

고분자 공정에 적용할 수 있는 일반화된 공정-저장조 망구조 최적설계

이경범* · 이의수*

부경대학교 화학공학과
608-739 부산시 남구 용당동 산 100
*동국대학교 생명화학공학과
100-715 서울시 중구 필동 3가 26
(2006년 10월 22일 접수, 2007년 3월 9일 채택)

Optimal Design of Generalized Process-storage Network Applicable To Polymer Processes

Gyeongbeom Yi[†] and Euy-Soo Lee*

Department of Chemical Engineering, Pukyong National University, San 100 Yongdang-dong Nam-gu, Busan 608-739, Korea

*Department of Chemical Engineering, Dongguk University, 3 Ga 26 Pil-dong Jung-gu, Seoul 100-715, Korea

(Received 22 October 2006; accepted 9 March 2007)

요 약

사각파 모형은 회분식 공정-저장조 망구조의 최적설계에 성공적으로 적용되었다. 설계된 망구조는 재순환 흐름을 포함하는 회분식의 모든 생산 재고 및 분배 체계를 내포한다. 본 연구에서는 사각파 모형의 적용범위를 연속 또는 회분식 공정 뿐 만 아니라 반연속 공정에 까지 확대하려 한다. 이전의 연구에서는 원료조성이나 제품수율은 알려진 상수로 취급되었다. 본 연구에서는 이러한 제약이 완화되어 원료조성이나 제품 수율이 최적화 되어야 하는 독립변수로 취급된다. 이러한 수정은 정유공장에서 흔히 접하는 최적제품 배합문제를 취급할 수 있게 한다. 원료조성과 제품수율이 독립변수일 때 발생하는 많은 문제의 복잡성에도 불구하고 사각파 모형은 여전히 해석적인 최적용량 공식을 제공한다. 최적공정설계에 적용되는 본 연구의 유용성은 고밀도 폴리에틸렌 공장설계의 예를 통해 나타내었다. 연구결과를 토대로 모든 공정의 최적성을 비교할 수 있는 척도를 제시하였다. 이 척도는 다수의 공정의 성능을 직접 비교할 수 있게 하므로 공정의 상태를 진단하는 유용한 도구가 될 것이다. 공정의 비용이 유속의 제곱근에 비례한다는 결과는 공장설계에서 널리 알려진 6/10 경험법칙과 유사하다.

Abstract – The periodic square wave (PSW) model was successfully applied to the optimal design of a batch-storage network. The network structure can cover any type of batch production, distribution and inventory system, including recycle streams. Here we extend the coverage of the PSW model to multitasking semi-continuous processes as well as pure continuous and batch processes. In previous solutions obtained using the PSW model, the feedstock composition and product yield were treated as known constants. This constraint is relaxed in the present work, which treats the feedstock composition and product yield as free variables to be optimized. This modification makes it possible to deal with the pooling problem commonly encountered in oil refinery processes. Despite the greater complexity that arises when the feedstock composition and product yield are free variables, the PSW model still gives analytic lot sizing equations. The ability of the proposed method to determine the optimal plant design is demonstrated through the example of a high density polyethylene (HDPE) plant. Based on the analytical optimality results, we propose a practical process optimality measure that can be used for any kind of process. This measure facilitates direct comparison of the performance of multiple processes, and hence is a useful tool for diagnosing the status of process systems. The result that the cost of a process is proportional to the square root of average flow rate is similar to the well-known six-tenths factor rule in plant design.

Key words: Optimality, Lot-size, Semi-continuous, Pooling, Multitask, Polymer

1. 서 론

Yi와 Reklaitis[1]에서 사각파 모형이라 불리는 새로운 생산재고 해석 방법을 이용하여 병렬 회분식 공정-저장조 계의 최적설계식을

유도하였다. Yi와 Reklaitis[2]에서는 동 저자들에 의해 순차적인 다 단계 회분식 공정-저장조의 최적설계에 관한 최적설계식이 유도되었으며, 곧 재순환 흐름을 포함하는 비순차적인 망구조로 확대되었다[3]. 기존의 방법들에 대한 사각파 모형의 핵심적인 장점은 운전 용량과 시간에 관한 간단한 해석적인 해를 유도할 수 있다는 데 있다. 이러한 장점은 생산과 재무관리의 통합계에 대해서도 잘 발휘

