韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2007. 02. 제 46권, 제 1호, 69-79.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2007, Vol. 46, No. 1, 69-79.

학교수학에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계하기

도 종 훈 (한국교육과정평가원)

Ⅰ. 서 론

학교수학을 통해 학생들은 많은 양의 문제 해결을 경험한다. 교사나 교과서를 통해 제시되는 이러한 문제들은 대부분 "무엇 무엇을 구하여라" 또는 "무엇 무엇을 증명하여라"와 같은 형태로서, 답의 존재성이나 명제의 진위 여부가 이미 결정된 상태에서 학생들에게는 답을 구하거나 증명하는 과정만을 요구한다. 그러나 수학 문제를 해결한다는 것은 단지 주어진 문제의 답을 구하는 것뿐 아니라 답의 존재성을 탐색하고, 답을 구하는 다양한 방법을 모색하며, 나아가서는 자신이 해결한 문제를 보다 다양하고 새로운 관점에서 바라보고 추측하여 새로운 문제를 제기하는 과정까지도 포함한다.

이러한 관점에서 보면 학교수학을 통해 이루어져 온 기존의 문제 해결 활동들은 답의 존재성과 유일성이 전제된 주어진 문제의 답을 구하는 과정에 치중해 있고, 답의 존재성이나 새로운 문제의 제기와 관련된 추측의 과정은 상대적으로 소홀하게 다루어져온 것으로 보인다. 따라서 답의 존재성이나 명제의 진위 여부에 대한 추측 활동 및 다양하고 새로운 관점에서의 문제제기 활동이 학교수학에서 보다 강조될 필요가 있다고 판단된다. 학생들은 문제를 접했을 때 무작정 답을 구하려고만 할 것이 아니라 먼저 "이 문제의 답이 존재하는가?"라는 질문을 자연스럽게 던질 수 있어야 하고, 수학적 능력이 뛰어난 학생들의 경우 한걸음 더 나아가 "이 문제로부터 다른 문제를 제기할 수 있는가?"라는 질문을 던지고 이 질문에 답하는 과정을 통해 보다 풍부한 수학적 탐구 활동을 경험할 수 있을 것이다.[1)]

* 2006년 11월 투고, 2006년 12월 심사 완료.
* ZDM 분류 : D53
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 수학적 탐구, 추측, 정당화, 문제제기

답의 존재성으로부터 다양한 해법 모색에 이르는 일련의 질문 습관 형성은 학생들이 가장 많이 접하는 교과서와 교사의 문제 제시 형태를 답의 존재성까지도 판단하도록 유도하는 형태로 변형함으로써 어느 정도 가능하겠지만,[2)] 학생들에게 새로운 문제를 추측하여 제기하고 해결하는 경험을 제공하기 위해서는 그러한 탐구 활동을 구체적인 형태로 설계하여 학생들에게 제시할 수 있는 교사의 보다 전문적이고 적극적인 노력이 필요하다. 이때 교사는 교과서 밖에서 소재를 구하기 이전에 먼저 교과서 내용이나 문제를 면밀히 재탐구할 필요가 있으며, 이를 통해 교과서에 통상 제시되어 있는 내용이나 문제들로부터 보다 다양하고 새로운 관점에서 문제를 제기하고 해결해 나가는 탐구 활동을 설계하여 학생들에게 제시할 수 있어야 할 것이다.

이에 본고에서는 현행 중학교 교과서의 기하 영역에 제시되어 있는 내용과 문제들 중 일부를 학생들의 수학적 탐구 활동을 유발할 수 있는 형태로 변형하여 재구성하는 문제제기 활동 설계의 몇 가지 예를 제시하고, 이러한 활동이 수학교육에 주는 시사점에 대하여 논의하고자 한다. 구체적으로는 학생들이 이미 학습한 피타고라스 정리로부터 유추하고 일반화하여 새로운 문제를 추측하고 정당화하는 탐구 활동, 삼각형의 결정조건으로부터

1) 본고에서는 "수학적 탐구 활동"을 추측과 정당화의 과정을 통해 기존 문제에 대한 새로운 해법 뿐 아니라 그로부터 새로운 수학 내용이나 문제를 끊임없이 제기하고 해결해 나가는 활동으로 간주하였다(Ⅱ장1절 참고).

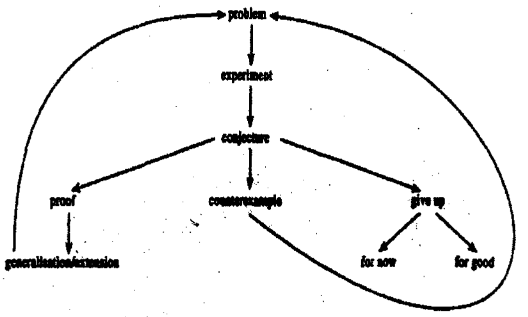
2) 예를 들어, 교과서나 교사에 의해 제시되는 문제의 발문을 답을 구하는 문제의 경우 "~을 구하여라"에서 "~의 답이 존재하는가? 존재하면 답을 구하고, 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라"와 같은 형태로, 증명하는 문제의 경우 "~을 증명하여라"에서 "~이 참인가 거짓인가? 참이면 증명하고 거짓이면 반례를 제시하여라"와 같은 형태로 각각 변형함으로써, 답의 존재성이나 명제의 진위 여부에 대한 질문 습관이 학생들에게 자연스럽게 형성되도록 유도할 수 있을 것이다.

세 변 이외의 여러 가지 선분과 각을 이용한 삼각형의 결정조건 및 사각형의 결정조건을 찾는 탐구 활동, 그리고 교과서에 흔히 제시되는 문제로부터 새로운 문제를 제기하는 탐구 활동 설계의 예들을 각각 살펴보고자 한다. 본고에서 제시하는 탐구 활동 설계의 예들은 교과서 내용이나 문제로부터 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동을 설계하고자 하는 교사들에게 하나의 본보기가 될 수 있으며, 그 자체로 수학적 능력이 뛰어난 학생들을 위한 수준별 심화 탐구 자료로도 활용 가능할 것이다.

