별해 줄 수 있을 것으로 보인다.

2) 수학적 성향 검사

사전검사를 통해 각 영역당 한 문항씩을 제외시켜 검사지의 전반적인 신뢰도 및 타당도를 향상시키려 하였다. 수학적 성향의 7개 영역에서의 문항분석은 <표 8>과 같다.

<표 7> 검사도구의 양호도 분석(Post-MAT)

문항		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	총합
신뢰도		.774	.762	.776	.729	.755	.765	.765	.781	.776	.758	.784
내적적합도	Infit	2.41	.98	.57	1.18	.84	.52	.81	.87	.83	1.32	1.03
	Outfit	2.58	1.02	.44	.58	.31	.55	.80	.41	1.13	1.25	.92
난이도		-1.63	-.65	1.96	.43	.32	-.56	-.81	.74	.19	.02	.00
변별도		.500	.616	.466	.792	.656	.621	.594	.425	.473	.844	1.00

<표 8>사후검사도구의 양호도 분석(Post-MDT)

문항		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
신뢰도		.932	.932	.932	.935	.933	.931	.932	.930	.932	.931	.930
내적적합도	Infit	.84	.92	.88	1.13	.87	.87	1.09	.72	1.04	.87	.63
	Outfit	.86	.86	.82	1.19	.87	.77	.99	.65	1.04	.84	.80
난이도		.08	.03	.05	-.10	.48	.26	.40	.13	-.51	-.18	.28
변별도		.71	.72	.72	.53	.65	.75	.73	.80	.70	.77	.81
문항		12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	총합
신뢰도		.930	.937	.935	.936	.934	.933	.936	.933	.934	.933	.936
내적적합도	Infit	.76	1.51	1.08	1.38	1.17	1.01	1.39	1.06	1.12	1.10	1.02
	Outfit	.72	1.64	1.58	1.65	1.15	1.02	1.60	.96	1.00	.95	1.05
난이도		-.33	-.61	-.61	-.81	.47	-.24	-.32	.54	.59	.41	.00
변별도		.81	.43	.55	.51	.57	.68	.52	.65	.61	.66	1.00

가) 문항 내적 일관성 신뢰도

검사의 신뢰도를 위하여 문항 내적 일관성 신뢰도인 Cronbach α를 구하였다. 7개 영역에 대한 신뢰도 계수는 모두 0.930이상의 신뢰도를 나타내고 있다. 전체 평균치는 0.936으로 사전검사의 .911보단 향상된 평균값을 나타낸다.

나) 문항 적합도 지수로 본 내적 타당도

검사 문항에 대한 내적 타당도는 문항 반응 이론 중 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 모수치를 측정하고 문항 분석을 하도록 하는 컴퓨터 프로그램인 BIGSTEPS를 사용하여 문항들의 적합도 지수를 산출하였다. 사용된 분석 모형은 부분점수(Partial Credit) 모형이다. Infit과 Outfit 지수가 1.2보다 모두 작으면 분석모형에 적합한 문항이라고 볼 수 있다. 본 연구에서는 문제에서는 문항 13, 15, 18 문항을 제외하고는 Infit과 Outfit 지수가 1.2보다 모두 작아 분석모형에 적합한 문항이라고 볼 수 있다. 따라서 이는 사전검사보다 향상된 결과로써 이들 열거된 세 문항에 대해선 후속연구에서 재연구가 요구된다.

다) 난이도

문항 난이도는 문항의 어렵고 쉬운 정도를 나타내는 것으로서 본 연구에서는 Rasch의 1-모수 문항 반응 모형에 근거하여 계산하였다. 문항 난이도가 0.0인 것은 문항들 중에서 평균정도라는 것을 의미하며 양수(+)값을 가질수록 어려운 문항이다. 난이도 척도상에 각 문항의 난이도를 나열해 보았을 때, 문항간의 난이도의 차이는 로짓트 점수가 0.59를 넘지 않은 범위에서 골고루 분포되어 있고, 15번 문항이 가장 쉬운 문항으로 분류되었다.

라) 변별도

문항의 변별도는 점이연상관(point-biserial correlation)에 의하여 분석하였다. 점이연상관은 해당 문항 점수와 총점과의 상관으로서 유수(-)값을 나타내는 문항은 능력이 높은 피험자와 낮은 피험자를 제대로 변별하지 못하는 문항이라 할 수 있다. 점이연상이 음수로 산출된 문항들의 경우는 대부분 그 동안의 지식을 바탕으로 쉽게 점수를 받을 수 있는 문항이기 때문에 문항을 변별해 주기에는 부적절함을 나타내는데 본 연구의 사후 수학적 성향검사에선 음수로 산출된 문항이 없어 모든 문항이 능력을 변별해 줄 수 있는 것으로 나타났다.

나. 테크놀로지 학습 환경에서 학생의 성취도

실험을 실시한 후 학생들의 성취도의 향상도를 분석하기위해 조사한 표들은 아래와 같다. 사전검사에서 동질집단으로 거의 차이가 없었던 세 집단은 <표 9>에서 전체학생에서 실험반(G2)의 평균이 다른 실험반(G3)와 비교반(G1)보다 매우 높음을 나타내는 것으로 보아 학생 성취도에서 테크놀로지를 활용한 수학화를 실시한 학급이 비교반의 것보다 매우 향상되었음을 알 수 있다.

수학화 과정에서 테크놀로지를 활용한 학생들의 수학 성취도의 변화를 신뢰도 있는 분석을 통해 조사해보기 위해 사전검사(중간고사)를 공변량으로 취한 ANCOVA 분석을 한 결과는 <표 10>과 같다. 실험처치에 의한 학생들의 성적은 매우 유의한 수준($p=0.000000263$)으로 향상되었음을 나타낸다. 이는 실험의 기간이 2개월 남짓한 짧은 기간이었음에도 불구하고 실험의 효과가 매우 컸음을 뜻한다. 각 연구대상반간의 차이점을 좀더 자세히 관찰하기 위해 유의수준 0.05에서 실험반과 비교반의 순서쌍 (G1, G2), (G2, G3), 그리고 (G1, G3)의 비교하면 (G1, G2)와 (G2, G3)은 매우 효과가 컸음을 뜻한 반면, (G1, G3)의 확률 p값이 유의하나 집단간의 변화에 비해

효과가 크지않음을 나타낸다. 즉, 수학화만을 실시한 학급과 수학화+테크놀로지를 실시한 학급간에는 유의한 향상(p=0.006182559) 또한, 수학화+테크놀로지를 실시한 학급과 전통적 학습을 실시한 학급간에는 유의한 향상(p=0.000000284)을 보이는 반면에 수학화만 실시한 학급(G1)과 전통적 수업을 실시한 학급간에는 확률값(p=0.036938033)는 0.05 유의 수준을 약간 밑도는 수준으로 유의함을 나타내지만 앞선 두 쌍의 비교에서의 확실한 큰 변화보다는 두드러지지 않음을 알 수 있다. 따라서 앞의 두 쌍의 유의한 향상은 테크놀로지의 효과라고 할 수 있음을 의미한다. 특히 수학화+테크놀로지를 실시한 학급과 전통적 학습을 실시한 학급간에는 유의한 향상 정도가 월등히 큰 것으로 보아 테크놀로지 환경에서의 수학화가 더욱 효과가 있었음을 확신할 수 있다.

