

광탄성 위상이동법에 의한 인장시편 원형 구멍주위 하이브리드 응력해석

Hybrid Stress Analysis around a Circular Hole in a Tensile Plate by Use of Phase Shifting Photoelasticity

백태현*[†], 이춘태**, 양민복**

Tae Hyun Back*[†], Choon Tae Lee** and Min Bok Yang**

초 록 인장하중을 받는 판재의 원형 구멍 주위의 응력분포를 해석하기 위하여 하이브리드 방법을 이용하였다. 하이브리드 법의 입력데이터로 원형구멍 중심으로부터 임의의 거리에 있는 직선상에서 광탄성 위상이동법으로 측정된 등색 프린지 차수를 사용하였다. 응력장 변화를 살펴보기 위하여 급수형 등각사상 복소수 응력함수에서 항의 수를 달리 할 경우에 대해 시험하였다. 정성적인 비교를 할 수 있도록 실험으로부터 얻은 실제의 등색 프린지 차수를 응력-광 법칙으로 생성된 이론적인 프린지 차수와 비교하였다. 정량적인 비교를 위하여 입력된 모든 지점의 등색프린지 차수와 응력함수로 계산된 프린지 차수의 상대오차의 표준편차를 응력함수의 항의 수에 따라 분석하였다. 하이브리드법 결과는 유한요소법에 의한 계산값에 매우 근접하였다. 본 연구에 적용된 기법은 광탄성 위상이동법을 이용하여 일 직선상의 등색프린지 차수를 간단히 측정할 수 있으므로 활용 가능성이 많을 것으로 예측된다.

주요어: 광탄성, 편광기, 등색프린지, 광탄성 프린지 위상이동법, 응력집중

Abstract A hybrid experimental-numerical method is presented for determining the stresses around a circular hole in a finite-width, tensile loaded plate. Measured fringe orders along straight lines provided the input information on the external boundary of the hybrid element. In order to see the effects of varying stress field, different numbers of terms in a power-series representation of the complex type conformal mapping stress function were tested. For qualitative comparison, actual isochromatic fringes were compared with reconstructed theoretical fringes using stress-optic law. For quantitative comparison, relative errors and standard deviations with respect to relative errors were analyzed for all measured points by changing the number of terms of stress function. The hybrid results are highly comparable with those predicted by FEA. The results show that this approach is effective and promising because isochromatic data along the straight lines in photoelasticity can be conveniently measured by use of phase shifting photoelasticity.

Keywords: Photoelasticity, Polariscopes, Isochromatics, Photoelastic Fringe Shifting Method, Stress Concentration

1. 서론

물체에 힘을 가하면 응력이 발생하며, 물체의 변

형 정도를 알려면 응력의 크기와 방향을 알아야 할 필요가 있다. 광탄성 응력 실험법은 기계부품이나 구조물에서 실제의 응력 상태를 나타내므로 공학적

으로 널리 이용되고 있다. 특히 광탄성법은 전체 응력장(whole stress field) 을 가시적으로 명확히 판별할 수 있는 장점이 있다[1]. 광탄성에서 주응력 방향이 동일할 때 나타나는 등경 프린지(isoclinic fringe)와 최대 및 최소 주응력의 차이에 의해서 나타나는 등색프린지(isochromatic fringe) 가 있다. 시편에 나타난 등경 및 등색 프린지를 측정하여 응력을 실험적으로 구할 수 있다.

광탄성 실험에서 시편의 기하학적인 형상이 급격히 변화되거나 구멍에 인접한 부분에서는 응력집중으로 인하여 프린지가 밀집되어 나타나므로 정밀한 측정이 곤란한 경우가 많다. 이러한 경우 응력집중이 발생하는 위치로부터 임의 거리에 떨어진 위치의 실험 데이터를 이용, 이론적인 급수형 탄성응력 함수(series-type elastic stress function)를 결정하여 응력집중 부근의 응력장을 해석할 수 있다. 즉, 실험데이터와 이론적인 탄성함수를 이용한 하이브리드법으로 실험적으로 측정이 곤란한 응력구배가 극심한 부분에서의 응력해석이 가능하다.

본 실험에서는 투과형 원형 편광기 (circular polariscope) 를 이용하여, 단축 방향으로 인장하중을 받는 구멍이 있는 시편으로부터 구멍주위의 응력분포를 하이브리드 법으로 해석하였다.