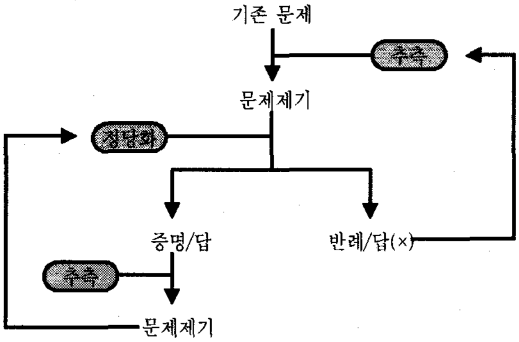
Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 탐구의 과정

어떠한 수학 분야든 해결해야할 문제가 있으며, 수학자들은 문제를 통해 동기를 부여받는다. 문제를 해결하기 위해 수학자들은 문제와 관련된 여러 가지 형태의 실험을 통해 추측을 생산하고 이를 증명하거나 반증한다 (Holton, 1998, 2002). Holton(1998)은 학생들에게 무엇을 가르칠 것인가라는 문제 즉, 내용의 측면보다는 어떻게 가르칠 것인가라는 문제 즉, 과정의 측면이 보다 중요하다고 보고 자신의 연구 경험에 비추어 수학적 탐구가 이루어지는 과정을 <그림 1>과 같은 모형으로 설명하였다. Holton(1998)이 제시한 모형은 답을 구하는 문제 보다는 증명하는 문제의 해결에 초점을 두고 있고, 문제를 제기하는 측면 보다는 문제를 해결하는 과정에 초점을 두고 있다. 그러나 문제를 해결하기 위해서는 먼저 문제가 제기되어야 하고 학생들 특히, 중등학교 학생들이 접하는 문제들 중 상당 부분은 답을 구하는 형태의 문제이다. 이러한 측면에서 연구자는 <그림 1>에 제시된 Holton(1998)의 모형에서 증명하는 문제 뿐 아니라 답을 구하는 문제의 해결 과정 및 문제 제기의 측면을 보완하여 <그림 2>와 같은 수학적 탐구 과정 모형을 제안하고자 한다.



<그림 1> 수학적 탐구 과정에 대한 Holton의 모형(Holton, 1998)



<그림 2> 수학적 탐구 과정 모형

이에 따르면 수학적 탐구 활동은 추측과 정당화의 과정을 통해 기존 문제에 대한 새로운 해법 뿐 아니라 그로부터 새로운 수학 내용이나 문제를 끊임없이 제기하고 해결해 나가는 활동으로 간주될 수 있다.[3] 즉, 대부분의 수학 탐구는 기존 문제에 대한 추측과 문제제기로부터 시작한다. 기존 문제는 교과서에 제시되어 있는 통상적인 문제 뿐 아니라 수학적 탐구의 대상이 되는 모든 문제를 포괄한다. 이미 증명되거나 해결된 정리나 문제, 기존에 제기되었으나 미해결인 문제 등이 기존 문제에 해당된다. 기존 문제에 대한 추측을 통해 제기된 새로운 문제는 진위를 판별해야 하는 명제일 수도 있고 답을 구하는 문제일 수도 있다. 추측된 문제가 명제인 경우는 그 명제를 증명하거나 반례를 통해 추측을 반증하여야 한다. 추측을 증명하여 문제를 해결하였을 경우 일반화나 유추 등의 추측을 통해 새로운 문제를 제기하고 해결해 나가는 과정을 되풀이하지만, 추측에 대한 반례를 얻

3) 본고에서는 명제의 진위를 판별하거나 답을 구하는 문제의 답의 존재성과 해법을 탐색하는 과정 즉, 추측을 통해 제기된 문제를 해결해 나가는 과정을 "정당화" 과정으로 간주하였다.

었을 경우는 원래 문제로 다시 돌아가 추측을 수정하거나 새로운 추측을 탐색하게 된다. 추측된 문제가 답을 구하는 문제인 경우는 먼저 답의 존재성을 증명하거나 답이 존재하지 않음을 보여야 한다. 답의 존재성을 증명했다면 실제로 답을 어떻게 구할 것인지를 탐구하게 되며, 답이 존재하지 않음을 보였다면 추측된 문제로 다시 돌아가게 된다.

이처럼 기존의 문제로부터 추측과 정당화의 과정을 통해 새로운 문제를 제기하고 해결해 나가는 탐구 과정은 수학 연구의 전형적인 특징으로서 학생들은 이러한 과정을 체득하여 자신의 학습에 적용하고 교사는 이를 안내할 수 있어야 할 것이다. 전통적으로 수학은 여러 가지 사실과 절차들의 모임으로 간주되어 왔고 이들을 숙달한 학생이 수학을 잘하는 것으로 간주되어 온 측면이 있다(Pape, Bell & Yetkin, 2003). 그러나 수학교육에서는 수학의 내용에 대한 학습 뿐 아니라 수학적 탐구 과정에 대한 학습 또한 강조되어야 하며 새로운 내용이나 문제를 제기하고 해결해 나가는 탐구 과정을 반영할 필요가 있다고 판단된다. 과정이 누락된 내용의 기계적, 누적적 학습은 학생들로 하여금 수학의 학문적 특성과 가치에 대한 오해를 유발할 수 있다. 교사는 수학의 내용을 결과로서 제시하는 것뿐 아니라 기존의 내용이나 문제로부터 추측하여 새로운 문제를 제기하고 해결하는 과정을 통해 학생들 스스로 새로운 내용을 발견할 수 있도록 도와야 할 것이다(Burn, 1998).

2. 추측과 문제제기

Einstein과 Infeld(1938)는 다양하고 새로운 관점에서 기존의 문제를 바라보고 이를 통해 의미 있는 문제를 제기하는 능력의 중요성에 대해 다음과 같이 언급하고 있다.

> 문제의 제기가 그것의 풀이보다 더 중요한 때가 종종 있다. 새로운 문제나 가능성을 제기하고 기존의 문제를 새로운 각도에서 바라보는 것은 창의적인 상상력을 필요로 하며 과학에서의 진정한 진보를 나타낸다.

