
슬라이딩모드와 LMI를 이용한 강인 H_∞ 제어

김수진* · 김민찬* · 박승규* · 안호균* · 곽근평* · 윤태성*

Robust H_∞ Control Using Sliding Mode and LMI

Su-Jin Kim* · Min-Chan Kim* · Seung-Kyu Park* · Ho-Kyun Ahn* · Gun-Pyong Kwak* · Tae-Sung Yoon*

이 논문은 2006년도 창원대학교와 창원대학교 공작기계기술연구센터의 연구비 지원에 의한 것입니다

요 약

H_∞ 제어기는 외란이나 잡음에 대해서 강인한 성능을 가지고 있지만 파라미터 불확실성이 존재하면 제어 입력을 구하기가 쉽지 않으며 불확실성의 영향에 따라서 제어 성능에 큰 차이를 보인다. 하지만 슬라이딩 모드 제어는 파라미터 불확실성에 대하여 우수한 강인성을 가지고 있는 제어 기법이다. 그러므로 본 논문에서는 슬라이딩 모드 제어 기법을 도입하여 LMI를 이용한 H_∞ 제어기의 강인성을 향상시킬 수 있는 제어 기법을 제안한다.

ABSTRACT

H_∞ controller, which shows robustness for disturbances and noises, can not be used in the case of uncertain system parameters. Even if the H_∞ controller can be designed for the parameter uncertain system, its performance can be deteriorated. Therefore, in this paper, the robustness of H_∞ controller is improved by using the SMC(Sliding Mode Control). The LMI based H_∞ controller is designed first and then SMC controller is added.

키워드

H_∞ control, Linear Matrix Inequality, Sliding Mode Control

I. 서 론

슬라이딩모드 제어(Sliding Mode Control)는 강인제어 기법으로 우수한 성질을 가지고 있다.[1,2] 슬라이딩모드 제어에서는 제어동특성이 슬라이딩평면에 의해서 결정되기 때문에 다른 제어이론과 결합되기 위해서는 슬라이딩평면이 슬라이딩모드제어 이외의 제어기법으로 제어된 계통의 동특성을 가져야만 한다. 참고문헌[3]에

서는 가상의 상태를 이용함으로써 슬라이딩 평면이 최적제어기의 특성을 가질 수 있도록 하였다. 이는 최적제어이론과 슬라이딩모드제어가 결합되어 강인한 최적제어기로 거듭날 수 있다는 것을 의미한다. 참고문헌[4]에서는 참고문헌에서 제안한 슬라이딩모드제어를 일반적인 강인 제어기와 결합하였다.

본 연구에서는 LMI(Linear Matrix Inequality : 선형행렬부등식)를 이용한 H_∞ 제어기의 성능을 SMC를 이용

하여 향상시키고자 한다. SMC가 대처할 수 있는 불확실성의 조건은 정합조건을 만족시키는 것이므로 이러한 불확실성에 대해서는 SMC가 강인한 특성을 갖고 정합조건을 만족하지 않는 불확실성에 대해서는 H_∞ 제어가 강인한 특성을 보임으로써 전체적으로 불확실성에 대한 강인성이 향상됨을 보인다. 결과적으로 H_∞ 제어와 슬라이딩 모드 제어의 장점을 가질 수 있는 제어가 구성된다.

II. 문제 설정

다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, 파라미터 불확실성 ΔA 와 외란 w 는 다음과 같은 정합조건을 만족시키며 그 크기가 제한되어 있다.

$$\text{rank}([B_u : \Delta A : B_w]) = \text{rank} B \quad (2)$$

위의 조건을 만족하면 식(1)은 다음과 같은 식으로 변환이 가능하다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_u h(t) \quad (3)$$

여기서, $h(t) = \Delta \bar{A} + B_w \bar{w}(t)$ 이다.

기존의 슬라이딩 평면은 다음과 같은 형태를 따른다.

$$s(x) = c_n x_n + c_{n-1} x_{n-1}(t) + \dots + c_1 x_1(t) \quad (4)$$

여기서, $C = [c_1 \dots c_n]$ 과 c_1, \dots, c_n 는 슬라이딩 모드 동특성이 안정할 수 있게 주어진다.

슬라이딩 평면은 원래 계통의 n 차원 동특성과는 다른 $(n-1)$ 차의 슬라이딩 평면을 가진다. 이것은 SMC가 다른 제어기법과 결합되어 사용할 수 없다는 것을 의미한다.