원공판 인장시편에서 구멍중심으로부터 멀리 떨어진 일 직선상에서 광탄성프린지 차수(fringe order)를 위상이동법(phase shifting method)으로 측정하고, 측정된 데이터로부터 응력성분을 결정하여 구멍주위의 응력을 해석하였다. 하이브리드 응력해석 결과로부터 응력함수와 응력-광법칙으로부터 생성된 이론 프린지 패턴을 실제의 프린지 패턴과 비교하여, 실험결과의 타당성을 입증하였다.

2. 이론

2.1. 기본 방정식

평면응력 상태의 직교 이방성 판재에서 주탄성축(principal directions of elasticity)에 대한 특성 방정식(characteristic equation)과 평형방정식(equilibrium equations)으로부터 기하학적인 적합성 (geometric compatibility) 관계를 이용하여 다음과 같이 응력성분에 관한 식으로 나타낼 수 있다[2,3].

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2Re \left[\mu_1^2 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2^2 \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \sigma_y &= 2Re \left[\frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right] \\ \tau_{xy} &= -2Re \left[\mu_1 \frac{\phi'(\zeta_1)}{\omega_1'(\zeta_1)} + \mu_2 \frac{\psi'(\zeta_2)}{\omega_2'(\zeta_2)} \right]\end{aligned}\quad (1)$$

위의 식 (1)에서 σ_x , σ_y 및 τ_{xy} 는 x 및 y 방향의 수직응력 및 전단응력 성분이고, 복소수 매개변수 μ_j ($j=1,2$) 는 직교 이방성재료의 특성방정식에 관한 두 개의 근이다. Fig. 1과 같은 임의의 하이브리드 부영역 (subregion) Ω 에서 응력함수 $\phi(\zeta_1)$ 를 절단된 로랑급수(Laurent expansion)로 나타내면 다음과 같다[2].

$$\phi(\zeta_1) = \sum_{k=-m}^m a_k \zeta_1^k \quad (k \neq 0) \quad (2)$$

구멍 경계 Γ 에서 표면력이 없을 경우(traction free) 하이브리드 부영역 Ω 에서 $\psi(\zeta_2)$ 는

$$\psi(\zeta_2) = \sum_{k=-m}^m \overline{a_k} B \zeta_2^k + \overline{a_k} C \zeta_2^k \quad (3)$$

상수 $a_k = b_k + ic_k$ 이고, b_k 와 c_k 는 실수(real number)이며 m 은 양의 정수이다. 또한 상수 B 와 C 는 특성방정식의 근(μ_1, μ_2) 에 관계되는 상수이다[2].

그리고 원형 및 타원형 구멍에 대한 등각사상 함수(conformal mapping function) ζ_j 는

$$\zeta_j = \frac{z_j \pm \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{(a - i\mu_j b)} \quad (4)$$

식 (4)에서 z 는 Fig. 1에 나타난 물리적 면의 좌표이고, 근호(square root)의 부호는 항상 $|\zeta_j| \geq 1$ ($j=1,2$) 이 되도록 한다. 식 (2), (3) 및 식 (4)를 식 (1)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (5) 와 같이 하이브리드 부영역 Ω 에서 응력에 관한 식을 얻을 수 있다[2].

$$\{\sigma\} = [V]\{\beta\} \quad (5)$$

위의 식 (5)에서 $\{\sigma\} = \{\sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_x\}^T$ 이고, $\{\beta\}^T = \{b_{-m}, c_{-m}, \dots, b_m, c_m\}$ 으로 상수행렬을 의미한다. 또한, $[V]$ 는 등각사상함수와 특정 방정식의 근에 관계되는 행렬이다. 식 (5)에서 일단, 상수 $\{\beta\}$ 가 계산되면 하이브리드 부영역 Ω (구멍의 경계 Γ 포함) 에서의 응력은 식 (5)를 이용하여 계산 할 수 있다.