<표 9> 사후성적 평균과 표준편차

Descriptive Statistics Dependent Variable: 사후성적총점			
집단	Mean	Std. Deviation	N
G1	22.89473684	14.69839019	38
G2	49.04761905	20.886397	42
G3	33.775	25.15642091	40
Total	35.675	23.2672318	120

<표 10> 사후성적의 ANCOVA

Tests of Between-Subjects Effects Dependent Variable: 사후성적								
Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.	Partial Eta Squared	Noncent. Parameter	Observed Power(a)
사전성적	4333.57042	1	4333.57042	10.87449723	0.001294622	0.085710663	10.87449723	0.904946782
실험처치	13801.20289	2	6900.601443	17.31610751	2.6262E-07	0.229912406	34.63221502	0.999759283
Error	46226.88829	116	398.5076577					
Corrected Total	64422.325	119						
a Computed using alpha = .05 b R Squared = .282 (Adjusted R Squared = .264)								

<표 11> 사후성적의 집단간 비교

Pairwise Comparisons Dependent Variable: 사후성적						
(I) 실험처치	(J) 실험처치	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.(a)	95% Confidence Interval for Difference(a)	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	-24.66396443	4.323125239	2.8415E-07	-35.1697723	-14.15815655
	3	-11.13410974	4.376777438	0.036938033	-21.77030007	-0.49791941
2	1	24.66396443	4.323125239	2.8415E-07	14.15815655	35.1697723
	3	13.52985469	4.289188502	0.006182559	3.106517902	23.95319147
3	1	11.13410974	4.376777438	0.036938033	0.49791941	21.77030007
	2	-13.52985469	4.289188502	0.006182559	-23.95319147	-3.106517902
Based on estimated marginal means * The mean difference is significant at the .05 level. a Adjustment for multiple comparisons: Bonferroni.						

다. 테크놀로지 학습 환경에서 학생의 수학적 성향

사전검사를 통해 수학적 성향에 대한 검사지의 문항 분석의 결과는 몇 개의 문항이 연구에 적합하지 않음이 드러났다. 따라서 검사지의 문항은 1) 변별도가 음수인 경우, 2) 내적적합도가 1.2를 초과한 경우, 그리고 3) 신뢰도가 상대적으로 낮은 경우에 해당하는 문항들을 각 영역당 한 문항씩 사후검사를 위해 제외되었다.

실험을 실시한 후 사후성향 검사를 통해 얻어진 자료에서 95%의 신뢰구간을 벗어나는 극단치(outlier)를 나타내는 학생 1명씩을 비교반과 제 2실험반에서 제외되었다. 수학적 성향의 향상도를 분석하기위해 조사한 표들은 아래와 같다. <표 12~14>는 이들 변화에 대한 더욱 신뢰도 높은 분석을 위해 사전성향검사를 공변량으로 취한 ANCOVA 분석을 한 결과를 나타낸다. ANCOVA 분석의 장점은 실험 전의 집단의 이질적 요인을 공변량을 통해 제거해주는 방법으로 그 결과는 가장 신뢰도가 높다는 점이다. 본 연구에서 전체적으로 실험처치에 의한 학생들의 성향은 유의수준 0.05에서 매우 유의하게 변화되었음을 나타낸다(p=0.000056206). 그러한 변화의 각 연구

대상 학급간의 차이점을 좀더 자세히 관찰하기 위해 각 그룹간의 비교를 나타내는 <표 14>를 유의수준 0.05에서 조사하면 그 결과는 일관성을 벗어나고 있어 세심한 분석이 필요하다. 표면상 (G1, G2), (G2, G3), 그리고 (G1, G3)의 비교에서 (G2, G3)와 (G1, G3)은 매우 효과가 컸음을 뜻한 반면, (G1, G2)의 확률값(p=0.087696622)이 다른 학급의 변화에 비해 유의하지 않음을 나타낸다. 좀 더 자세히 보면 집단의 평균치와 같이 이들 유의한 확률값을 비교해보면 수학화만을 실시한 학급과 수학화+테크놀로지를 실시한 학급간에는 유의한 향상(p=0.004015336)을 나타낸다. 그런데 수학화만을 실시한 학급과 전통적 학습을 실시한 학급간에는 유의한 향상(p=0.000013137)을 보임에도 이는 전통적 학습이 매우 우세한 평균치에 기인한 것이며, 수학화+테크놀로지를 실시한 학급(G2)과 전통적 수업을 실시한 학급(G1)간에는 큰 효과가 없는 것으로 나타나고 있지만 이는 G2가 앞의 (G1, G3)비교에서 유의함을 나타낸 G3보다 우세하기 때문이므로 결과분석에 대해 세심한 주의를 요한다. 이것은 비교반(G1) 집단에서 실험 외적인 어떤 요인, 제어하기 힘든 학급의 고유한 특징이 수학적 성향의 측정을 방해한 것으로 추정된다. 앞의 연구대상의 기술에서 '*성적에 들어가는 것이나 보상이 있으면 너무나 열심히 하며 경쟁적인 성향이 있다*'는 특징이 공분산분석을 했음에도 비교반의 사후측정에 매우 크게 작용했을 가능성이 짙다. 따라서 비교반과의 다른 집단간의 비교는 그 의미를 상실한다. 결과적으로 오직 (G2, G3)의 비교만이 의미가 있으며 0.05의 유의수준에서 그들의 유의한 향상은 우위의 평균치를 지닌 집단 G2에 설득력있는 결과를 반영한다. 즉, 수학화를 위한 학습에서 테크놀로지의 활용이 향상된 수학적 성향을 가져왔다고 결론을 내릴 수 있다.

<표 12> 사후성향의 평균과 표준편차

Descriptive Statistics Dependent Variable: 성향사후총점			
집단	Mean	Std. Deviation	N
G1	56.91891892	12.25057454	37
G2	50.04761905	12.4859968	42
G3	44.43589744	17.83962897	39
Total	50.34745763	15.14961122	118

<표 13> 사후성향 ANCOVA

Tests of Between-Subjects Effects Dependent Variable: 성향사후총점					
Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
성향사전총점	9312.960058	1	9312.960058	72.84090806	6.93555E-14
집단	2730.141046	2	1365.070523	10.67683914	5.6206E-05
Error	14575.2912	114	127.8534316		
Corrected Total	26852.75424	117			
a R Squared = .457 (Adjusted R Squared = .443)					

<표 14> 사후성향 집단비교(Pairwise Comparisons)

Dependent Variable: 성향사후총점						
(I) 집단	(J) 집단	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.(a)	95% Confidence Interval for Difference(a)	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	4.419121921	2.565575894	0.087696622	-0.663264165	9.501508007
	3	11.82891101	2.596086511	1.3137E-05	6.68608363	16.9717384
2	1	-4.419121921	2.565575894	0.087696622	-9.501508007	0.663264165
	3	7.409789093	2.523253353	0.004015336	2.411243635	12.40833455
3	1	-11.82891101	2.596086511	1.3137E-05	-16.9717384	-6.68608363
	2	-7.409789093	2.523253353	0.004015336	-12.40833455	-2.411243635
Based on estimated marginal means * The mean difference is significant at the .05 level. a Adjustment for multiple comparisons: Least Significant Difference (equivalent to no adjustments).						

위의 결과를 바탕으로 수학적 성향이란 것은 비교적 안정적인 인지적 성적성취도에 비해 그 특성상 학습외적인 여러 요인이 작용하기 쉽고 그 변화가 매우 유동적이며 또한 각 구성요소의 5선다형의 양적 측정이 완전하지 않음을 나타낸다. 더구나, 수학은 까다롭고 어렵다는 인식이 두드러진 학교수학에서 수학적 성향을 단 기간에 안정적인 긍정적 측면으로 변화시키기는 그리 쉽지 않음

을 나타낸다. 따라서 수학적 성향의 변화를 위해 더욱 체계적인 연구가 뒤따라야함을 제시한다고 볼 수 있다.