그러나 가상의 상태를 추가하여 슬라이딩 평면을 결정하면 이러한 단점을 제거할 수 있다. 본 연구에서는 H_∞ 제어기의 성능과 SMC의 성능을 결합하는 것을 목적으로 가상 상태를 가진 SMC를 사용하게 된다. 기존의 논문들에서는 SMC와 결합되는 제어기법을 불확실성이 존재하지 않는 공칭계통에 대한 입력에 제한함으로써 개념상으로 강인제어기의 도입을 제한하는 우를 범하였다. 본 논문에서 SMC와 H_∞ 제어기와의 결합을 다음과 그림과 같이 명확하게 한다.

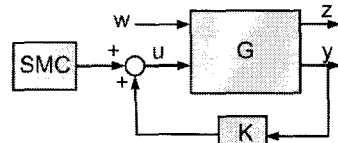


그림 1. SMC와 H_∞ 제어기의 결합에 대한 개념도
Fig. 1 Concept diagram of combination of SMC and H_∞ controller

위의 그림에서 보면 H_∞ 제어기법과 SMC의 결합은 명확하게 H_∞ 제어기법에 의한 제어 입력향과 SMC 제어 입력향의 합이다. 설계순서는 우선 H_∞ 제어기를 설계하여 적용시킨 후, 그 제어성능을 그대로 유지시키도록 슬라이딩평면을 설계하여 그 슬라이딩평면에 상태들이 머무를 수 있도록 SMC입력을 구하는 것이다. 그러므로 중요한 문제는 H_∞ 제어기에 의해서 제어된 계통의 동특성을 그대로 유지시킬 수 있는 슬라이딩평면을 구하는 것이다.

III. 가상 상태를 이용한 슬라이딩평면의 구성

H_∞ 제어기에 의해 제어된 계통의 성능을 그대로 유지하는 슬라이딩평면을 구성하기 위해서는 슬라이딩 평면의 동특성의 차수가 전체계통의 동특성의 차수와 같아야 되므로 가상 상태가 필요하다. 원래계통의 동특성은 불확실성이 존재하나 슬라이딩평면은 불확실성의 영향이 없는 바람직한 동특성이 되어야함으로 H_∞ 제어입력이 인가된 계통에 대해서 불확실성을 고려하지 않고 슬라이딩 평면을 구성한다. 불확실성은 슬라이딩

평면에 고려할 수 없는 사항이다. 그러나 결과적으로 보면 정합조건이 만족되지 않는 불확실성은 결국 슬라이딩 평면에 나타나게 되며 이것은 H_∞ 제어기가 처리하도록 되어있다.

3.1. H_∞ 제어기의 구성

H_∞ 제어기는 다음의 H_∞ 노름을 최소화시키는 제어기이다

$$\|T_{zw}\|_\infty = \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sup \sigma_{\max} [T_{zw}(j\omega)] \quad (5)$$

여기서, $T_{zw}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl}$ 이다.

H_∞ 제어기의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= K_{11}y + K_{12}v \\ \dot{v} &= K_{21}y + K_{22}v \end{aligned} \quad (6)$$

제어기가 포함된 전체시스템의 동특성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{cl} &= A_{cl}x_{cl} + B_{cl}w \\ \bar{z} &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl}w \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, $x_{cl} = [x^T, v^T]^T \in R^{n+k}$

$$C_{cl} = C_r + D_r K C_0, \quad D_{cl} = D_{zw} + D_r K D_0,$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{cl} = A_0 + B_0 K C_0, \quad B_{cl} = B_0 K D_0 + B_r,$$

$$C_r = [C_z \ 0], \quad D_r = [D_{zu} \ 0]$$

위의 제어기는 다음의 LMI 조건에서 구해진다.

$$X > 0, \quad \begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & * & * \\ B_{cl}^T & -\gamma I & * \\ C_{cl}X & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

을 K, X 에 관한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} A_0X + * & * & * \\ S_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ D_d \end{bmatrix} K [C_0X, D_0, 0] + * < 0 \quad (9)$$

결국 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 를 보장할 필요충분조건은 다음 LMI와 $\text{rank}(I - XY) = 0$ 를 만족하는 해가 존재하는 것이다. 여기서 *는 대칭에 의해 결정할 수 있는 행렬블록이다.

$$\Phi_\infty^T \begin{bmatrix} A_0X + * & * & * \\ B_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Phi_\infty < 0,$$

$$\Theta_\infty^T \begin{bmatrix} YA_0 + * & * & * \\ B_r^TY & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Theta_\infty < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

여기서 $\Phi_\infty, \Theta_\infty$ 는 $[B_0^T, 0, D_r^T]^T, [C_0, D_0, 0]^T$ 의 orthogonal complement(주어진 $A \in R^{n \times m}$ 에 대하여 column을 A^T 의 null space의 basis vector로 갖는 행렬)를 의미한다.