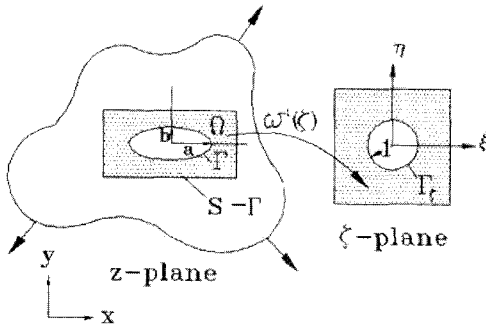


Fig. 1 Conformal mapping of a hole in the physical z-plane into the ζ -plane.

단, 등방성 재료를 포함한 직교이방성 재료는 주탄성축에 대하여 물성이 서로 대칭이므로 상수 $\{\beta\}$ 에서 홀수 항 ($m=3,5,7,\dots$) 만을 고려해야 한다[2,3].

2.2. 응력-광 법칙

주응력 성분중에서 $\sigma_3 = 0$ 일 때 평면응력 상태가 된다. 따라서 주응력성분은 σ_1 및 σ_2 가 된다. 광탄성의 복굴절 현상에 의한 응력- 광법칙 (stress-optic law)에 따르면 두 개의 주응력 차이 값은 식 (6)의 관계를 갖는다[1].

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{h} \quad (6)$$

위의 식 (6)에서 N 은 등색프린지 차수, f_σ 는 시편재료의 프린지 상수, h 는 시편의 두께를 의미한다. 식 (6)에 각각의 응력성분을 대입하여 다시 정리하면

$$\left\{ \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right\}^2 + \{\tau_{xy}\}^2 = \left\{ \frac{Nf_\sigma}{2h} \right\}^2 \quad (7)$$

과 같다. 식 (7)의 관계로부터 각각의 위치에서 식 (1)의 응력성분은 응력-광법칙에 의해 등색프린지 차수 (N)로 나타나며, 반대로 광탄성 데이터로부터 등색프린지의 차수가 결정되면 식 (7)과 식(1)을 이용하여 응력성분을 해석할 수 있다.

2.3. 비선형 최소자승법

식 (1)과 (7)로부터 응력성분을 결정하기 위해서는 식 (2)와 (3)의 급수형 응력함수의 상수 b_k 및 c_k 가 결정되어야 한다. 식 (7)로부터

$$G_n(b_k, c_k) = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - \left(\frac{Nf_\sigma}{h} \right)^2 = 0 \quad (8)$$

위의 식 (8)로부터 n 개의 프린지 데이터를 이용하여 응력함수 미지상수인 b_k 와 c_k 를 결정할 수 있다. 식 (8)은 프린지 차수 N 에 관하여 비선형이므로 미지상수 b_k 및 c_k 에 관하여 절단된 테일러급수 전개를 이용, 다음과 같이 선형화시킬 수 있다.

$$(G_n)_{i+1} = (G_n)_i + \sum_{k=-m}^m \left(\frac{\partial G_n}{\partial b_k} \right)_i \Delta b_k + \sum_{k=-m}^m \left(\frac{\partial G_n}{\partial c_k} \right)_i \Delta c_k \quad (9)$$

식 (9)에서 첨자 i 는 반복단계(iteration step)이고, Δb_k 와 Δc_k 는 보정값(correction)을 의미한다. 식 (9)에서 $(G_n)_{i+1} \cong 0$ 의 조건이 될 때까지 반복을 계속하면 최소자승법으로 데이터에 적합한 급수형 응력함수의 상수를 결정할 수 있다[3].

2.4. 광탄성 프린지 위상이동법

원형편광기는 Fig. 2와 같이 2개의 선형편광판과 2개의 4분파판으로 구성되어 있다.

선형편광판을 P 와 A , 4분파판을 Q , 그리고 시편을 R 이라 하면, 광원으로부터 원형편광판의 배열은 $PQRQA$ 로 나타낼 수 있다.

광탄성 프린지 8단계 위상이동법(8-step phase shifting method)은 Table 1과 같이 편광판과 첫 번째 4분파판을 고정시킨 상태에서 두 번째 4분파

판과 검광판만을 회전시켜 얻은 8개의 프린지 패턴을 이용한다[4,5].