2. 학생의 수학화 과정에서 테크놀로지의 역할

1) 함수개념의 대안적 접근

Tall(1986)은 함수 교육의 비중을 변수의 역동적 변화에 두어야 한다고 보았고, 그것은 그래프를 통하여 이룰 수 있다고 하였다. 그래프의 역할을 독립 변수(y나 f(x))가 종속 변수(x)의 변화에 따라 어떤 변화를 갖는가를 변화율과 같은 특성을 관찰할 수 있는 중요한 함수교육의 도구로 생각하였다. 형식적 함수의 형태를 제공하고 이에 대한 알고리즘화된 문제들을 다루는 것 보다 더 중요한 함수 교육은 어떤 변화율을 직관적으로 느끼게 하고 그래프의 특성을 유도하고 이에 내포된 의미들을 탐구하는 것이라 하였다(Gravemeijer & Doorman 1999). 따라서 이차함수를 학습하는 데 있어서, 이차함수의 완성된 형태를 제공하고 이를 그래프로 표현하여 그 형태를 학습하는 것 못지 않게, 학생들이 이차함수의 변수들이 어떠한 변화율을 갖게 되며 이를 그래프로 구현할 때는 어떠한 특징들이 있는지 탐구하는 것은 중요한 일이라 하겠다.

본 연구에 참여한 학생들은 1, 2학년 때 전통적인 학교 함수 수업을 통하여 일차함수와 그 그래프를 학습한 바 있다. 따라서 예비 인터뷰에서나 수업 초기에 학생들에게 질문을 하였을 때에도, 학생들은 함수를 비례, 정비례 관계로만 인식하고 있었으며, 그래프 상황으로 주어진 것에 대해서는 함수임을 인식하지 못하는 경우가 많았다. 또한 함수의 개념을 $y = ax$ 형태로 쉽게 만들 수 있는 경우로 인식하고 있었음을 쉽게 볼 수 있었다. 그러나 제 2차시의 수업 마지막 단계에 이르러 이차함수에 관한 특성을 구술해 보도록 하였을 때, 이차함수의 형식을 말하기 보다는 변수들 간의 변화량을 구술 가능한 것을 볼 수 있었다. 이러한 현상은 테크놀로지를 활용하여 두 변량 간의 변화를 다양하게 확인하며 수평적 수학화를 진행하였던 학생들은 이차함수를 '변화량의 폭이 점점 커지며 특히 각 단계의 제곱 값으로 변화되는 것'으로 인식하였다.

[발췌문 1]

학생 2: 어떻게 확인하지?
(테이블 기능으로 더 많은 데이터들을 확인한다)
학생 1: 글쎄...뭐라고 말을 해야 하지?
학생 2: 제곱.
학생 4: 여기 3개 커지지..여기 5개 커지지... 7개 커지지...9개 커지지...홀수개로 가고 있는 거야.
학생 3: 아니, 2씩 차이 나는데?
학생 2: 뭔 소리야?
학생 4: -두개 두개씩 커지고 있어.
학생 5: 그래..그러니까..그러면...여기는 13이겠네...15겠네...17이겠네...
학생 2: 그럼 홀수만큼 커진다?
…
학생 1: 이거 봐 엄청 커진다!
학생 2: 그냥 제곱 아냐?
학생 4: 두 배로 커지다가 점 점 더 차이가 나…
…
교사 : 자, 그럼 어떤 특징이 있는지 말해볼래요?
학생 2: 이쪽(x축)에 있는 게요 1, 2, 3,4 이렇게 커지면요 이쪽(y축을 가르킴)에 있는 것이 1, 4, 9, 16.이렇게 커지는 데요, 커지는 속도가 되게 커요.
학생 4: x가 10이면 y가 100이 되네요? 엄청 빨리 커진다. 일차함수와는 쨉이(비교가) 안되네요.
학생 3: 그럼 바로 무한대로 가는 거야?
학생 2: 제곱이라니깐!

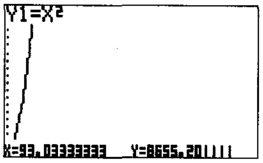
(실험반, 제 2차시 2006.06.19.)

또한, 학생들은 기호화시키는 데에만 치중하는 모습을 보인 것이 아니라 계산기를 활용하여 주어진 현상을 해석할 수 있는 풍부한 데이터를 적절히 창출함으로써 그 자체상황으로 인식하는 모습을 보였으며 때로는 극한의 개념까지 확장되기도 하였다. 예를 들어, 3차시에 데이터를 입력하여 '끝없이 커진다' 혹은 '너무 커진다' 는 말로 무한의 개념을 체험한 학생들은 또다시 제 5차시에 무한에 대한 논의가 등장하기도 하였다. 이는 교사나 연구자가 의도한 바가 아니어서 무한에 대한 논의를 깊게 관찰하지는 못하였으나 학생들 스스로 무한의 개념을 논의한 것으로 보인다. 또한 어떠한 함수식이 맞는가를 확인하기 위하여 수를 넣어서 확인하는 방법을 취하였는데, 이것은 학생들 자신이 세운 가설이 참임을 정당화시키기 위한 방법의 일환으로 사용한 것이라고 할 수 있다.

[발췌문 2]

학생 3: a는 1이지?
학생 2: 응

학생 1: 그러면...a에다가 1을 대입해. x값이 -4잖아.-4를 대입하는 거야. -4의 제곱은 16이지...그러면 16이지.
학생 3: 그렇군!
학생 1: 그리고 -3을 넣으면 -3의 제곱이니까 y=9, -2도 제곱하면 4..-1은 제곱해도 1,0도 제곱해도 0, 여기서 문제는 1의 제곱에다가 곱하기 1이니까..1이고, 2의 제곱은 4, 3의 제곱 9, 4의 제곱 16
학생 3: 아...
학생 2: 여기가 0…, 점점 넓어지네.
학생 1: 아니 이거는 밑으로 가야지. 여기서 올라와야지. 이게 0이잖아...여기가 -1이잖아...여기가 1이잖아. 이거 봐(자신의 계산기를 보여줌)
…
학생 3: 됐어. 맞아.(계산기로 그래프 그린거 보여주면서..)
학생 4: 무슨 소리야?
학생 3: x잖아..제곱이잖아..(계산기로 그리는 방법 설명하면서) 난 이걸 넣어 봤거든(자신이 입력한 데이터를 보여줌) 근데 이게 이렇게 나왔잖아. 결국 수정이랑(수정이가 그린 그래프와 결과) 같아.
…
학생 2: 이거 봐라. 이거 계속 가면 어떻게 돼?(trace 기능을 계속 눌러본다)



<그림 1> 학생들이 무한을 알아보기 위하여 계산기의 trace기능을 사용하여 탐구해 봄

학생 3: 뭘 눌러?
학생 2: 선생님, 이거 끝이 어디예요?
학생 1: 없지. 내가 아까 표에서 해 봤어, 레인지 에러래. 근데 기계가 좋으면 끝없이 가지. 무한이야 무한!
(실험반, 제 5차시 2006.06.23.)

위와 같은 활동들을 통하여 학생들은, 이차함수식의 계산과정까지 모두 거친 후에 이차함수를 기술하는 부분에서 기본 이차 함수식을 만족시키는 함수식의 형태로의 수직적 수학화를 모두 거친 후에도 테크놀로지를 활용하여 데이터 간격이 점점 벌어지는 그래프의 형태로 함수를 인식한다는 다는 것이다. 다시 말하면, 계산기를 활용하여 다양한 함수식을 확인하고 조정한 학생들은, 그래프를 함수와는 독립된 또 하나의 개념으로 인식하는 것은 보이지 않았고 포물선 그래프 자체를 함수로 인식하는 경향을 보였다.

[발췌문 3]
학생 1: 좀 어려운 데…
학생 2: 위로 볼록 한거 아래로 볼록한 거…
학생 3: 그러면 4가지로 분류가 되나?
학생 2: 거기에다가 다른 거 하면 되지.
학생 3: 완전제곱식 꼴로 된 거랑, 완전제곱식 안 된 거랑 분류해도 돼?
학생 4: 아, x축 왼쪽에 있는 거랑, 오른 쪽에 있는 거.
학생 1: 폭이 같은 것 끼리 해도 된다.
(실험반, 제 8차시 2006.07.11.)