문제제기는 그간 수학교육의 중요한 한 측면으로 간주되어 왔으며, 구성주의 교수・학습 이론에서는 교수・학습 활동의 한 요소로서 학생들에 의한 문제제기의 중요성을 강조한다(Ellerton, 1986; Freudenthal, 1973; Lavy & Bershadsky, 2003; NCTM, 1989, 1991; Polya, 1954; Silver, 1994; Silver et al., 1996). 특히 Polya(1954, 1968)는 수학교육에서 추측하기의 중요성을 강조하고, 학생들에게 도전감을 주고 교과를 가득 채우고 있는 단조로운 문제들로부터 탈피하기 위해 교사들이 사용할 수 있는 다양한 형태의 과제 즉, 추측한 후 증명하기, 추측의 결과 확인하기, 자신의 추측이 틀릴 수도 있음을 확인하기, 소규모 이론 구축하기 등과 같은 유형의 과제들을 예시하고 이들을 적극적으로 이용하도록 권고하였다.

학생들의 문제제기 활동을 지도하고 안내하려면, 교사 자신이 먼저 문제제기 능력을 개발해야 하며 더불어 학생들이 문제제기에 참여할 수 있는 상황과 그에 적합한 과제들을 고안할 수 있어야 한다. 문제제기 전략의 한 예로 "만약 ~이 아니라면" 전략을 들 수 있다(Brown & Walter, 1993; Lavy & Bershadsky, 2003). 이 전략에 따르면, 학생들은 주어진 문제의 각 요소들(주어진 자료, 구하고자 하는 것, 조건 등)과 그 속에 내재된 수학적 아이디어를 분석한 후 "만약 ~이라면" 혹은 "만약 ~이 아니라면" 등의 질문 및 질문에 답하는 과정을 통해 주어진 문제를 보다 다양하고 새로운 관점에서 바라볼 수 있게 되고, 이를 통해 다양하고 새로운 문제를 제기할 수 있게 된다. 실제로 <그림 2>에 제시된 수학적 탐구 과정 모형 중 유추나 일반화를 통해 추측하여 새로운 문제를 제기하는 과정에서 이 전략을 적용할 수 있으며, 본고의 Ⅲ장에 예시된 탐구 활동들 역시 이 전략을 적용하여(혹은 적용할 수 있도록) 설계한 것이다. Lavy와 Bershadsky(2003)는 예비교사 28명을 대상으로 2개의 입체 기하 문제를 제시하고 "만약 ~이 아니라면" 전략을 이용하여 그로부터 가능한 한 많은 문제를 제기하도록 하는 실험 연구를 실시하고, 이들이 제기한 문제들을 몇 가지 유형으로 분류하여 분석하였다. 그리고 문제제기 활동이 지니는 수학교육적 의미에 대하여 논의하였다. 그들의 분석에 의하면 문제제기는 학생들로 하여금 새로운 문제를 제기하는 과정에서 자신들이 사용한 여러 가지 개념들에 내재된 수학적 아이디어가 무엇인지 반성하도록 하고 주어진 개념과 새로운 개념 사이를 보다 다양하고 새로운 관점에서 연결할 수 있게 하여 결과적으로는 그러한 개념들에 대한 이해를 깊게 한다고 보았다.

이처럼 문제제기는 관련 내용에 대한 학생들의 이해

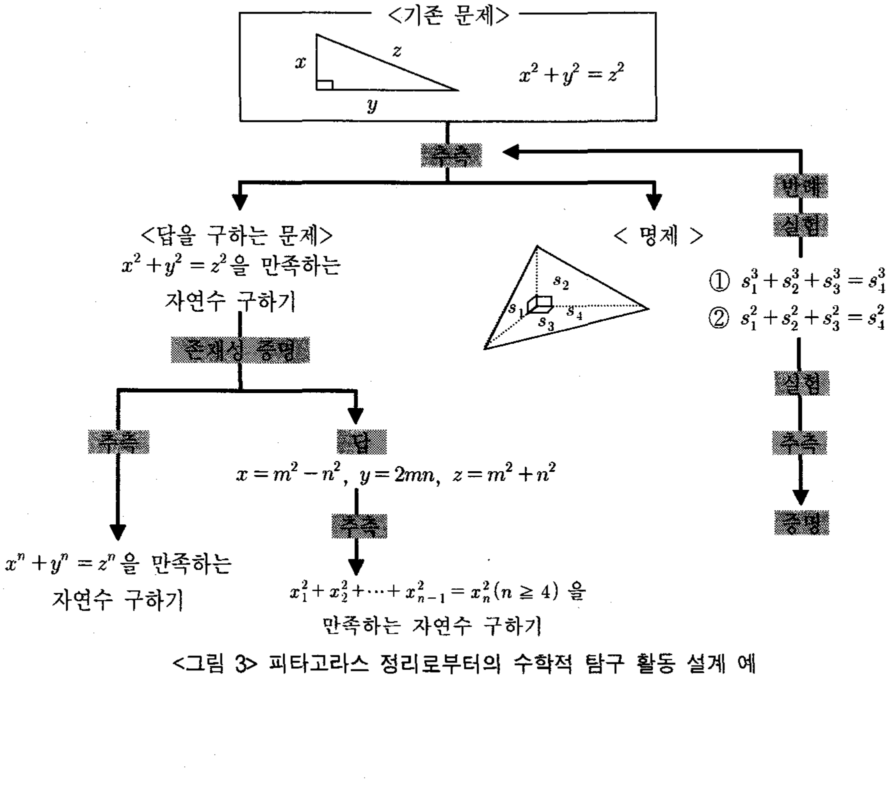
를 깊게 하고 호기심과 다양하고 유연한 사고를 진작시킬 수 있으며 수학에 대한 불안과 두려움을 감소시켜 학생들로 하여금 능동적이고 창의적인 학습자가 되도록 유도하는 효과가 있다(한옥동 · 박혜숙, 1997; Brown & Walter, 1993; Lavy & Bershadsky, 2003; Silver, 1994). 그러므로 수학 내용이나 문제들이 학생들의 문제제기가 자연스럽게 일어날 수 있는 형태로 제시될 필요가 있으며, 교사는 학생들의 문제제기 활동을 유발할 수 있는 수학적 탐구 활동을 설계할 수 있어야 할 것이다.