[†]To whom correspondence should be addressed.
E-mail: gbyi@pknu.ac.kr

되었다[4]. 본 연구에서는 사각과 모형이 사용될 수 있는 물리적인 공장구조가 회분식 공정에서 다수의 작업을 수행하는 반연속식 공정을 포함하는 형태로 확장될 것이다. 반연속 공정은 HDPE, PP, LDPE, LLDPE, PVC, PS, ABS, CB, PB와 레진 같은 범용 고분자 생산공정에 흔히 적용되는 중요한 공정이다. 윤활기유공정, 용제공정과 철강산업에서 연주공정도 이 부류에 속한다. 원료조성과 제품수율이 변하는 경우는 정유와 석유화학 공정에서 매우 흔하다. 본 연구에서는 이러한 점을 반영하여 원료조성과 제품수율이 독립변수로 지정되었다. 반연속 공정의 생산계획 최적화는 공정시스템 분야에서 중요한 연구주제이다. 많은 혼합정수 선형계획 모형이 제시되어 있다[5, 6]. 본 연구에서는 반연속의 공정의 설계 및 운영의 최적성에 관한 이론적 측면을 다루고자 한다. 우리는 사각과 모형을 이용하여 다수의 제품을 생산하는 반연속 공정의 최적생산량 또는 최적생산시간에 대한 해석적 해를 유도할 것이다. 최적화의 목적함수는 순서의존적인 제품변환비용, 재고유지비용과 장치들의 자본투자비용을 최소화하는 것이다. 유도된 간단한 해를 바탕으로 어떤 공정에도 적용될 수 있는 최적설계의 척도와 간단한 준최적설계 절차가 제시될 것이다. 화학회사는 다양한 화학제품들을 생산하기 위한 여러가지 공정들을 보유하고 있다. 각각의 공정의 최적화 정도를 하나의 척도로 표현할 수 있다는 사실은 공정개선, 증설 및 운전 최적화 등의 작업의 순서를 결정하는데 큰 도움이 된다. 최적화 정도에 따른 공정의 등급화는 제한된 자원을 최적화가 가장 덜된 공정에 먼저 투여함으로써 가장 큰 기대효과를 낼 수 있다. 본 연구에서 제시된 방법은 제조공정 뿐만아니라 다수의 공장이나 분배센터 사이의 수송과정을 포함하는 공급사슬망 최적화에도 적용가능하다. 이는 수송과정이 물질의 변환이 없는 회분식 공정으로 해석될 수 있기 때문이다. 요약하면 본 연구에서 제시된 일반화된 공정-저장조 망구조는 회분식, 반연속식 공정 및 수송과정을 포함하는 대부분의 생산 재고 및 분배 계에 적용될 수 있다. 본 연구의 결과를 바탕으로 복잡계에 적합한 간단한 최적설계 절차가 제시된다. Yi와 Reklaitis[4]에서 다루었던 재물관리 및 현금흐름을 다루는 과정은 본 연구에서는 편의상 고려되지 않지만 쉽게 모형을 확장할 수 있다.

2. 최적화 모형과 Kuhn-Tucker 해

본 연구에서 사용되는 변수의 정의와 사용기호는 대부분 Yi와 Reklaitis[3]와 일치한다. 본 연구의 대상공정은 Fig. 1에 나타난 것처럼 회분식 또는 반연속 공정 $i \in I$ 들이다. 이 공정들은 다수의 작업을 순차적으로 수행하는데, Fig. 2에 나타난 것처럼 동일공정에서 진행되는 순차적 작업의 집합과 부호를 $n \in N(i)$ 으로 나타낸다. 작업은 $n = 1, 2, \dots, N$ 순으로 진행되며, 주기적으로 되풀이된다. 만약 한 공정에 한개의 작업밖에 없다면 본 연구의 결과는 Yi와 Reklaitis [3]의 결과와 일치한다. 공정의 원료는 저장조 $j \in J$ 로부터 공급되고, 다수의 제품이 생산되어 저장조로 보내 진다. 각 저장조는 한개의 물질만 저장한다고 가정하므로 $j \in J$ 는 물질의 부호와 일치한다. 각 작업은 각기 다른 원료를 사용하고 다른 제품을 생산한다. 공정 i 에 있는 작업 n 으로 가는 원료 j 의 유속을 F_{in}^j 이라 정의하고, 공정 i 에 있는 작업 n 으로부터 생산되는 제품 j 의 유속을 G_{in}^j 라고 정의한다. 원료조성과 제품 수율은 더이상 상수가 아니다. 공정 i 에 있는 작업 n 에 대한 물질수지식은 다음과 같다.