발췌문 3에서 제시한 제 8차시의 다양한 그래프를 분류하는 문제를 통하여 학생들의 함수 개념에 대한 인식을 알아 볼 수 있었는데, 계산기를 활용한 학생들은 함수식의 형태만을 가지고 함수를 분류하는 것이 아니라, 그 식이 갖고 있는 그래프의 모양들을 분류의 척도로 삼아 그래프들을 분류하였는데 이는 함수의 표상을 계산기를 통하여 즉각적이고 다양한 변환이 가능했기 때문으로 보인다.

2) 수학적 표상간의 가교(anchor) 역할

Kaput(1994)는 학교에서 함수 교육을 일상생활과 그래프와 같은 수학적 표상체계와의 연결성을 강조한 바 있다. 그러나 실제 경험 또는 실제 상황 문제와 수학적 표상을 연결하는 것이 사실상 쉽지 않음을 문제점으로 지적하고 있다. 학생들에게 주어진 대수적 공식에 딱 부합하는 실생활적 소재를 만나는 것도 쉽지 않으며 또한 실생활을 배경으로 한 문제 상황을 대수적 공식으로 연결시켜 나가는 것도 어렵다는 것이다. 따라서 학생들에게는 동떨어진 한낱 수학공식에 불과한 함수 공식이나 그래프 등을 실생활과 연결시켜 나가도록 노력함을 물론이거니와 이 실생활 데이터를 수학적 표상으로 이끌어 갈 수 있는 어떤 '연결'이 필요하다는 것이 그의 주장이다.

본 연구에서는 함수 개념을 파악하고 이에 대한 예측을 요하는 문제 상황에서 학생 스스로 탐구하도록 유도되었다. 이때 학생들은 모델링을 구성하는데 있어서, 가설을 먼저 설정한 다음에 자신의 추측이 얼마나 잘 부합하는가를 조사하기 위하여 다양한 변수들을 입력하였다. 이것은 일상적 경험을 배경으로 한 소재의 문항을 수학적 기호 체계와 서로 연결시켜 나가는 데 있어서 위에서 언급한 연결 즉, 가교의 역할을 한 것이다.

[발췌문 4]

학생 2: 테이블 리스트1있고 리스트2가 있죠?

연구자: 그래서?

학생 2: 리스트1이 첫 번째 밑줄에 해당하는 거에요...리스트2가...리스트1에 세로로 1,2,3,4넣고.. 리스트2에다가 1,4,9,16,25넣는 거고..리스트1이 x값이에요.. 거기에 그래프1, 그래프2..가 있잖아요..f1이 그래프1...f1눌러봐요... 리스트에 1,2,3,4,5를 넣고... 그래프에 어떤 점들이 찍힌 게...이런 식으로 나와 있어요.

연구자: 식을 구했니?

학생 1: 아니요. 근데 이게 이런 꼴(아까 그려진 $y=x^2$ 그래프)의 뭔가가 나온다는 소리니까요. 이 문제는 이런 그래프의 뭔가가 되잖아요(함수식 $y=x^2+2$와 $y=x^2-2$그래프를 탐구하기 위하여 표에 넣고 비교하여 설명하고 있다).

학생 2: 어...됐다.

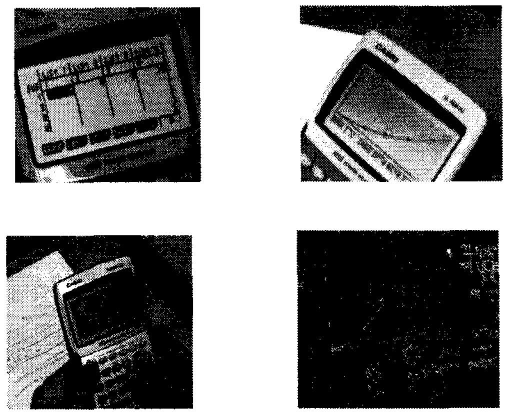
학생 1: 잘하는데!

(실험반, 제 6차시 2006.07.07.)

또한, 이때 탐구를 통해 나온 이차함수식의 형식화된 정확한 기호화였다기보다는 학생들 스스로에 의해 창출된 다양하고 풍부한 의미와 표상들이었다고 할 수 있다. 함수 교육에서 학생들이 자유롭게 그래프들을 창출하여 보고 그래프 화면을 보며 탐구하고 논의하는 것은 학생들의 함수에 대한 중요한 수학적 재발명의 과정이라 할 수 있다 (diSessa, 외, 1991). Gravemeijer와 그의 동료(1999)는 함수를 학습하는 데 있어서 학생들 스스로 거리와 시간, 또는 속도와 시간 간의 관계를 그래프로 표현해보고 그 의미를 파악해 볼 수 있다면 형식적 수학과 실 경험사이의 괴리감을 줄일 수 있는 대안적 방법이라 권하였다. 수학적 표상을 형성하기 위해서는 학생 스스로 해 보는 활동과 그들의 실제 경험이 확장된 형태가 토대가 되어야 한다는 것이다. 이러한 견지에서 본다면, 계산기가 다양한 수학적 표상을 제공함으로써 학생들이 스스로 수학적 의미를 만들어 나갈 수 있었다고 할 수 있다.

수학화 과정에서 모델링은 '내적 개념 체계(internal concept system)'와 내적 개념 체계를 확장하고 외적 체계의 내면화를 통합한 '표상 체계' 그리고 마지막으로 자연에서 경험되었거나 구조화된 인위적인 '외적 체계'를 포함한다(Lesh & Doerr, 2000)고 하였는데, 학생들이 자신의 가설을 합리화 시키거나 문제 상황을 납득하기 위하여 여러 가지 데이터를 입력하고 이에 따른 결과들을 분석한 것은 내적 개념 체계를 확립하기 위한 활동들에 속한다. 내적 개념 체계가 확고히 되면 표상 체계로의 전환이 수월히 되는데, 표상 체계가 타인과 쉽게 공유되거나 수월히 전달되어지는 성질의 것이 아니기 때문에, 표상 체계를 생성해 내는 것은 자신이 납득할 수 있는 다양하면서도 고유의 무엇인가에 의하여 이루어진다고 하였다(Lesh, 1983). 따라서 학생들이 계산기를 이용하여 고유의 데이터를 입력하면서 그 의미를 파악하고 이를 다양한 표상의 전환으로 시도하는 것에서, 테크놀로지가 내적 개념 체계를 증폭시키며 표상체계와의 연결과 순환을 원활히 해 줌으로써 학생들의 모델링 과정을 도왔다고 할 수 있다.

예를 들면, <그림 2>에서 일부 나타난 바와 같이, 학생들은 주어진 문제 상황을 이해할 수 없자 패턴을 인식하기 위하여 계산기의 표 기능에 들어갈 데이터를 좀 더 확장하여 입력함으로써 문제 상황에 적합한 수의 패턴을 모델링을 위한 요소로 추출하였다. 이 때, 학생들은 관계를 공식으로 표현하기 위하여 모델을 세련시켜 나감으로써 함수 개념을 형식화하기 이르렀다. 규칙성을 찾아내고 모델을 세련화시키기 위해서 학생들은 계산기를 활용하였는데, 이는 모델링 추출의 주요한 도구가 되었으며 기호화를 위한 가교역할을 하였다고 볼 수 있다.



<그림 2> 학생들은 계산기를 활용하여 관계를 함수의 형식적 표현으로 전환하기 위하여 모델을 세련화시키며 수직적 수학화를 진행하였다.