Ⅲ. 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계의 예

이 장에서는 이미 알고 있어 친숙한 기존의 교과서 내용이나 문제로부터 다양하고 새로운 문제를 제기하고 해결하는 수학적 탐구 활동 설계의 몇 가지 예를 살펴보고자 한다. 이 장에서 예시하는 탐구 활동의 예들은 수학적 탐구 과정 중 추측과 문제제기 과정에 "보다" 초점을 맞춘 것으로, 답을 구하거나 증명하는 등의 정당화 과정 역시 포함하며 그러한 과정을 중요하게 생각하지 않는 것은 아니다. 이 예들은 문헌을 통해 이미 알려져 있거나 연구자가 고안해 낸 문제들을 토대로 Ⅱ장에 제시된 수학적 탐구 과정 모형과 "만약 ~" 전략을 적용하여 수학적 능력이 뛰어난 학생들을 위한 탐구 자료로 설계되었다. 그리고 이 장에서 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동 설계의 예와 함께 제시된 몇몇 학생들의 탐구 사례들은 2004년에서부터 2006년 사이에 연구자가 학교(S중학교) 수학 수업이나 몇몇 영재교육원 수업을 통해 학생들과 함께 탐구하면서 수집한 자료들이다. 교사들은 이 장에 제시된 탐구 활동의 설계 과정을 참고하여 학생들을 위한 추측과 문제제기 중심의 수학적 탐구 활동을 설계할 수 있을 것이다.

1. 피타고라스 정리로부터의 추측과 문제제기

평면기하에서의 개념이나 성질은 종종 입체기하에서의 개념이나 성질의 특수한 경우이기도 하고, 입체기하에서의 개념에 대한 정의나 성질은 평면기하에서의 정의나 성질로부터 유추될 수 있는 경우가 많다. 그러므로 평면기하에서의 성질이나 명제를 공간에서의 성질이나



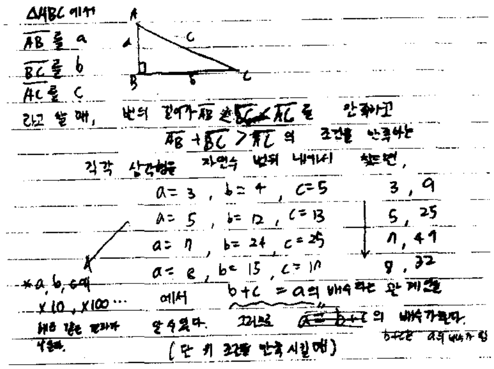
<그림 3> 피타고라스 정리로부터의 수학적 탐구 활동 설계 예

명제의 형태로 유추하여 확장해 보고자 하는 것은 자연스러운 시도라고 할 수 있다. 평면에서 세 변의 길이가 x,y,z (z는 빗변의 길이)인 직각삼각형에 대하여 $x^2+y^2=z^2$이라는 관계식이 성립함을 의미하는 피타고라스 정리로부터 문제 상황을 바라보는 관점을 "평면"에서 "공간"으로 전환하여 새로운 문제를 제기할 수 있다. 즉, 주어진 문제 상황에서 "평면"을 "공간", "직각삼각형"을 "직사면체"로 바꾸면 "세 변의 길이"는 "네 면의 넓이"에 대응하며, 이로부터 공간에서 네 면의 넓이가 s_1, s_2, s_3, s_4 (s_4 는 빗면의 넓이)인 직사면체에 대해서 s_1, s_2, s_3, s_4 사이에 어떤 관계가 존재할 것인가? 라는 문제를 제기할 수 있다(<그림 3>).[4]

또한, (3,4,5)이나 (5,12,13) 등과 같이 교과서에 흔히 제시되는 것들 이외에 피타고라스 정리를 만족하는 보다 일반적인 자연수 쌍을 찾는 문제를 제기할 수 있는데,[5] 해석기하의 관점에서 보면 이 문제는 중심이 원점이고 반지름($|z|$)이 자연수인 원 위의 점들 중에서 x,y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하는가? 라는 의미를 지닌다. 이로부터 다시 3차원 공간에서 중심이 원점이고 반지름이 자연수인 구면 위의 점들 중에서 x,y,z 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하는가? 라는 문제를 제기할 수 있으며, 나아가서는 n차원 공간에서의 n차원 구면의 경우로 일반화할 수 있을 것이다(<그림 3>). 이러한 관점에 따르면 중심이 원점이고 반지름이 5인 원 위의 점들 중에서 x,y 좌표가 모두 자연수인 점은 $(3,4)$밖에 없으며, $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=x_n^2\,(n\geq 4)$ 의 자연수 해는 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2$의 경우를 일반화하여 구할 수 있다.[6]

한편, 피타고라스 정리를 만족하는 보다 일반적인 자연수 쌍을 찾는 문제의 제기로부터 일반화($2\to n$)하여 페르마의 마지막 정리에 대한 소개까지도 가능할 것이다 (<그림 3>).

이와 같은 탐구 활동의 설계는 교사의 충분한 사전 준비와 사고 실험을 토대로 이루어져야 하지만, 실제 탐구 과정에서는 교사가 미처 예상하지 못했던 학생들의 다양하고 신선한 아이디어나 추측이 생성될 수 있다. 실제로 피타고라스 정리를 만족하는 자연수 쌍 $a,b,c(a<b<c)$을 찾는 문제를 탐구하는 과정에서 서울 소재 S중학교 3학년에 재학 중인 어떤 학생이 (3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (8,15,17) 등의 예들을 찾은 후 자신이 찾은 수들을 관찰하여 각 경우에서 길이가 긴 두 변의 합 9, 25, 49, 32는 각각 길이가 가장 짧은 변의 길이인 3, 5, 7, 8의 배수가 됨을 보고, 이로부터 "$b+c$는 a의 배수 즉, 직각삼각형에서 길이가 긴 두 변의 길이의 합은 길이가 가장 짧은 변의 길이의 배수"가 됨을 추측하였다(<그림 4>)[7].



<그림 4> 피타고라스 수에 관한 어떤 학생의 추측

물론 자신이 추측한 명제를 수학적으로 엄밀하게 증명하거나 반증하지는 못하였지만,[8] 관찰을 통해 스스로의 힘으로 추측하여 새로운 문제를 제기하였고 이 과정에서 자신이 이미 알고 있던 내용을 새로운 관점에서 바라

---

4) Polya (1962) pp.34-37 참고

5) 실제로 한 교과서(중학교 3학년)에서 피타고라스 정리를 만족하는 자연수 쌍의 예를 4개 이상 찾아보기는 어렵다.