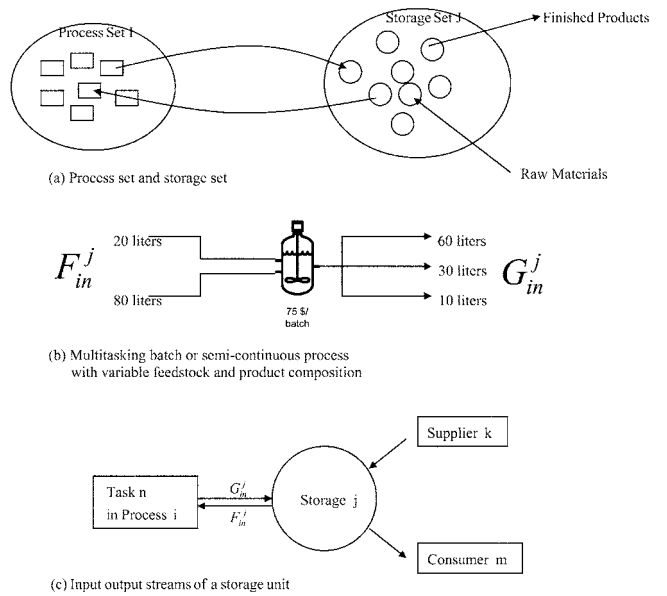


Fig. 1. General structure of batch-storage network.

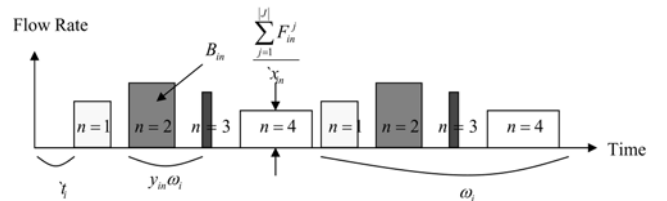


Fig. 2. Multitasking batch process.

$$\sum_{j=1}^M F_{in}^j = \sum_{j=1}^M G_{in}^j = \frac{B_{in}}{\omega_{in}} \tag{1}$$

여기서 B_{in} 과 ω_{in} 은 각각 공정 i 에서 작업 n 의 생산용량과 운전시간을 나타낸다. 각 공정에서 Fig 2에서 나타난 바와 같이 공통 생산 주기 ω_i 와 생산 시작 시간 τ_i 는 주요 운전변수이다. ω_i 에 대한 ω_{in} 의 비를 주기비 y_{in} 으로 나타낸다. 즉 $\omega_i = y_{in}\omega_i$ 로서, $\sum_{n=1}^M y_{in} = 1$ 이고, $0 \leq y_{in} \leq 1$ 이다. 주기비 y_{in} 은 최적화의 Kuhn-Tucker 조건을 풀 때 매개변수로 고려될 것이다. 사실 y_{in} 은 작업의 순서에 따라 값이 달라지므로 최적화 범위에 작업의 순서가 포함될 경우 변수로 고려되어야 한다. 공정 i 에서 작업 n 에 대한 원료주입 시작시간은 τ_{in} 으로 나타내고, 제품배출 시작시간은 t'_{in} 으로 나타낼 때, 다음 관계식이 성립된다.

$$t'_{in} = \tau_{in} + \Delta t_{in} \tag{2}$$

$$\tau_{in} = \tau_i + \omega_i \sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \tag{3}$$

여기서 Δt_{in} 은 원료주입과 제품배출 시작시간 차이로서 원료주입시간과 처리시간의 합이다. Δt_{in} 은 다른 변수의 임의의 함수가 될 수 있는데, 예를 들면, Yi와 Reklaitis[3]에서는 $\Delta t_{in} = \omega_{in}(1-x'_{in})$ 으로 지정되었다. 여기서 (x_{in}, x'_{in}) 은(원료주입) 제품배출 저장조 운전 시간분율로서 1 보다 같거나 작다. 이 관계식은 생산공정에 대해서

는 적절하지만 공급사슬망에서 수송과정에 대해서는 적절하지 않다. 수송과정에 대해서는 Δt_{in}^j 을 상수로 두는 것이 보다 적절하다. 저장조 j 에 대한 물질수지식은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in} + \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in} + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \quad \forall j \quad (4)$$

여기서 D_k^j 는 원료공급자 $k \in K(j)$ 로부터 구매된 물질 j 의 평균유속이고, D_m^j 은 소비자 $m \in M(j)$ 에게 판매되는 물질 j 의 평균유속이다. 배합문제의 제약식은 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{|J(i,n)|} \theta^j F_{in}^j = \theta \sum_{j'=1}^{|J'(i,n)|} G_{in}^{j'} \quad J(i,n) \cap J'(i,n) = \emptyset \quad \forall i, n \quad (5)$$