3) 재개념화(reconceptualizing)

Nemirovsky(1996)는 기호 체계(symbol system)와 기호 사용(symbol use)간의 특징을 구분하였는데, 기호 체계는 활동과는 다소 거리가 먼 정형화 되어 해석되어지는 대상을 말하는 반면, 기호 사용은 좌표 평면을 이용한 함수적 관계에 대한 추론 과정을 포함한다고 하였다. 그가 이렇게 두 가지를 구분하여 말한 이유는 학생들의 함수적 경험을 위한 교수안을 고안할 때 탐구적 접근의 측면에서 성격을 분명히 할 필요가 있다는 것이다. 기호 체계와 기호 사용 간의 구별은 규칙화 되고 통제된 전통적인 기호 사용을 줄이고 학생들로부터 자연스레 나온 살아 있는 무엇인가에서부터 시작하여 추상화의 열매를 맺고자 하는 의도라 할 수 있다. 예를 들어, 어떤 함수의 그래프를 좌표 위에 그대로 소개하며 학습하는 것은 효율적인 수학적 표상을 배우는 방법이 아니라고 주장하였다. 그의 주장에 의하면, 가장 효율적인 학습은 그래프와 같은 표상들을 이용하면서 상황을 재개념화 하며 의미를 발전시켜 나가는 것이라 하였다.

본 연구에서 학생들은 주어진 상황 혹은 주어진 문제를 형식화시킨 함수식으로 바꾸어 놓은 이후에도, 다양한 데이터를 계산기에 입력하며 표나 그래프 표상으로 전환시키나가는 것을 볼 수 있었다. 이는 이미 자신이 형식적인 함수 설정 단계에 이르렀음에도 불구하고 표상의 전환을 통하여 개념의 재생산 과정을 거치는 것이라 할 수 있다.

[발췌문 5]

학생 1: y값을 여기에다가(계산기의 테이블)쭉 대입해.
학생 3: 이렇게 하는 거 맞나?
학생 2: (계산기로 식을 구해놓고)대입해 봐야지.
학생 1: 맞아…….맞아.
학생 2: 이거 전개하면 내 거랑 똑같아.
학생 4: 어떻게 구했어?
학생 1: 값을 x값을 쭉 쓰고…….
학생 4: 그러면 계산기에다. 자...메뉴에서 2번 ...2번에서... 그 다음에 어떻게 했어?
학생 1: 첫 번째에다가 x값을 집어넣고..두 번째에다가 y값을 집어넣었어..f2하고 f3그렇게 한 다음에...뭐가 나왔어?...
학생 4: a=1 b=4 c=-1 어! 그럼 이거 다시 그리면 되나?(같은 그래프 형태가 나타나는가?)
학생 2: 니꺼(표에 계산 해 놓은 수치) 넣어봐.

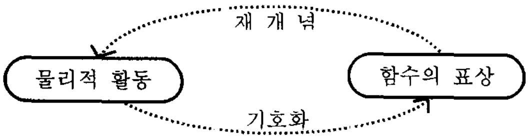
(실험반, 제 8차시 2006.07.11.)

위의 발췌문에서와 같이 학생 2는 함수 $y=x^2+4x-1$을 다시 계산기에 입력하며 자신뿐만 아니라 다른 학생들에게도 확신을 주었다. 형식적인 함수식을 모두 구한 이후에도 실제 그러한 데이터가 주어질 수 있는지 지속적으로 탐구해 보고 앞에서 구한 좌표나 함수식 혹은 그래프의 검정과정을 거치며 '아하, 정말 그렇구나'라고하는 반응을 보였다. $y=a(x-p)^2+q$꼴로 바꿔서 나타낸 이후에도 다시 그래프를 계산기로 그려서 이 그래프는 $y=x^2$그래프를 어떻게 평행이동 한 그래프인가를 다시 점검하는 모습을 보였다.

또한 '바자회'문제에서 한 예를 들면, 떡볶이 가격을 100x 내렸을 경우 총 판매 금액을 y원이라 하여 이것에 관한 이차함수 식을 풀고 난 뒤에도, 이 식을 그래프로 나타내고 다시 표 기능에 넣어 수치들을 재음미 하였다. 그런 다음 총 판매 금액을 최대로 하기 위해서 떡볶이 가격을 얼마로 해야 하는가에 대한 해를 식을 계산해서 낸 답과 자신이 관찰을 해서 나온 결과를 비교하는 모습을 보였다. 처음 '떡볶이 가격을 1인분에 500원 내려서 팔 게 되면 총 판매금액은 얼마일까'에 대한 문제 상황을 처음 접했을 때는 막연히 "그럼 총 판매금액이 줄어드나? 늘어나나?"와 같이 모호한 개념을 갖고 있던 학생들은 식의 전개로만 얻어진 결과를 반신반의하는 것 같았다. 이러한 상황을 재개념화할 수 있게 됨으로써 독립변수의 변화량에 대하여 확실히 인지할 수 있게 되었다.

이러한 탐구와 표상간의 재해석은 함수의 표상들을 이해하는 가장 적절한 방법이라 할 수 있고(Nemirovsky, 1996), 이러한 재개념화 과정 혹은 재생산과정을 테크놀로지가 더욱 가능하게 한 것이다.

형식화된 함수식에서부터 함수식의 특징을 찾는 이차함수 학습의 진행방향 외에도, 테크놀로지를 활용함으로써 반대로 어떤 데이터의 특징을 함수식으로 전환이 가능하도록 도왔다고 앞에서도 이미 언급하였다. 따라서 그림 3에서 나타난 것과 같이 테크놀로지는 형식화를 위한 표상과 표상 간의 혹은 문제 상황을 함수의 표상으로의 가교의 역할을 함과 동시에 반대로 표상에 대한 재인식의 과정 중의 하나인 재개념화 역할 모두를 수행한 것 즉, 쌍방향의 역할을 돕는 도구였다고 표현할 수 있다.



<그림 3> 수학화 과정에서 테크놀로지의 쌍 방향 역할

V. 결론 및 제언

1. 결 론

함수 교육에 있어서 함수의 역사 발생적 교수학습 측면과 더불어 학생의 기존의 활동 체계 내에서 개인이 갖고 있는 함수의 개념을 접목하는 이유는 이론과 실행 사이의 관계를 강조해서 이론이 실행을 통해서 나오고 실행에 근거해서 피드백 되는 관계에 초점을 두는 대안적 활동(Cobb, 2000)의 한 일환으로서, 수학 활동의 사회문화적 측면을 강조하기 위함이다. 본 연구는 수학 교수·학습을 구성할 때, 우선 예비연구를 통해 학생들이 어떻게 선 개념을 형성하였으며 어떻게 학습하였는가에 대한 이해를 바탕으로 하였다. 연구절차로는 첫째, 교수설계와 교육과정 기반 연구의 순환적 과정으로 구성된 개발된 학습자료 연구를 통해 함수에 관한 교수·학습 방법에 대한 내용과 교수 설계 개선을 도모하여 학습자료를 구성하였다. 둘째, 그 자료의 효과를 실험을 통해 정량분석방법을 사용하여 수학적 성취도와 성향도를 조사하였고, 셋째, 학생의 수학화 과정에서 테크놀로지의 효과를 심도있게 이해하기 위해 정성연구방법으로 학생의 수학화 과정을 연구하였다. 혼합연구방법을 사용함으로써 각 연구방법의 단점을 극복하고 연구의 충실도를 높이고자 하였다.