3.2. H_∞ 제어기가 포함된 공칭 계통의 동특성을 갖기 위한 슬라이딩평면의 구성

H_∞ 제어기의 특성을 유지하는 슬라이딩평면의 구성은 다음과 같은 단계를 거친다.

우선 제어기가 포함된 전체시스템의 상태방정식에서 외란을 고려하지 않은 공칭계통을 다음과 같은 가제어 표준형으로 변환한다.

$$\dot{\bar{z}}_0(t) = A_c z_0(t) \quad (11)$$

여기서,

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_n \end{bmatrix}$$

위의 공칭계통을 바탕으로 가상 상태는 다음과 같이

정의된다.

$$\dot{z}_v(t) = -\alpha_n z_v(t) - \alpha_{n-1} z_n(t) - \dots - \alpha_2 z_3 - \alpha_1 z_2 \quad (12)$$

가상 상태를 포함한 치수가 증가된 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + \Delta A)x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ \dot{z}_v(t) &= -\alpha_n z_v(t) - \alpha_{n-1} z_n(t) - \dots - \alpha_2 z_3 - \alpha_1 z_2 \end{aligned} \quad (13)$$

위의 차수가 증가된 계통에 대한 슬라이딩 평면은 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{aligned} s_n(z, t) &= z_v(t) + \alpha_n z_n(t) \\ &+ \alpha_{n-1} z_{n-1}(t) + \dots + \alpha_1 z_1(t) = 0 \\ &= z_v(t) + Kz(t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, $K = [\alpha_n \ \alpha_{n-1} \ \dots \ \alpha_2 \ \alpha_1]$ 이다.

초기 가상 상태는 다음과 같이 결정한다.

$$z_v(t) = -\alpha_n z_n(t_0) - \alpha_{n-1} z_{n-1}(t) - \dots - \alpha_1 z_1(t_0) \quad (15)$$

위의 가상 상태의 초기치는 초기시간부터 상태들이 슬라이딩평면에 머무르게 함으로써 도달기간문제를 없앨 수 있다.

정리 1: 만약 계통(1)의 상태가 식(14)의 슬라이딩 평면 위에 있다면 계통(1)의 상태는 정합조건을 만족시키는 불확실성이 제거된 계통이 H_∞ 제어입력에 의해 제어되는 동특성을 갖는다.

증명: 참고문헌[3] 참고

이제 새롭게 구성된 슬라이딩평면상에 상태들이 존재하도록 하는 SMC 입력 $u(t)$ 을 구하여 H_∞ 제어입력에 더해주면 된다.

3.3. SMC입력의 결정

다음과 같은 Lyapunov 함수의 후보함수를

$$V(s) = \frac{1}{2} s(x)^2$$

고려하면 다음과 같은 슬라이딩 모드를 보장하는 도달 조건을 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dV(s)}{dt} &= s \dot{s} = s(\dot{z}_v(t) + K \dot{z}(t)) < 0 \\ &= s(\dot{z}_v(t) + K(A \dot{z}(t) + B u_u(t) + B h(t))) < 0 \\ &= s(-k_n z_v(t) + K B u(t) + K B h(t)) < 0 \end{aligned}$$

그러므로 제안된 슬라이딩 모드 제어의 입력은 다음과 같이 결정된다.

$$u_u(t) = (KB)^{-1} (k_n z_v(t) - K B h(t))_{\max} \cdot \text{sgn}(s) \quad (16)$$

IV. 예제 및 시뮬레이션

아래와 같은 3차 계통을 고려하자.[5]

$$A = \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix},$$

$$B_u = \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix},$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{yw} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_z = [1 \ 1 \ 0], \quad D_{zu} = 0, \quad D_{zw} = 0$$