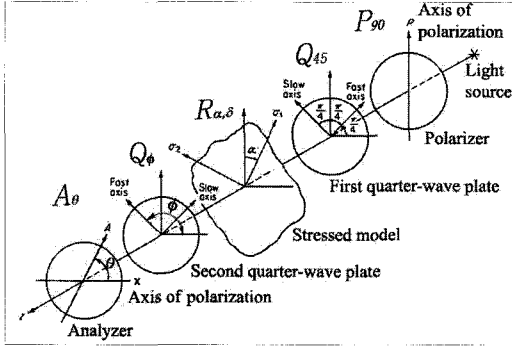


Fig. 2 Circular polariscope (dark-field setup)

각각의 편광판 배열에 따른 광강도는 Table 1에 나타낸 식과 같으며, $\Delta = 2\pi N$ 의 관계를 갖는다. Table 1의 편광판 배열은 1개의 4분파판과 검광판만 회전하여 프린지패턴을 얻을 수 있다는 장점이 있다. Table 1에 나타낸 광강도에 관한 식으로부터 등경선의 각, 즉 주응력 방향에 대한 각도는

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{I_5 - I_6}{I_1 - I_2} \right) \quad (10)$$

또한, 등색 프린지 차수는 다음 식과 같다.

$$N = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{(I_1 - I_2) \cos 2\alpha + (I_5 - I_6) \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} [(I_4 - I_3) + (I_8 - I_7)]} \right\} \quad (11)$$

3. 실험 및 해석

3.1. 광탄성 시험편 재질 및 형상

광탄성 실험법에 의한 하이브리드 응력장 해석을 위하여 Fig. 3과 같이 중심부에 원형 구멍이 있는 단축 인장하중을 받는 광탄성 시험편을 택하였다. 시험편의 재질은 기계가공성이 우수한 폴리카보네이트 계열인 PSM-1[6]이고, 두께 (t)는 3.175 mm이며, 재료의 프린지 상수(f_o)는 7005 N/m, 탄성계수(E)는 2482 MPa, 푸아송비(ν)는 0.38이다. 원공 판 인장시험에 $P=318$ N의 힘을 가하여 나타나는 등색 프린지패턴으로부터 응력장을 해석하였다.

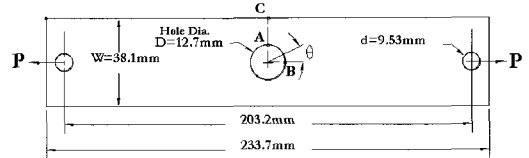


Fig. 3 Finite-width uniaxially loaded tensile plate containing an circular hole.

원형 편광기에서 Table 1과 같이 편광판의 축을 90°, 첫 번째 4분파판의 고속축을 45°로 고정 시킨 후 두 번째 4분파판과 검광판만을 정확한 각도로 조절해가며 얻은 프린지패턴은 Fig. 4와 같다. Table 1 과 Fig. 4로부터 I_3 와 I_7 은 암시야 배열 (dark field), 그리고 I_4 와 I_8 은 명시야 배열(light

Table 1 Polariscope configuration and output intensities of 8-step phase-shifting method

No.	Configuration	Output Intensity	Fringe Pattern
1	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{45} A_{45}$	$I_1 = \frac{K}{2} (1 + \cos 2\alpha \sin \Delta)$	None
2	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{45} A_{45}$	$I_2 = \frac{K}{2} (1 - \cos 2\alpha \sin \Delta)$	None
3	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{45} A_0$	$I_3 = \frac{K}{2} (1 - \cos \Delta)$	Circular Polariscope Dark Field
4	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{45} A_0$	$I_4 = \frac{K}{2} (1 + \cos \Delta)$	Circular Polariscope Light Field
5	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_0 A_0$	$I_5 = \frac{K}{2} (1 + \sin 2\alpha \sin \Delta)$	None
6	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{90} A_{90}$	$I_6 = \frac{K}{2} (1 - \sin 2\alpha \sin \Delta)$	None
7	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_0 A_{45}$	$I_7 = \frac{K}{2} (1 - \cos \Delta)$	Circular Polariscope Dark Field
8	$P_{90} Q_{45} R_{\alpha, \Delta} Q_{90} A_{45}$	$I_8 = \frac{K}{2} (1 + \cos \Delta)$	Circular Polariscope Light Field

field)에서 등색프린지를 나타내며, 구멍의 광강도로부터 쉽게 판별할 수 있다.