여기서 θ 는 원료물질 $j \in J(i, n)$ 의 물질이고, θ 는 제품물질 $j' \in J'(i, n)$ 의 물질이다. 구매한 원료물질의 흐름은 평균유속 D_k^j , 주기 ω_k^j , 시작 시간 t_k^j 과 저장조 운전 시간분율 x_k^j 에 의해 정의된다. 구매량은 $B_k^j = D_k^j \omega_k^j$ 이다. 최종제품의 판매흐름을 정의하는 평균유속 D_m^j , 주기 ω_m^j , 시작시간 t_m^j , 저장조 운전 시간분율 x_m^j 과 일회 판매량 $B_m^j = D_m^j \omega_m^j$ 은 모두 알려진 상수이다.

공정 i 에서 공통생산주기를 공유하는 다수의 작업은 사각파모형에 의해 바로 표현될 수 없다. 한 장치에 다수의 작업이 실행되는 경우의 물질 흐름은 Fig. 3에 나타난 바와 같이 주기적인 한 작업의 다수의 물질흐름으로 분해될 수 있다. 그러면 각 작업의 물질흐름에 대해서 사각파 모형의 특성을 이용하여 해석을 한 다음 그 결과를 더하면 다수의 작업에 대한 결과를 얻을 수 있다. 이러한 과정은 Fig. 4에 나타나는 것처럼 반연속 공정에 대해서도 적용된다. 결국 Yi와 Reklaitis[3]와 같은 방법으로 저장조 j 에 대한 재고량 $V^j(t)$ 을 표현할 수 있다. 저장조는 Fig. 2(c)에 나타난 바와 같이 원료공급자와 공정으로부터 들어오는 흐름과 소비자와 공정으로 나가는 흐름에 연결되어 있다. 재고량 $V^j(t)$ 는 다음과 같다.

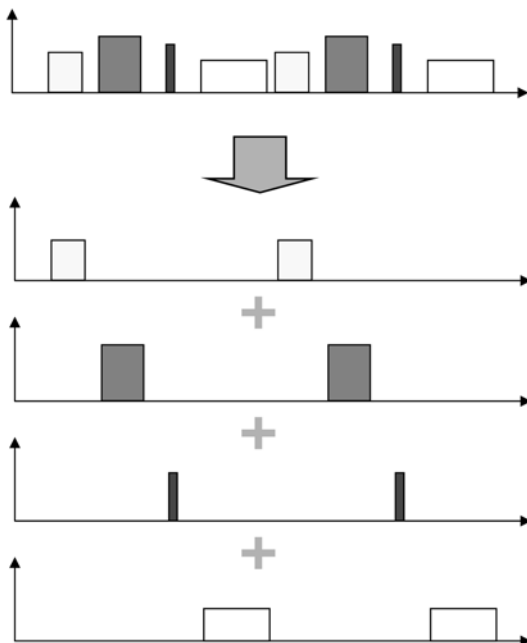


Fig. 3. Decomposition of multiple tasks into multiple flows of single task.

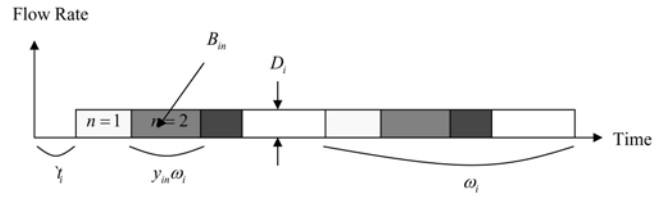


Fig. 4. Block operations of semi-continuous process.

$$\begin{aligned} V^j(t) = & V^j(0) \\ & + \sum_{k=1}^{|K(j)|} B_k^j \left[\text{int} \left[\frac{t-t_k^j}{\omega_k^j} \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_k^j} \text{res} \left[\frac{t-t_k^j}{\omega_k^j} \right] \right\} \right] \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (G_{in}^j \omega_{in}^j) \left[\text{int} \left[\frac{t-t_{in}^j}{\omega_i} \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_{in}^j y_{in}^j} \text{res} \left[\frac{t-t_{in}^j}{\omega_i} \right] \right\} \right] \\ & - \sum_{m=1}^{|M(j)|} B_m^j \left[\text{int} \left[\frac{t-t_m^j}{\omega_m^j} \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_m^j} \text{res} \left[\frac{t-t_m^j}{\omega_m^j} \right] \right\} \right] \\ & - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j \omega_{in}^j) \left[\text{int} \left[\frac{t-t_{in}^j}{\omega_i} \right] + \min \left\{ 1, \frac{1}{x_{in}^j y_{in}^j} \text{res} \left[\frac{t-t_{in}^j}{\omega_i} \right] \right\} \right] \end{aligned} \quad \forall j \quad (6)$$