제어기 차수를 0으로 하고 $y = 0$ 일 때의 출력제한 H_∞ 제어기는 다음과 같다.

$$u_H = [0.1249 \ 0.3236]$$

가상의 상태는 다음과 같다.

$$\tilde{x}_v = 0.1271x_2 + 0.3044x_3 - 1.0544x_v$$

슬라이딩평면은 다음과 같다.

$$s = x_v - 0.1271x_1 - 0.3044x_2 + 1.0544x_3$$

슬라이딩모드 제어입력은 다음과 같다.

$$u_u = x_v - 0.1271x_1 - 0.3044x_2 + 1.0544x_3 - \Delta_{\max} \text{sign}(S)$$

아래의 그림들은 위의 수치 예에 대한 시뮬레이션 결과이다. 시스템에 인가된 저주파 외란은 그림 2에 나타내었다.

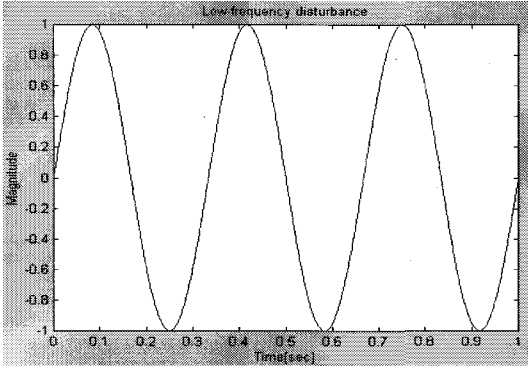


그림 2. 저주파 외란 (3[Hz])
Fig. 2 Low-frequency disturbance (3[Hz])

그림 3은 외란만 존재하는 경우와 외란과 시스템 불확실성이 존재하는 경우에 대해 H_{∞} 제어기를 설계했을 때 외란대 출력의 보드선도를 나타낸 것이다. 최대 크기가 큰 보드선도가 불확실성이 존재할 때의 보드선도이다. 불확실성이 존재하면 외란대 출력의 H_{∞} 노름이 커짐을 알 수 있다.

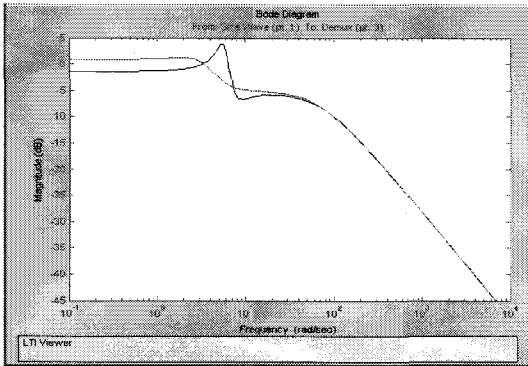


그림 3. 외란이 존재할 때와 외란과 시스템 불확실성이 존재할 때의 H_{∞} 제어기의 보드선도 비교
Fig. 3 Comparison of Bode magnitude of H_{∞} controller between disturbance and disturbance with uncertainty.

그림 4는 본 연구에서 제안한 SMC를 도입한 H_{∞} 제

어의 외란대 출력의 H_{∞} 노름 $\|T_{zw}\|_{\infty}$ 를 살펴보기 위하여 시뮬링크의 선형 해석툴을 이용하여 크기선도를 비교해 본 결과이다. 외란만 존재할 때와 시스템 불확실성까지 존재하는 두 경우의 Bode-magnitude 선도를 비교하였다. 그림 3.과 비교하여 전체적으로 크기가 많이 감소하였음을 알 수 있다. 파라미터의 불확실성이 존재하더라도 그 영향은 매우 감소한 것을 확연히 알 수 있다.

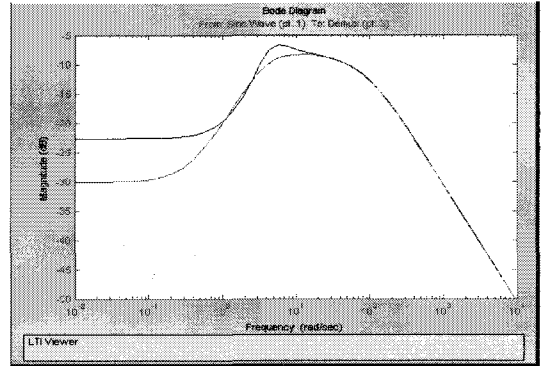


그림 4. 외란이 존재할 때와 외란과 시스템 불확실성이 존재할 때의 제안된 H_{∞} 제어기의 보드선도 비교

Fig. 4 Comparison of Bode magnitude of the proposed H_{∞} controller between disturbance and disturbance with uncertainty.