이들 프린지패턴으로부터 식 (11)을 이용하여 계산된 프린지 위상맵은 Fig. 5와 같다.

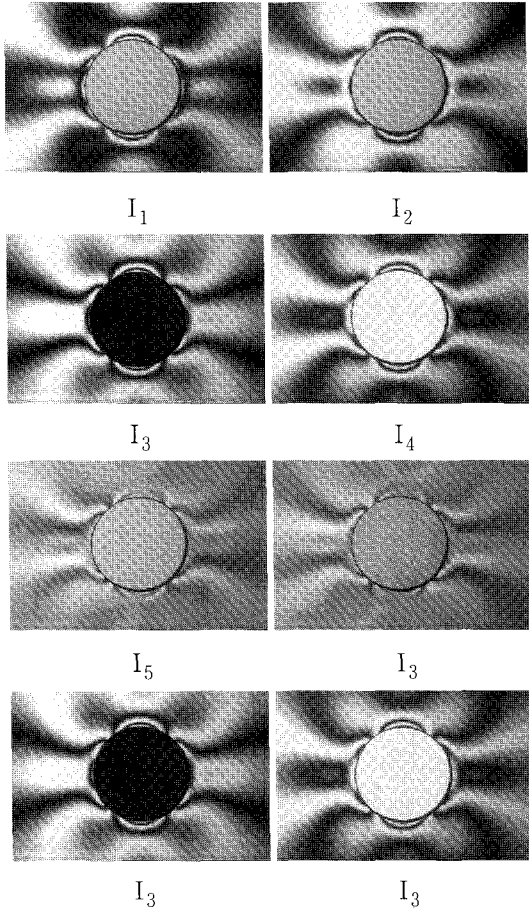


Fig. 4 Fringe patterns of a tensile plate containing a circular hole obtained by 8-step phase shifting method (P=318 N)

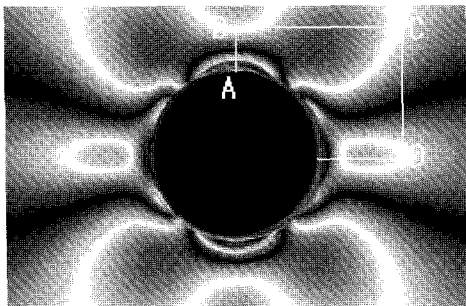


Fig. 5 Isochromatic fringe phase map obtained from 8 fringe patterns.

3.2. 유한요소 해석

Fig. 3에 나타난 시편으로부터 원형구멍주위의 응력을 계산하기 위하여 유한요소법을 사용하였다. 상용유한요소 프로그램인 ABAQUS[7]를 이용하였으며, Fig. 6과 같이 모델링 하였다. 해석에 사용된 물성치는 3.1절의 시험편 재질과 동일하며, 8노드 사변형 요소(8 node quadrilateral element)를 사용하였다.

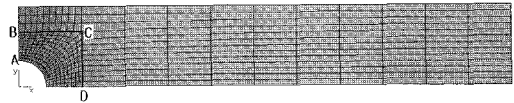


Fig. 6 ABAQUS discretization of one-quarter plate (306 elements and 1001 nodes) of Fig. 3.

Fig. 5에 나타난 A-B, B-C 및 C-D 선상에서 광탄성 프린지 위상이동법으로 측정된 등색프린지 분포를 Fig. 6에 표시된 동일 선상에서 유한요소법으로 얻은 결과와 비교하여 Fig. 7에 나타냈다. Fig. 6에 나타난 선에서 유한요소법으로부터 얻은 주 응력성분을 식 (6)에 대입하여 등색프린지 차수를 계산하였다.

Fig. 7(a)에서 수평축은 구멍중심으로부터 y방향의 거리, Fig. 7(b)의 수평축은 Fig. 5의 점 B로부터 C까지 거리, 그리고 Fig. 7(c)의 수평축은 Fig. 5의 점 C로부터 D까지의 거리를 의미한다.