6) 실제로 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2=x_n^2\,(n\geq 4)$ 의 자연수 해는 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2$의 경우를 일반화하여 임의의 자연수 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 에 대하여 $(y_1^2+y_2^2+\cdots y_{n-2}^2)^2+(2y_1y_{n-1})^2+\cdots+(2y_{n-2}y_{n-1})^2+(2y_{n-1}^2)^2=\{(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-2}^2)+2y_{n-1}^2\}^2$으로 구할 수 있다.

7) 이 탐구활동의 사례는 2006년 3월 S중학교 3학년 수학 수업 시간에 연구자가 학생들과 함께 탐구한 내용의 일부이며, 연구자가 의도한 것은 $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$임을 학생들이 발견하거나 발견하도록 안내하는 것이었다.

8) 사실 이 학생이 추측한 명제는 거짓이다. 예를 들어, 세 자연수 20, 21, 29는 피타고라스 정리를 만족하지만, 길이가 긴 두 변의 길이의 합 50은 길이가 가장 짧은 변의 길이인 20의 배수가 아님을 알 수 있다.

볼 수 있게 되었다는 사실 그 자체로도 이 학생의 탐구 활동은 높이 평가받을 만하며 교사는 학생들의 이러한 탐구 활동을 장려하고 유도할 수 있어야 할 것이다.

2. 삼각형의 결정조건으로부터의 추측과 문제제기

중학교 1학년 기하 영역에서 삼각형의 여러 가지 선분(변, 중선, 수선, 외접원의 반지름, 내접원의 반지름 등)과 각을 이용하여 삼각형의 결정조건을 추측하고 정당화하는 탐구 활동이나 삼각형의 결정조건으로부터 유추하고 일반화하여 사각형의 결정조건을 추측하고 정당화하는 탐구 활동을 설계할 수 있다(<그림 5>).

삼각형의 세 결정조건 SSS, SAS, ASA는 “3개의 변(Side)과 3개의 꼭지각(Angle)”을 삼각형의 구성요소로 간주하고, 삼각형을 유일하게 작도할 수 있도록 삼각형의 구성요소들을 최소 개수로 조합한 것이다. 그러나 관점을 조금만 달리해서 생각해 보면 삼각형에는 세 변 이외에도 세 개의 중선, 세 개의 수선, 외접원의 반지름, 내접원의 반지름 등과 같은 여러 종류의 선분들(Segments)이 존재한다. 이로부터 삼각형의 결정조건에 대한 관점을 “변(Side)”에서 “선분(Segment)”으로 바꾸어 "만약 변이 아니고 선분이라면"이라는 질문을 통해 이러한 선분들을 삼각형의 구성요소로 간주하고, 이를 세 선분의 길이가 주어진 경우(SSS), 두 선분의 길이와 한 꼭지각의 크기가 주어진 경우(SSA), 한 선분의 길이와 두 꼭지각의 크기가 주어진 경우(SAA)로 나누어 새로운 삼각형의 결정조건을 추측하고 정당화하는 탐구 활동을 설계할 수 있다(<그림 5>).

다음은 세 선분의 길이를 이용한 삼각형의 결정조건 탐구 활동 과제와 그 중 특히 세 선분이 한 변(a), 한 중선(m_a), 한 수선(h_b)인 경우에 대한 어떤 학생의 탐구 결과를 예시한 것이다(<그림 6>).

<기존 문제>

삼각형의 결정조건(변(Side), 꼭지각 이용)
[예] 세 변의 길이를 알면 삼각형을 꼭 하나 작도할 수 있다.(SSS)

추측

세 선분(a,m_a,h_b)의 길이가 주어졌을 때, 이들 세 선분(a,m_a,h_b)을 각각 한 변, 한 중선, 한 수선으로 갖는 삼각형을 꼭 하나 작도할 수 있는가?

추측

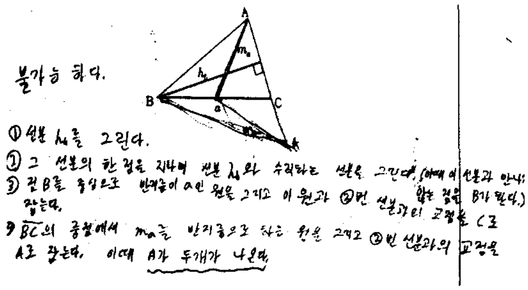
<삼각형의 결정조건(선분(Segment), 각 이용)>
세 변, 세 수선, 세 중선, 외접원의 반지름, 내접원의 반지름 등의 선분들 중에서
(1) 세 선분의 길이(SSS)
(2) 두 선분의 길이와 한 각의 크기(SSA)
(3) 한 선분의 길이와 두 각의 크기(SAA)
가 주어졌을 때, 삼각형이 꼭 하나 결정되는 경우는 어떤 경우인가?

네 변의 길이를 알면 사각형을 꼭 하나 작도할 수 있는가?

추측

<사각형의 결정조건>
(1) 네 변의 길이와 한 꼭지각의 크기
(2) 세 변의 길이와 두 꼭지각의 크기
(3) 두 변의 길이와 세 꼭지각의 크기
(4) 한 변의 길이와 네 꼭지각의 크기
(5) 네 변과 네 꼭지각 이외의 다른 선분의 길이와 각의 크기
가 주어졌을 때, 사각형이 꼭 하나 결정되는 경우는 어떤 경우인가?

<그림 5> 삼각형의 결정조건으로부터의 수학적 탐구 활동 설계 예



<그림 6> 세 선분(a, m_a, h_b)의 길이를 이용한 삼각형 결정조건 탐구 활동의 예

이와 같은 탐구 활동을 통해 학생들은 자기 스스로의 힘으로 새로운 문제를 제기해 봄으로써 비록 소박하지만 주어진 문제를 해결하는 데에서 경험했던 것과는 또 다른 발견의 기쁨과 성취감을 경험할 수 있다. 실제로 2004학년도 서울 소재 S대학교 과학영재교육원 수학분과에 소속된 중학교 3학년 학생들이 삼각형의 결정조건에 관한 자신들의 탐구 결과를 보고서의 형태로 작성하였는데,[9] 보고서에서 자신들 스스로의 문제제기와 해결 경험 및 그 과정에서 느낀 성취감에 대하여 다음과 같은 소감을 밝히고 있다(서울대학교 과학영재교육센터, 2004).