정량적 연구 결과로는 120명의 중학교 3학년을 대상으로 검사지의 문항분석과 함께 학생의 수학적 성취도와 수학적 성향에 대해 공분산분석을 통한 자료분석이 이루어졌다. 검사지의 문항분석에서 수학적 성취에 대한 10개 문항 분석결과는 신뢰도, 적합도, 난이도, 변별도에서 우수성을 나타내었는데 개념이해(1번)와 문제해결력(10번) 문항은 적합도를 위한 재고가, 개념이해(가장 쉬운 문항으로 1번)와 수직적 수학화(가장 어려운 문항으로 3번)은 난이도를 위한 재고가 요구되었다. 본 연구에서는 수직적 수학화 과정이 난이도가 모두 높은 것으로 나타난 것으로 보아 전통적 학습환경에서는 응용과 활용 면의 실생활 접근을 어려워하는 것에 반해 테크놀로지 환경에서는 응용적 수학화는 쉬운 반면에 수준상승이 이루어지는 과정의 수직적 수학화가 어려운 과정임을 나타냈다. 이는 테크놀로지 환경이 전통적인 환경과 다른 특성을 나타낸 것이다. 따라서 교사는 다수의 표상을 이용하는 테크놀로지의 활용에서 표상간에 이동이 용이함을 활용하여 의도적인 순환적 학습제시를 통해 수직적 수학화에 좀더 초점을 둘 필요가 있다. 그 외의 다른 문항에선 높은 신뢰도(0.784)와 함께 문항으로써 적절성을 제시하였다. 수학적 성향에 대한 정량연구의 검사지에 대한 신뢰도, 타당도를 향상시키기 위해 사전검사를 바탕으로 보완을 거쳐 사후검사지의 문항분석도를 조사한 결과는 신뢰도, 적합도, 난이도, 변별도의 각 분야에서 많은 향상을 꾀할 수 있었다. 하지만 적합도에선 13, 15, 18번 문항의 부적절성은 이들 문항이 속한 영역인 수학적 반성(13, 15번)과 수학적 가치(18번)이 더욱 보완이 필요하고 이들에 대한 향상도 측정이 어렵다는 것을 의미한다. 특히 수학적 반성은 고상숙(2005) 연구와 일치하는 것으로써 수학수업에서 소홀히 다루어지며 따라서 향상시키기 어려운 영역으로 나타났다.

수학적 사고력을 위한 수학화 과정에서 테크놀로지의 효과를 수학적 성취도에서 공분산분석으로 조사한 결과는 0.05 유의수준에서 실험처치의 전체적 효과가 매우 유의한 향상을 나타내었는데 집단간의 비교에서 전통적 함수학습과 수학화를 통한 함수학습에서는 수학화를 통한 함수학습의 효과가 유의미하였으며 수학화를 통한 함수학습과 테크놀로지를 활용한 수학화 학습에서는 테크놀로지를 활용한 수학화 함수학습이 더 유의미하였다. 즉, 테크놀로지를 활용한 수학화 함수학습이 가장 높은 평균치로 유의미하였으므로 수학화를 통한 함수학습도 효과적이지만 테크놀로지를 활용한 수학화 함수학습이 더욱 효과가 크다는 것을 시사하였다.

수학화 과정에서 테크놀로지의 효과를 수학적 성향도에서 조사한 결과는 0.05 유의수준에서 실험처치의 전체적 효과는 공분산분석을 통해 매우 유의한 향상을 나타냈는데 세부적으로는 테크놀로지를 활용한 수학화의 함수학습이 테크놀로지를 활용하지 않은 수학화의 함수학

습보다 예측한대로 유의하게 향상된 수학적 성향을 나타내었다. 그러나 다른 집단비교에서는 수학적 성향의 특성상 자료수집과 분석에서의 세심한 주의가 요구되었다. 수정보완을 통해 비교적 높은 신뢰도와 타당도를 지닌 검사지로 조사를 실시하였음에도 불구하고 전통적 학습집단의 학습외적 요인에 의한 무성의한 응답은 실험결과를 예측불가능하게 만든 결과가 되었다. 이것은 수학적 성향은 인지적 성취도와 달리 학습외적인 요인(예를 들어 학생의 기분)에 의해 좌우되기 쉽고 측정에서의 응답을 수량화하는 과정에서의 지문간(5단계)의 불명확성이 항상 존재한다는 사실을 인지하고 있어야함을 뜻한다.

이런 어려움에도 불구하고 수학에서의 시험결과가 전체 학급에서 늘 좋지 않았던 학급의 학생들이 테크놀로지를 활용한 수학화 학습에서 수학적 성취도와 성향에서 유의하게 향상했던 점은 본 연구의 수행했던 처치가 매우 효과가 있었음을 알 수 있었다. 더불어, 수학적 성향의 특성이 매우 유동적이고 외부 자극에 따른 변화가 심하여 이를 향상시키기에는 교사의 지속적인 노력이 요구되고 이를 수량화하여 측정하는 과정에 많은 유의점이 필요하다는 것도 염두에 둘 필요가 있다.

마지막으로, 형식적 함수의 형태를 제공하고 이에 대한 알고리즘화 된 문제들을 다루는 것 보다 더 중요한 함수 교육은 어떤 변화율을 직관적으로 느끼게 하고 그래프의 특성을 유도하고 이에 내포된 의미들을 탐구하는 것이다. 학생들은 상황 속의 관계를 식으로 표현하기 위하여 모델을 세련시켜 나감으로써 함수 개념을 형식화하였는데, 주로 규칙성을 찾아내고 모델을 세련화시키기 위해서 학생들은 계산기를 활용하였다. 이러한 수학화 과정에서 계산기는 모델링 추출의 주요한 도구가 되었으며 기호화를 위한 가교역할을 하였다고 볼 수 있다. 또한, 탐구와 표상간의 재해석은 함수의 표상들을 이해하는 가장 적절한 방법이라 할 수 있고(Nemirovsky, 1996), 이러한 재개념화 과정 혹은 재생산과정을 테크놀로지가 더욱 가능하게 한 것으로 보인다. 함수의 재개념화 과정은 형식적인 함수를 내면화시키기 위함인데, 그래프를 표로 혹은 식으로 변환시킴으로써, 혹은 필요한 데이터를 스스로 입력하여 관찰하고 문제 상황을 다양한 각도에서 이해함으로써 함수에 대한 이해를 넓히는 것은 함수 교육에서 중요한 부분이며, 이는 테크놀로지를 활용함으로써 더 심도 깊고 효율적으로 진행할 수 있는 부분이라 사료된다.

2. 제언

가. 검사지

검사지의 구성이 교수학적 목적과 부합하여야하고 평가기준과 요소가 일관성이 있어야하며 적절한 신뢰도, 적합도, 난이도, 변별도에 근거한 평가가 이루어져야 한다. 이 때 검사지의 문맥이 명확성과 구별성이 있어야하며 부정어의 사용 등으로 인한 혼돈을 예방하여야 한다.

나. 학교수학에서 함수

첫째, 함수 영역을 이해하기 위해서는 함수의 표상들간의 유연성 있는 이동이 가능한 것이어야 하는데, 대수적 형태로 혹은 표의 형태로 학생들이 필요로 하는 적절한 안목을 가지고 대상을 판단하여 필요한 표상으로 즉시 전환할 수 있도록 지도되어야 한다. 그러기 위해서는 우선은 다양한 표상전환 기회가 학생들에게 제공되어야 하고 즉각적인 표상전환이 어려운 문제 상황에서는 이를 돕기 위한 적절한 도구가 제공되어야 하는데 이 때 테크놀로지 활용은 좋은 도구가 될 수 있다.

둘째, 관련된 학습 과정을 전체로 보는 관점에서의 학습은 가능한 한 처음부터 지속적으로 서로 연관이 맺어 있는 여러 영역들로 조직되어야 한다. 가령, 이차함수는 처음부터 일차함수 및 이차함수의 현실적 상황에서 시작하여 그 한 가지 현상을 여러 부분으로 나누어 비교분석하여 보며 표와 그래프가 함수를 서로 관련짓는 수단이며 같은 아이디어에 대한 다른 표현임을 인식하게 한다. 그러나 현행 함수의 지도 내용에는 이러한 수학적 표상이 독립적으로 다루어져 있거나 표에서 함수의 이동을 추측하게 구성되어 있는 경우가 많다. 학생들은 표로 주어진 함수의 표상에서 그 특징을 찾기가 어려우며 그 수치 자체도 상당히 인위적이어서 학생들은 그 데이터로부터 얻고자 하는 것을 감지하기란 쉽지 않다. 따라서 함수 교육의 교수·학습 내용에 이러한 내용이 고려되어야 하며 좀 더 다양한 수치로 통합된 표상들 간의 연계성 있는 교수·학습 지도안이 필요하다.