3.3. 응력함수 항의 수에 따른 해석

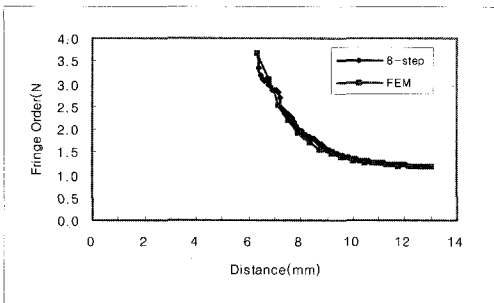
광탄성 프린지 위상이동법으로 측정된 프린지차수는 Fig. 7에서 보인 바와 같이 유한요소 결과와 서로 잘 일치하였다. 본 실험에서는 Fig. 6에 나타난 A-B, B-C 및 C-D 선상의 광탄성 프린지 위상이동법으로 측정된 데이터를 이용하여 하이브리드 응력함수를 비선형 최소자승법으로 결정하였다.

구멍주위의 하이브리드 응력장을 계산하기 위하여 Fig. 5에 표시된 선에서 측정된 프린지 데이터를 사용하였다. 원형구멍 중심으로부터 BC선까지의 거리는 13 mm, CD선의 길이는 15 mm이다.

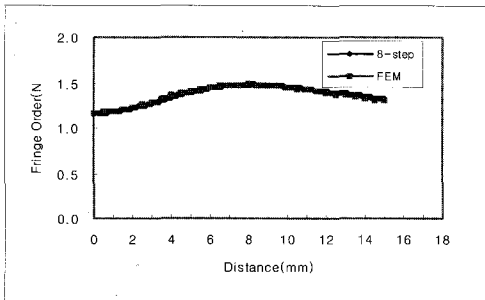
입력한 데이터 개수는 32개로서, AB선에서는 4개, BC선에서는 14개, CD선에서는 14개의 데이터를 사용하였다. 비선형 최소자승법을 이용하여 응력함수에 관한 식 (2), (3)의 항의 수(m)에 따른 계

수(b_k, c_k)를 계산한 후, 이들을 다시 식 (1)에 대입하여 응력성분을 구하였다. 해석결과의 타당성을 보일 수 있도록, 식 (1)의 응력성분을 다시 식 (7)에 대입하여 계산된 광탄성프린지를 실제의 프린지와 비교하였다. Fig. 8의 좌측은 실제의 프린지패턴이고, 우측은 식 (2)와 (3)의 급수형 응력함수에서 항의 수를 $m=3, 5, \dots, 11$ 로 변화시켰을 때 구한 응력성분으로부터 계산된 프린지패턴이다. Fig. 9에서는 실제의 프린지와 계산된 프린지의 비교가 명확하도록 Fig. 8을 세선처리하여 나타냈다[8]. 응력함수의 항의 수(m)에 따라 계산된 프린지는 Fig. 8 및 Fig. 9에서 보인 바와 같이 급수형 응력함수의

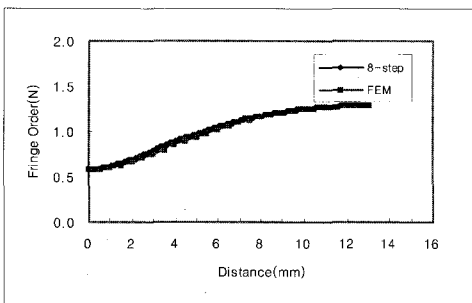
항의 수에 관계없이 서로 잘 일치하였다. 그러나 Fig. 9의 우측 상단에 있는 프린지 루프는 항의 수가 증가되면 점점 크게 됨을 관찰할 수 있다.



(a) Line A-B

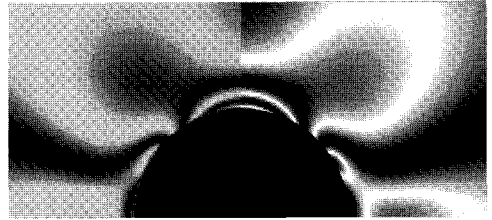


(b) Line B-C



(c) Line C-D

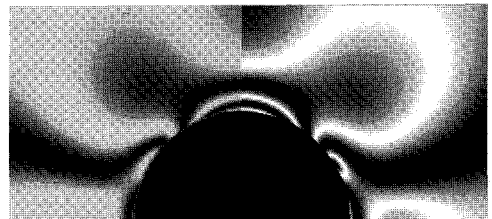
Fig. 7 Fringe order distributions along lines A-B, B-C and C-D indicated in Figs. 5 and 6