V. 결론

H_{∞} 제어기는 시스템 모델링이 정확할수록 좋은 결과를 내지만 불확실성이 존재하면 그 성능이 나빠진다. 이에 SMC와 H_{∞} 제어기를 결합함으로써 시스템이 정합 조건을 만족할 때는 강인성이 더 뛰어난 슬라이딩 모드의 특성을 지니며 만족하지 않을 때는 H_{∞} 제어기의 특성을 가지도록 하여 전체적으로 강인성을 향상시켰고 시뮬레이션을 통해서 그 유효성을 확인하였다. 또한 기존의 가상 상태를 이용한 SMC에 대한 개념을 새롭게 정리함으로써 슬라이딩평면의 구성과정을 용이하게 하였고 SMC와 결합할 수 있는 제어기의 범위를 LMI를 이용한 H_{∞} 제어기까지 확장하였다. 제어기의 구성이 단계별로 정리되어 있어 SMC의 효과를 뚜렷하게 나타낼 수 있는 장점을 갖도록 하였다.

참고문헌

- [1] V. I Utkin, Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems, Mir Publishers, Moscow, 1978.
- [2] J. Y. Hung, W. Gao, J. C. Hung, "Variable structure control : A survey," IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol.40, No.1, pp. 2-22, 1993.
- [3] 박승규, 안호균, "가상 상태를 이용한 새로운 슬라이딩 모드 제어기," 제어.자동화.시스템공학회 논문지 제5권 제5호, pp.505-510, 1999.
- [4] 성재봉, 권성하, 박승규, 정은태, "정합조건을 만족하지 않는 선형시스템에 대한 슬라이딩 모드제어," ICASE 논문지, 제7권, 제3호, pp. 193-197, 2001.
- [5] 최한호, "LMI기반 제어기 설계를 위한 간단한 지침서," 제어자동화시스템공학논문지, 제11권, 제2호, pp.54-66, 2005.
- [6] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, <http://cs.ele.tue.nl/SWeiland/lmi.html>.

저자소개

김 수 진 (Su-Jin Kim)



2004년 창원대학교 전기공학과 졸업(공학사)
2006년 창원대학교 전기공학과 졸업(공학석사)

※ 관심분야 : 제어 알고리즘, 시스템제어, Motion Controller

김 민 찬 (Min-Chan Kim)



1996년 창원대학교 전기공학과 졸업(공학사)
1998년 창원대학교 전기전자 제어공학과 졸업(공학석사)

2003년 창원대학교 전기공학과 졸업(공학박사)
2006년~현재 창원대학교 BK21 연구교수
※ 관심분야 : H_∞ 제어, 슬라이딩모드제어, 적응제어, 시스템 모델링

박 승 규 (Seung-Kyu Park)



1984년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학사)
1986년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학석사)

1990년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학박사)
1995년~1996년 영국 Strathclyde대 visiting scholar
1990년~현재 창원대학교 전기공학과 교수
※ 관심분야 : 적응제어, 강인제어, 비선형제어

안 호 균 (Ho-Kyun Ahn)



1981년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학사)
1989년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학석사)

1992년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학박사)
1992년~현재 창원대학교 전기공학과 교수
※ 관심분야 : 전력전자, 전력변환, 대체에너지

곽 군 평 (Gun-Pyong Kwak)



1982년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학사)
1985년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학석사)

1990년 고려대학교 전기공학과 졸업(공학박사)
1990년~1997년 LG산전 연구소 CNC팀 팀장
1998년~현재 창원대학교 전기공학과 부교수
※ 관심분야 : 제어 알고리즘, Motion Controller

윤 태 성 (Tae-Sung Yoon)



1978년 연세대학교 전기공학과 졸업(공학사)
1980년 연세대학교 전기공학과 졸업(공학석사)

1988년 연세대학교 전기공학과 졸업(공학박사)
1994년~1995년 미 Vanderbilt대 방문교수
1989년~현재 창원대학교 전기공학과 교수
※ 관심분야 : 지능제어, 이동로봇제어