셋째, 학생들에게 제공되는 현상은 표로써 정리되고

다시 표는 그래프로 연결되며 다시 이것은 이차함수식으로 연결되면서 함수의 다양한 표상들이 횡적 및 종적으로 연결되어 전체적인 구조화가 이루어져야 하는 것뿐만 아니라, 이러한 것들이 다시 다양하면서도 복합적인 상항에 응용 될 수 있도록 하여 양적인 면에서도 함께 연결이 되어질수록 하여야한다.

넷째, 이차함수의 정의를 '독립 변수 x의 값이 정해지면 종속 변수 y의 값도 하나씩 따라 대응되는 함수 $y=f(x)$에서 y가 x에 대한 이차식 $y=ax^2+bx+c\,(a,b,c$는 상수, $a\neq 0)$로 나타내어 질 때, 이 함수를 '이차함수'로 정의하되, 이차함수의 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프의 성질 및 이차함수의 최대값과 최소값 구하는 것을 수평적 수학화를 거쳐 수직적 수학화로 연결될 수 있도록 해야 한다.

다. 함수의 교수현상학

첫째, 함수의 여러 가지 표상을 포함하고 있는 상황모델로서 작용할 수 있는 맥락을 개발해 내는 것이 무엇보다 중요하며 이러한 내용을 다룰 때, 형식적인 접근 이전에 비형식적 전략이 강조되어야 한다. 학생들의 개개인의 느낄 수 있고, 자신만의 표상적 표현이 가능하도록 하여야 한다.

둘째, 현 교육과정에서는 이차함수의 활용을 다루지 않거나 형식적 정의가 주어진 범위 내에서 결국 수식조작만 가능한 범위 내에서 다루어지고 있다. 그러나 상황 내에서 이차함수의 개념 파악을 물론이거니와 응용적 수학화 적용이 가능하여야 한다. 따라서 함수의 활용 부분이 새롭게 첨부되어 학생들이 이미 배운 함수적 지식을 사용하여 문제 상황을 해석할 수 있음은 물론 충분히 의사소통 할 수 있는 소재가 제공되어야 한다.

셋째, 함수적 사고의 점진적인 수학화를 추구하여 함수의 기원인 물리적, 사회적, 정신적 세계 내에서 변수들 간의 연관성 또는 종속성을 생각하고 표현하고 기술하며 변화하는 대상간의 종속성을 관련시켜 나가는 것을 그 첫 번째 활동으로 구성하여야 한다. 그 다음 이러한 함수적 심상을 바탕으로 현상에서의 규칙을 찾고 현상을 탐구하며 이를 형식화하는 수학화 과정을 통해서 지도되어야 하며, 다음 과정은 함수의 다양한 표상들을 구현할 수 있으며 또한 표상들 간의 전이를 통하여 학습 가닥 연결이 이루어지도록 한다. 그리고 마지막으로 학습된 내용들을 통하여 현실 세계의 문제를 재해석하고 의식화 될 수 있도록 구성되어야 한다.

라. 테크놀로지 활용

첫째, 실제 경험 또는 실제 상황 문제와 수학적 표상을 연결하는 것이 사실상 쉽지 않음을 문제점으로 지적하고 있다. 그러나 본 고에서도 나타났듯이, 수평적 수학화나 수직적 수학화의 각 단계에서 테크놀로지가 표상간의 가교의 역할을 가능하게 함으로써 이러한 과정이 원활히 수행될 수 있다는 것이 밝혀졌다. 따라서 정형화된 혹은 구조화된 문제 상황만을 학생들에게 제공하는 것이 아니라 근사값을 지닌 실제적인 데이터를 주고 현상을 예측할 수 있도록 교수학적 상황을 구성할 필요성이 있다.

둘째, 본 연구에서의 연구 결과에서도 나타났듯이, 테크놀로지 환경에서의 활동은 전반적으로 문제 상황에서 수학화과정의 일환으로 패턴을 체계화된 방법을 찾기 위하여 자신이 세운 모델을 해석하고 구체화하기 위하여 테크놀로지를 사용하는 모습을 보인다. 또한 학생들은 지필로 계산을 마친 상태에서 본인의 답에 대한 확신을 얻고자 계산을 끝낸 이후에도 계산기를 이용하여 지필로 구한 표의 값을 직접 입력하였고, 이후 표에 대한 식을 계산기로 찾아 자신이 한 것과 비교한 후 그래프로 전환하여 최대값 등을 찾아 비교하는 등 자기주도적인 학습을 이루어갔다. 계산기 없이도 해결 가능한 문제 상황에서 학생들이 계산기를 사용하였다고해서 계산기 사용의 비효율성을 거론하는 것은 논의의 여지가 있다. 따라서 이러한 상황에서 학생들은 어떠한 사고 과정이나 학습 과정을 거치는가에 대한 교수학적 연구가 뒤따라야 할 것이다.

참 고 문 헌

고상숙 (2005). Girl-favored Tessellations Using a Computer, 한국수학교육학회지 시리즈 D <수학교육연구> **9(3)**, pp.275-283.

강옥기 (2000). 수학과 학습지도와 평가론. 서울: 경문사.

우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부.

임종원 (1996). 마케팅조사, 법문사

정영옥 (1999). 현실적 수학교육에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집, **9(1)**, pp.81-110.

Bednarz, N.; Dufour-Janvier, B.; Pourier, L. & Bacon, L. (1993). Socioconstructivist. viewpoint on the use of symbolism in mathematics education. *Alberta Journal of Educational Research* **39**, pp.41-58

Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E., & Mcneal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis, *American Educational Research Journal* **29**, pp.573-604.

Cobb, P. (2000). Conducting experiments in collaboration with teacher. In A. kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science.* Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and the rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel and J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* pp.293-332, Albany, NY: State University of New York Press.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Quantitative, qualitative, and mixed methods approaches.* Thousand Oaks: SAGE Publications.

de Moor, E. (1991). Geometry instruction (age 4-14) in the Netherlands: The realistic approach, In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in the primary school* pp.119-138, Urecht: CD-β Press.

diSessa, A. A.; Hammer, D. Sherin, B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior* **10(2)**, pp.117-160.

Doerr, H. M. (1995, April). *An integrated approach to mathematical modeling: A classroom study.* Paper presented at the Annual Meeting of the American. Educational Research Association, San Francisco.

Dreyfus, T. (1992). Aspects computerized learning environments which support problem solving. In J. Ponte, J. Matos, & D. Feranandes(Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information technologies: Research in Context of Practice* pp.255-266, Berlin: Springer Verlag.

Doorman, M. (2002). How to guide students? A reinvention course on modeling motion. In Fou-Lai Lin(Eds.), Common sense in mathematics education. *Proceedings of 2001 Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* pp.97-114, Nov. 2001, Taipei, Taiwan: National Taiwan Norman University.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structure*, Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education.* Utrecht: CD-ß Press. Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E. & Doorman, L. M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* **39(1)**, pp. 111-129.

Gravemeijer, K.P.E. & Cobb, P. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In: P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Communicating and symbolizing in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design*, Kluwer Academic Publishers, pp.225-273.

Greene, J. C., Caracelli, V. J. & Graham, W. F.(1989). Toward a conceptual framework for mixed-method evaluation designs. *Educational evaluation and policy analysis* **11(3)**, 255-274.

Kaput J. (1994) The representational roles of technology in connecting mathematics with. authentic experience. *In Didactics of mathematics as a Scientific Discipline* (Biehler et. al. Eds.) Kluwer Academic Publishers, pp.379-397.

Lesh, R. & Lamon, S. (1994). *Assessments of authentic performance in school mathematics.* Washington, DC: American Association for the Advancement of Sciences.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2000). Symbolizing, communication, and mathematizing. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mathison, S. (1988). Why triangular? *Educational Researcher*, **17(2)**, pp.13-17.