> SAS, ASA, SSS, RHS, RHA, …등은 학교에서 배운 삼각형의 결정조건들이다. 얼마 전까지의 우리는 항상 이런 조건들에만 얽매여 바쁘게 문제만 풀어 왔고 그냥 받아들였다.......중략.......몇 가지 경우에 대해서는 그것이 삼각형의 결정 조건이 되는지 여부를 판단하는 것이 그다지 어렵지 않았지만, 어떤 경우에는 아무리 생각해봐도 풀리지 않았다. 그렇지만 우리 스스로 문제를 제기해서 우리 스스로 문제를 해결해 나간다는 성취감을 느낄 수 있어 좋았다. 비록 해결하지 못한 부분도 있지만 한 내용에 대해 집중적으로 연구하여 하나의 보고서를 완성해 결과물을 얻어낼 수 있었다는 사실이 기쁘다.

그 밖에도 삼각형의 결정조건에 대한 관점을 "삼각형"에서 "사각형"으로 바꾸어 "만약 사각형을 유일하게 작도하려면 그것의 구성요소들을 어떻게 조합해야 할까?" 라는 질문을 통해 사각형의 결정조건에 대한 문제를 제기할 수 있다(<그림 5>). 사각형은 네 개의 변과 네 개의 꼭지각을 구성요소로 지니고 있으며, 그 밖에도 대각선이나 두 대변이 이루는 각 등이 고려될 수 있을 것이다.[10]

3. 문제로부터의 문제제기

앞장의 2절에서 논의한 바와 같이 기존 문제에 주어진 자료, 조건, 구하고자 하는 것 등을 분석한 후 이들 각각에 대하여 "만약 ~라면" 혹은 "만약 ~이 아니라면" 등의 질문을 통해 새로운 문제를 제기할 수 있다. 기존의 문제가 증명하는 문제일 경우 기존에 주어진 명제로부터 가정이나 결론을 변형한 새로운 명제나 주어진 명제의 역, 이 명제에 대한 증명 혹은 반증 문제를 생각할 수 있을 것이다. 답을 구하는 문제인 경우 역시 구하고자 하는 것을 변형하여 여러 개의 답이 존재하거나 답이 존재하지 않는 문제로 변형할 수 있고, 주어진 자료를 변형하여 자료가 부족한 문제, 자료가 지나치게 많은 문제 등으로 변형할 수 있으며, 자료와 구하고자 하는 것 사이의 조건을 변형하여 새로운 문제를 제기할 수 있을 것이다.

예를 들어, 기존 문제(명제) "$\angle B = \angle C$ 인 이등변 삼각형 ABC의 두 밑각 B와 C의 이등분선이 변 AC, AB와 만나는 점을 각각 D, E라고 하면 $\overline{BD} = \overline{CE}$이다"의 가정과 결론을 바꾸어 "삼각형 ABC의 두 밑각 B와 C의 이등분선이 변 AC, AB와 각각 만나는 점 D, E에 대하여 $\overline{BD} = \overline{CE}$라고 할 때, 주어진 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?"와 같은 문제를 제기할 수 있다.

어떤 명제를 증명하고 난 후 그 명제의 역의 진위 여부를 탐색하는 것은 수학에서는 매우 자연스러운 과정이며 가장 간단한 형태의 문제제기라고 할 수 있다. 이 때 제기되는 문제(명제)는 그것의 진위가 아직 알려져 있지 않으므로 문제를 제기한 사람이 스스로 그 여부를 판단해야 하고 필요하다면 증명하거나 반증하여야 한다. 앞의 예에서 기존 문제로 제시된 명제는 삼각형의 합동 $(\triangle EBC \equiv \triangle DCB)$을 이용하여 간단하게 증명이 되지

9) <그림 6>에 제시된 탐구활동의 사례는 2004년 5월에서 8월 사이에 "삼각형의 결정조건으로부터"라는 주제로 S대학교 과학영재교육원에 소속된 중학교 3학년 학생들과 연구자가 함께 탐구한 내용의 일부이며, 학생들은 탐구활동의 결과를 보고서 형태로 작성하였다.

10) 이 절에 제시된 삼각형의 결정조건 및 사각형의 결정조건과 관련한 과제 형태의 보다 구체적인 탐구 활동 및 탐구 결과를 정리한 내용은 도종훈(2006) 참고.

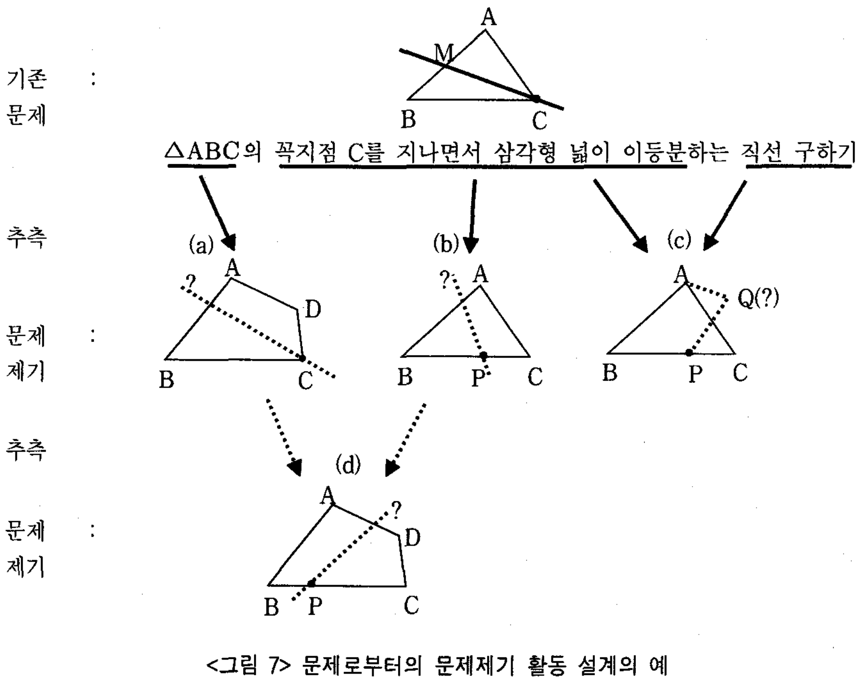
만, 주어진 명제로부터 새롭게 제기된 문제의 해결은 보기와는 달리 그리 간단하지가 않다. 필즈상 수상자이기도 한 Hironaka(1982, pp.54-55)는 학교수학에서 오랜 시간 깊이 숙고하는 사고방식의 중요성을 강조하면서 앞의 예에서 제기된 문제에 대하여 다음과 같이 회고하고 있다.