(a) $m=3$



(b) $m=5$



(c) $m=7$

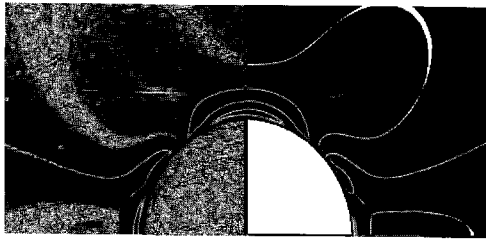


(d) $m=9$

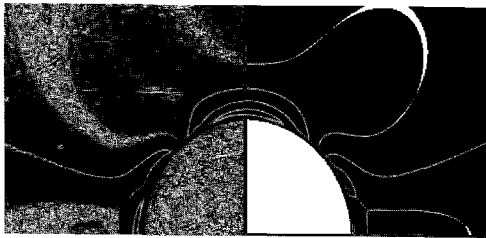


(e) $m=11$

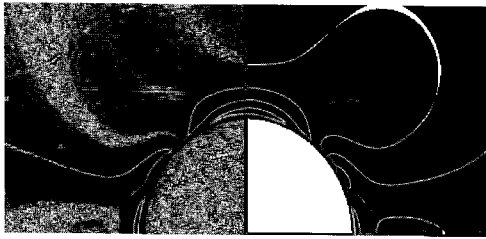
Fig. 8 Actual fringe patterns (left half) and reconstructed (right half) fringe patterns for different number of terms (m) of series type stress function ($P=318 N$)



(a) m=3



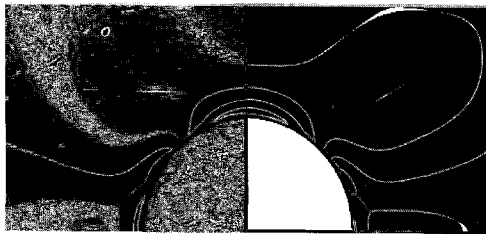
(b) m=5



(c) m=7



(d) m=9



(e) m=11

Fig. 9 Sharpened fringe lines from actual (left half) and reconstructed (right half) fringes (P=318 N)

Table 2 Variation of stress concentration factor (K_t) and standard deviation(SD) for different number of terms(m) of series type stress function

Number of Terms(m)	K_t	SD
3	3.41	0.99
5	3.38	0.78
7	3.41	0.38
9	3.43	0.39
11	3.34	0.47

해석된 결과에 대해 정량적인 비교가 가능하도록 각각의 측정된 데이터위치에서 실제프린지 차수 (N_{exp})와 계산된 프린지 차수(N_{cal})의 상대오차(E)를 계산하였다. 또한, 응력함수의 항의 수(m)에 따라 계산된 프린지가 실제의 프린지에 일치되는 정도의 변화를 비교하기 위하여 상대오차에 대한 표준편차 (standard deviation : SD)를 계산하였다.

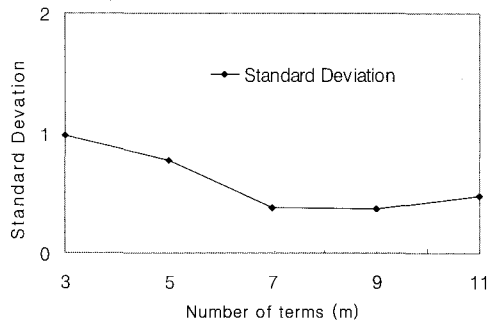


Fig. 10 Variation of standard deviation (SD) for different number of terms (m) of series type stress function

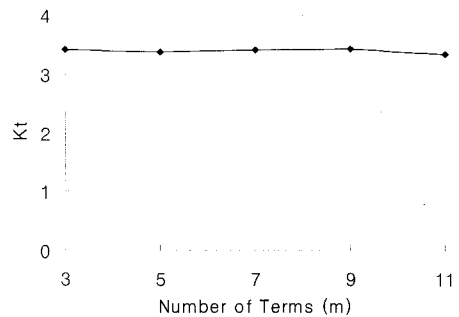


Fig. 11 Variation of stress concentration factor (K_t) for different number of terms (m) of series type stress function

응력함수의 항의 수(m)를 3에서 11까지 변화시켰을 때 얻은 응력집중계수 (K)와 퍼센트오차에 대한 표준편차 (SD)를 계산하여 얻은 결과는 Table 2, Fig. 10 및 11 과 같다.