National Council of Teachers of Mathematics. (1995). *Assessment standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: Two issues that emerge. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching pp.295-313, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Swanson, S. (1992). *Mixed-method triangulation: Theory and practice campared*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Tall, D. O. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus using Interactive. Computer Graphics*, Ph.D. Thesis, University of Warwick, UK.

Treffers, A. (1987). *Three dimension: A model of goal and theory description in mathematics education* - The Wiscobas Project,

The Use of Technology with a Calculator for Improving Mathematical Thinking in Learning and Teaching Mathematics

- A Study of Students' Mathematization Using Technology -

Sangsook, Choi-Koh
Dankook University, 147, Hanmam-Ro, Yongsna-Gu, Seoul, Korea
E-mail : sangch@dankook.ac.kr

Hokyoung, Ko
Dojang middle school, Snabon-Dong Gyeonggi, Korea
E-mail : koho@kice.re.kr

This article provides how to implement the use of Realistic Mathematics Education (RME) in a teaching a function at a school to improve students' mathematization for their mathematical thinking using technology. This study was planed to get research results using the mixed methodology with quantitative and qualitative methodologies. 120 middle school students participated in the study to bring us data about their mathematical achievement and disposition. Through the data analysis used ANCOVA, the students with the experiment of the mathematization and technology excelled the other groups of students who were not provided with technology or both of them. In analysis of the questions of the achievement test, the problems for vertical mathematization were presented harder for the students than the other problems for horizontal and applicative mathematization. The technology environment might have helped students manipulate the application of real-life problems easier. This means that teachers can put more careful assignment on vertical mathematization using technology. We also explored that learning and teaching under RME using technology encouraged students to refine and develop their informal functional concept and pursue higher thinking of formalization. The study results in a lot of resources for teachers to use into their teaching mathematics for improving students' mathematical thinking.

* ZDM Classification : C73
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : Mathematical thinking, Mathematization, Realistic Mathematics Education, Function, Technology, Graphing calculator, Mathematical achievement and disposition

부록 1 : 수학 성취도 검사(Rubric)

문항	내용 영역	평가 요소	평가 목표	난이도	배점
1	이차함수의 개념	수평적 수학화	이차함수의 개념에 관한 이해도를 측정한다.	하	1
2	이차함수의 응용	응용적 수학화	이차함수에 대한 구체적인 실례와 아닌 예를 통해 이차함수의 인지도를 측정함으로써 응용적 수학화 단계 완성도를 평가한다.	하	1
3	이차함수의 식	수직적 수학화	두 변량으로부터 이차함수의 식을 찾아내고 이를 그래프로 변환가능한가를 측정함으로써 수직적 수학화의 완성도를 평가한다.	상	1
4	이차함수의 그래프	수직적 수학화	두 변량으로부터 이차함수의 식을 찾아내고 이를 그래프로 변환가능한가를 측정함으로써 수직적 수학화의 완성도를 평가한다.	상	1
5	최대값	응용적 수학화	이차함수를 통한 문제해결력 측정과 상황해석 문항을 통하여 응용적 수학화의 완성도를 평가한다.	중	1
6	함수의 개념	수평적 수학화	두 변수간의 관계를 기술할 수 있는 지 측정함으로써 수평적 수학화의 완성도를 평가한다.	하	1
7	이차함수의 개념	수평적 수학화	두 변수간의 관계를 기술할 수 있는 지 측정함으로써 수평적 수학화의 완성도를 평가한다.	하	1
8	이차함수의 식	수직적 수학화	이차함수의 식을 구할 수 있는지 알아봄으로써 수직적 수학화의 완성도를 평가한다.	상	1
9	이차함수와 실생활용	응용적 수학화	구한 이차함수를 통하여 구체적인 상황을 해석할 수 있는지 측정함으로써 응용적 수학화의 완성도를 평가한다.	중	1
10	이차함수와 실생활용	응용적 수학화	이차함수를 활용한 문제해결력을 측정한다.	중	1

부록 2 : 수학적 성향검사

( ) 학년 ( )반 ( )번 이름:__________

※ 다음은 여러분의 개인적인 배경에 대한 질문들입니다. 해당하는 곳에 V 표를 하십시오.

1. 당신은 여학생입니까, 남학생입니까? ① 여학생 ② 남학생
2. 당신은 어느 단계까지 공부할 생각입니까?

①고등학교 졸업 ②고졸 후 직업기술교육 ③대학교졸업
④대학원 졸업 ⑤모르겠다

3. 당신의 부모님은 당신의 수학성적에 대한 어떤 기대를 갖고 있습니까?

①매우 잘 하기를 원함 ②열심히 노력하기를 원함 ③무관심함

4. 당신은 하루에 학교 수학수업(보충수업포함)이외에 몇 시간 정도 수학공부를 합니까?

①전혀 안함 ②1시간미만 ③1-2시간 ④2시간 이상

5. 당신의 학교에서의 수학 성적은?

①90점 이상 ②80점 이상 90점 미만 ③70점 이상 80점 미만
④60점 이상 70점 미만 ⑤60점 미만

※다음 검사는 각 문항에 대하여 다음 보기와 같이 다섯 개의 번호 중에서 한 가지에 답할 수 있습니다. 각 문항에 대해서 자신이 가장 그렇다고 생각하거나 느끼는 것에 솔직하게 **한 개의 번호**에만 V 표를 하십시오.

영역	번호	문항내용	항상 그렇다	대체로 그렇다	보통 이다	대체로 아니다	전혀 아니다
수학적인 자신감	1	나는 수학 문제를 풀면 신이 난다	⑤	④	③	②	①
	2	나는 수학을 재미있다고 생각한다	⑤	④	③	②	①
	3	나는 수학에 대한 좋은 느낌을 갖고 있다	⑤	④	③	②	①
수학적인 융통성	4	나는 수학문제를 풀 때 가끔씩 선생님이나 교과서에서 제시하지 않은 방법을 이용할 때가 있다	⑤	④	③	②	①
	5	나는 수학 문제를 풀때 참고서에 나와 있는 풀이 방법을 따르지 않고 다른 방법을 강구한다	⑤	④	③	②	①
	6	수학문제를 풀때 다양한 방법으로 풀기를 좋아한다	⑤	④	③	②	①
수학적인 의지력	7	금방 답이 나오지 않는 문제들을 푸는 것을 좋아한다	⑤	④	③	②	①
	8	나는 수학문제를 풀 때나 학습할 때 깊이 생각해보는 것을 좋아한다	⑤	④	③	②	①
	9	나는 정답이 나올 때까지 열심히 푸는 성질이 있다	⑤	④	③	②	①
수학적인 호기심	10	나는 중요한 수학적 개념이나 새로운 아이디어를 배우고 싶다	⑤	④	③	②	①
	11	생활 속의 수학적 원리를 알아내는 일이 즐겁다.	⑤	④	③	②	①
	12	모르는 문제가 나오면 알고자 하는 욕구가 강하다	⑤	④	③	②	①
수학적인 반성	13	나는 수학문제를 풀고 난 후 꼭 검토를 한다	⑤	④	③	②	①
	14	한 번 풀었던 문제가 다시 출제되면 그 문제는 틀리지 않는다	⑤	④	③	②	①
	15	나는 다른 학생들이 수학 문제를 푼 방법을 눈여겨 보곤한다	⑤	④	③	②	①
수학적인 가치	16	나는 수학을 이용하여야만 앞으로 잘 살아나갈 수 있을 것이라 생각한다	⑤	④	③	②	①
	17	나는 누구나 수학은 배워야 한다고 생각한다	⑤	④	③	②	①
	18	수학은 일상생활의 문제를 해결하는데 유익하다	⑤	④	③	②	①
수학의 심미성	19	나는 수학을 아름답다고 생각한다	⑤	④	③	②	①
	20	나는 아름다운 수학 작품을 본 일이 있다	⑤	④	③	②	①
	21	수학은 미를 추구하는데 유익하다	⑤	④	③	②	①