> 고등학교 시절에 장시간에 걸려서 푼 문제 중에 지금까지 잊히지 않는 것이 있다... 중략... 이 문제는 삼각함수를 쓰면 쉽게 풀 수 있지만 당시는 삼각함수를 배우기 전이었으므로 내게는 난제 중에 난제였다. 난 2주일 동안 다른 공부에는 일체 손을 대지 않고 밥 먹을 때나 화장실에 갈 때나 이 문제를 푸는 데만 열중했다.... 중략... 이 때 길을 걸어가면서도 그것만 생각하다가 전봇대에 머리를 부딪쳐서 친구들에게 웃음거리가 되기도 했다. 지금 생각해도 나에게는 귀중한 체험이 아닐 수 없다.

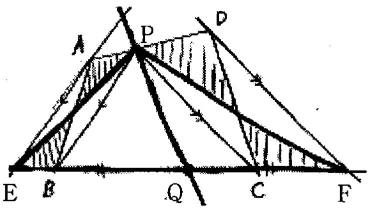
주어진 명제의 증명이 간단하고 그 명제의 역의 진위를 묻는 것 또한 그다지 어려운 일이 아니지만 그렇다고 해서 제기된 문제의 해결까지도 간단하다는 보장은 할 수 없으며, 그렇기 때문에 이러한 간단한 형태의 문제제기도 유의미할 수 있는 것이다.

기존 문제로부터의 문제제기의 다른 예로 이미 해결되어 답이 알려진 문제 "삼각형 ABC의 한 꼭지점 C를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 변 BC의 중점 M을 지난다."의 주어진 자료와 조건, 구하고자 하는 것을 변형하여 <그림 7>에 제시된 것처럼 다양하고 새로운 문제들을 제기할 수 있다.

먼저 주어진 자료에 대하여 "만약 삼각형 ABC가 아니고 사각형 ABCD라면"이라는 질문을 통해 "사각형 ABCD의 한 꼭지점 C를 지나면서 사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선"을 찾는 문제를 제기할 수 있고 (그림 7의 (a)), 주어진 조건에 대하여 "만약 삼각형 ABC의 한 꼭지점 C가 아니고 변 BC위의 임의의 점 P라면"이라는 질문을 통해 "변 BC 위의 임의의 점 P를 지나면서 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하는 직선"을 찾는 문제를 제기할 수 있다(그림 7의 (b)). 그리고 주어진 조건과 구하고자 하는 것을 변형하여 "삼각형 ABC의 변 BC위의 임의의 점 P를 지나면서 삼각형 ABC와 넓이가 같은 사각형 ABPQ"를 찾는 문제를 제기할 수 있다(그림 7의 (c)).



<그림 7> 문제로부터의 문제제기 활동 설계의 예



사각형 ABCD와 넓이가 같은 삼각형 PEF를 그린다. 변 EF의 중점을 Q라고 하면, 직선 PQ는 삼각형 PEF의 넓이를 이등분한다. 따라서 직선 PQ는 사각형 ABCD의 넓이를 이등분한다.

<그림 8> 새롭게 제기된 문제 <그림 7>의 (d)에 대한 어떤 학생의 풀이

문제제기는 전혀 새로운 문제의 고안뿐 아니라 기존에 주어진 문제로부터의 재구성까지도 포함하며, 문제해결의 전, 중, 후 전 과정에서 일어날 수 있다(Lavy & Bershadsky, 2003; Silver, 1994). 실제로 <그림 7>에 제시된 문제들 중 가장 아래쪽에 제시된 문제 (d)는 다른 문제들과는 달리 연구자가 미리 설계한 것이 아니라 서울 소재 D영재교육원에 소속된 학생들과 함께 탐구하는 과정에서 제기된 문제이다. 그리고 한 학생이 이 문제에 대하여 <그림 8>과 같은 풀이를 제시하였는데,[11] 이는 <그림 7>에 제시된 문제 (a)와 (b)에도 적용가능한 일반적인 풀이로서 연구자는 미처 생각하지 못했던 풀이이다[12].

이처럼 문제제기는 유추나 일반화 등을 통해 기존 문제를 확장하는 과정에서, 문제에 대한 새로운 해법을 모색하는 과정에서, 기존 문제의 결함을 보완하는 과정에서, 혹은 고난도 문제의 해법을 탐구하는 과정에서 자연스럽게 일어날 수 있다. 그러므로 학생들(특히 수학적 능력이 뛰어난 학생들)은 문제를 접했을 때 "이 문제로부터 유추하거나 일반화하여 다른 문제를 제기할 수는 없는가?"와 같은 질문을 자연스럽게 할 수 있어야 할 것이다.

11) <그림 8>에서 점을 나타내는 기호 E, F, P, Q는 설명의 편의를 위해 연구자가 첨가한 것이다.

12) 이 탐구활동의 사례는 2006년 8월에 "사각형 넓이에 관한 몇 가지 추론"이라는 주제로 서울 소재 D 영재교육원에 소속된 중학교 3학년 학생들과 연구자가 함께 탐구한 내용의 일부이다.

Ⅳ. 결론 및 제언

이상의 논의를 통해 우리는 수학적 탐구 과정에서 추측과 문제제기가 지니는 의의를 고찰하고, 교과서에 제시된 내용과 문제로부터 추측하여 새로운 문제를 제기하고 해결해 나가는 수학적 탐구 활동 설계의 예들을 살펴보았다.