Table 2와 Fig. 10에서 보인 바와 같이 급수형 응력함수의 항의 수가 $m=7, 9$ 에서 표준편차가 가장 작게 나타났다.

Fig. 12는 $m=9$ 에서 Fig. 3에 나타낸 구멍 원주상에서 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 일 때 접선 응력(σ_θ)을 하이브리드 응력해석 방법과 유한요소법으로 구한 응력을 공칭응력(σ_0)으로 무차원화시킨 후 그래프로 나타냈다. 하이브리드법과 유한요소법으로 구한 원형 구멍 원주상의 접선응력은 Fig. 12에서 보인바와 같이 서로 근접하였다. 하이브리드법과 유한요소법으로 구한 응력집중계수는 3.42와 3.48로 2% 이내로 일치하였다.

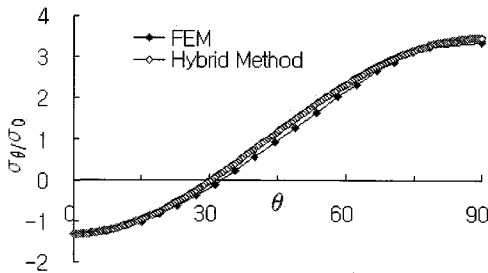


Fig. 12 Normalized tangential stress on the circular hole boundary

4. 결론

본 연구에서는 인장하중을 받는 판재의 원형구멍 주위의 응력장을 광탄성 실험에 의한 등색프린지 데이터와 급수형 등각사상 함수를 이용한 하이브리드 기법으로 구멍주위의 응력을 해석하였다. 본 연구로부터 얻은 결론을 요약하면 다음과 같다.

- (1) 광탄성 실험에 의해 구멍으로부터 떨어진 위치에서 위상이동법으로 측정된 광탄성 프린지 데이터를 이용한 하이브리드 기법으로 계산한 구멍주위의 접선응력은 유한요소 계산결과와 근접하였다.
- (2) 하이브리드법과 유한요소법으로 구한 응력집중계수는 3.42와 3.48로 2%이내로 서로 일치하였다.

본 연구에서는 실험결과의 타당성을 정성적으로 입증하기 위하여 실제의 프린지와 하이브리드 응력

장 해석에 의해 계산된 프린지를 서로 비교하였으며, 정량적인 비교를 위하여 측정 위치에서 입력된 프린지와 계산된 프린지값의 상대오차의 표준편차를 응력함수의 항의 수에 따라 분석하였다. 본 실험에 이용된 광탄성 위상이동법을 이용하면 임의의 선상에서 프린지치수를 편리하게 측정할 수 있으므로 광탄성 실험에 많이 활용될 것으로 사료된다.

참고문헌

- [1] J. W. Dally and W. F. Riley, *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill, Inc., (1991)
- [2] G. D. Gerhardt, "A hybrid/finite element approach for stress analysis of notched anisotropic materials," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51, pp. 804-810, (1984)
- [3] T. H. Baek, M. S. Kim, Rhee J. R and R. E. Rowlands, "Hybrid stress analysis of perforated tensile plates using multiplied and sharpened photoelastic data and complex-variable techniques", *JSME International Journal, Series A*, Vol. 43, No. 4, pp. 327-333, (2000)
- [4] T. H. Baek and M. S. Kim, "Test and evaluation of newly built multi-purpose polariscope," *Key Engineering Materials*, Vol. 321, pp. 81-86, (2006)
- [5] T. H. Baek, M. S. Kim, Y. Morimoto and M. Fujigaki, "Separation of isochromatics and isoclinics from photoelastic fringes in a circular disk by phase measuring technique," *KSME International Journal*, Vol. 16, No. 2, pp. 1207-1213, (2002)
- [6] Photoelastic Division, Measurement Group, Inc., Raleigh, NC 27611, USA.
- [7] ABAQUS/Standard, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, USA, <http://abaqus.com>
- [8] T. H. Baek and C. P. Burger, "Accuracy improvement technique for measuring stress intensity factor in photoelastic experiment," *Key Engineering Materials*, Vol. 51-52, pp. 63-68, (1991)