교과서는 학생들에게 친숙할 뿐 아니라 양질의 수학적 내용의 집합체로서, 교사는 교과서에 제시된 각종 수학 내용이나 문제 등을 다양하고 새로운 관점에서 일반화하고 유추하고 변형함으로써 새로운 문제를 제기하고 해결해 나가는 탐구 활동을 설계할 수 있음을 본고에 제시된 예들을 통해 알 수 있다. 특히 Ⅲ장 2절에 제시된 사례(소감문)를 통해 알 수 있듯이 학생들은 자기 스스로의 힘으로 새로운 문제를 제기해 봄으로써 주어진 문제를 해결하는 데에서 경험했던 것과는 또 다른 발견의 기쁨과 성취감을 경험할 수 있으며, Ⅲ장 1절과 3절에 제시된 학생에 의한 문제 제기와 해결 사례를 통해 알 수 있듯이 학생들은 문제 상황을 보다 다양하고 새로운 관점에서 바라봄으로써 교사가 미처 생각하지 못했던 새로운 문제를 제기하기도 하고, 문제에 대한 새로운 해법을 만들어내기도 하였음을 알 수 있다. 즉, 잘 설계된 추측과 문제제기 활동은 학생들의 다양하고 유연한 사고를 진작시키고 각자의 수준에서 자신만의 수학적 발견을 경험하게 할 수 있을 뿐 아니라 수학에 대한 자신감과 긍정적인 태도를 고취시킬 수 있음을 알 수 있다.

그러므로 교사는 교과서에 통상 제시되어 있는 문제들을 단지 답을 구하고 증명하는 형태 즉, 무엇 무엇을 구하여라(증명하여라)의 형태에서 벗어나 답의 존재성이나 명제의 진위 여부에 대한 질문으로부터 시작하여 다양한 해법을 탐색하고 그로부터 새로운 문제까지도 제기할 수 있는 형태로 변형하거나 재구성할 수 있어야 하며, 장기적으로는 교과서 내용이나 문제 자체가 학생들의 추측과 문제제기 활동이 자연스럽게 일어날 수 있는 형태로 구성되어야 할 것이다. 그리고 학생들은 문제를 접했을 때 그것이 답을 구하는 문제인 경우 "이 문제의 답이 존재하는가? 존재한다면 어떻게 구할 것인가?"라는 질문을, 진위를 판별하는 명제인 경우 "주어진 명제가 참인가 거짓인가? 참이라면 어떻게 증명할 것인가?"라는

질문을 자연스럽게 던질 수 있어야 하고, 수학적 능력이 뛰어난 학생들이라면 여기서 더 나아가 "보다 간단하고 우아한 다른 해법은 없는가? 이 문제로부터 유추하거나 일반화하여 다른 문제를 제기할 수 있는가? 혹은 답이 존재하지 않는다면 왜 존재하지 않는가? 답이 존재하도록 문제를 변형할 수 있는가?", "보다 간단하고 일반적인 증명법은 없는가? 이 명제의 역이나 이도 참이 될 것인가? 이 명제로부터 유추하고 일반화하여 다른 명제를 제기할 수 있는가? 혹은 거짓이라면 반례를 제시할 수 있는가? 참이 되도록 명제를 변형할 수 있는가?"와 같은 질문들을 제기할 수 있어야 할 것이다. 궁극적으로는 이러한 탐구 태도가 학생들에게 습관화될 수 있도록 해야 하며, 본고에 제시된 예들은 이에 대한 하나의 본보기가 될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

도종훈 (2006). 중학교 기하 영역에서의 수학적 창의성 교육 연구. 서울대학교 박사학위논문.

서울대학교 과학영재교육센터 (2004). 서울대학교 과학영재교육센터 소식지 Gi-Fo-You. 서울대학교 과학영재교육센터.

한옥동 · 박혜숙 (1997). 수학과 학습에의 문제제기 이론의 적용 효과 분석 - 협력학습법을 중심으로, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36(1)**, pp.77-87, 서울: 한국수학교육학회

Brown, S. I. & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In: S. I.Brown, & M. I.Walter (Eds.), *Problem posing: reflection and applications* pp.16-27, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Burn, R. P.(1998). Participating in the learning of group theory. *Primus* **8(4)**, pp.305-316.

Einstien, A. & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York: Simon and Schuster. 지동섭 역 (1994). 아인슈타인이 직접 쓴 물리이야기. 서울 : 한울.

Ellerton, N. F. (1986). Children's made-up mathematics problems : a new perspective on talented mathematicians, *Educational studies in mathematics* **17(3)**, pp.261-271.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrencht: Reidel.

Hironaka, H. (1982). *Gakumon no hakken*. 방승양 역 (1993). 학문의 즐거움. 김영사.

Holton, D. (1998). Teaching versus Lecturing. *Teaching mathematics and its applications* **17(2)**, pp.49-54.

________ (2002). A first course in graph theory. *Teaching mathematics and its applications* **21(3)**, pp.105-119.

Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem posing via "What if not?" strategy in solid geometry - a case study. *Journal of mathematical behavior* **22(4)**, pp.369-387.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA:Author.

______ (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA:Author.

Pape, S. J., Bell, C. V. & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning : A teaching experiment in a seventh grade mathematics classroom. *Educational studies in mathematics* **53(3)**, pp.179-202.

Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics*. 이만근, 최영기, 전병기, 홍갑주, 김민정 역 (2003). 수학과 개연 추론 I - 수학에서의 귀납과 유추. 교우사.

________ (1962). *Mathematial discovery*,Vol I . John Wiley & Sons, Inc.

________ (1968). *Patterns of plausible inference*. 이만근, 전병기, 도종훈, 김지선 역(2004). 수학과 개연 추론 II - 개연적 추론의 여러 가지 패턴. 교우사.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics* **14(1)**, 19-28.

Silver, E. A.; Mamona-Downs, J.; Leung, S. S. & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study, *Journal for Research in Mathematics Education* **27(3)**, pp.293-309.

Designing Mathematical Activities Centered on Conjecture and Problem Posing in School Mathematics[13)]

Do, Jonghoon
Korea Institute of Curriculum and Evaluation, Seoul, Korea
E-mail : jhoondo@kice.re.kr

Students experience many problem solving activities in school mathematics. These activities have focused on finding the solution whose existence was known, and then again conjecture about existence of solution or posing of problems has been neglected. It needs to put more emphasis on conjecture and problem posing activities in school mathematics. To do this, a model and examples of designing mathematical activities centered on conjecture and problem posing are needed. In this article, we introduce some examples of designing such activities (from the pythagorean theorem, the determination condition of triangle, and existing solved-problems in textbook) and examine suggestions for mathematics education. Our examples can be used as instructional materials for mathematically able students at middle school.

* ZDM Classification : D53
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : mathematical investigation, conjecture, verification, problem posing