여기서 $V^j(0)$ 는 초기 재고량이다. 재고 상한값, 재고 하한값과 평균 재고량은 누적흐름함수의 성질에 의해 계산되어 진다[2]. 재고 상한값 $\overline{V^j}$ 와 재고 하한값 $\underline{V^j}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{V^j} = & V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} (1-x_k^j) D_k^j \omega_k^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1-x_{in}^j y_{in}^j) G_{in}^j \omega_{in}^j - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j - \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \end{aligned} \quad \forall j \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \underline{V^j} = & V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j \\ & - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1-x_{in}^j y_{in}^j) F_{in}^j \omega_{in}^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1-x_m^j) D_m^j \omega_m^j \\ & + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \end{aligned} \quad \forall j \quad (8)$$

평균 재고량 $\overline{V^j}$ 는

$$\begin{aligned} \overline{V^j} = & V^j(0) + \sum_{k=1}^{|K(j)|} \frac{(1-x_k^j)}{2} D_k^j \omega_k^j - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j \\ & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \frac{(1-x_{in}^j y_{in}^j)}{2} G_{in}^j \omega_{in}^j - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j \\ & - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \frac{(1-x_{in}^j y_{in}^j)}{2} F_{in}^j \omega_{in}^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in}^j t_{in}^j \\ & - \sum_{m=1}^{|M(j)|} \frac{(1-x_m^j)}{2} D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \end{aligned} \quad \forall j \quad (9)$$

원료물질 j 의 구매 준비비는 A_k^j \$/order이고, 공정 i 에서 작업 n 의 변환 준비비는 A_{in}^j \$/batch이다. 저장조 j 의 연간 재고유지비는 H^j \$/L/year이다. 설계 최적화의 목적함수는 총비용을 최소화하는 것인데, 여기서 총비용은 원료 구매비, 원료구매 준비비, 공정 준비비, 재고유지비와 장치들의 자본비용들의 합으로 구성되어 있다.

$$TC = \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\frac{A_k^j}{\omega_k^j} + a_k^j B_k^j + P_k^j D_k^j \right] + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left[\frac{A_{in}^j}{\omega_i} + a_{in} B_{in}^j \right] + \sum_{j=1}^{|J|} [H^j \bar{V}^j + b^j \bar{V}^j] \quad (10)$$

여기서 a_k^j , a_{in}^j 과 b^j 는 구매공정, 생산공정과 저장조의 연간 자본비용이고, P_k^j 는 원료구매 가격이다. 재고하한값 식 (8)은 0보다 같거나 커야 한다. 즉 조건 $\bar{V}^j \geq 0$ 은 최적화의 제약식이 된다.

$$V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in} \left(t_i + \omega_i \sum_{n=1}^{n-1} y_{in} + \Delta t_{in} \right) - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in}^j y_{in}) F_{in}^j \omega_{in} + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in} \left(t_i + \omega_i \sum_{n=1}^{n-1} y_{in} \right) - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j) D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j \geq 0 \quad \forall j \quad (11)$$

저장조 크기는 재고 상한값 \bar{V}^j 즉, 식 (7)에 의해 결정된다. 최적화의 독립변수는 주기(ω_k^j 와 ω_i), 시작시간(t_k^j 와 t_i)과 평균유속(D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j)이다. 작업 시작시간 t_m^j 와 t_{in}^j 는 식 (2)와 식 (3)에 의해 t_i 으로 바뀌었다. D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j 가 상수로 고려되면, 목적함수 식 (10)은 오목함수이고, 제약식들은 D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j 에 대해 선형이다. 그러나 ω_k^j , ω_i 와 t_k^j 에 대한 오목성은 확실하지 않다. 먼저 D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j 를 상수로 간주하고, ω_k^j , ω_i , t_k^j 와 t_{in}^j 에 대한 Kuhn-Tucker 조건을 풀 다음 D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j 에 대해 문제를 풀 것이다. 비록 이단계 최적화 문제로 분리되었지만 제약식이 등식이 될 경우 원래 문제와 이단계 문제의 Kuhn-Tucker 조건들은 일치한다[3]. 이단계 문제의 첫째 문제는 오목 목적함수와 선형 부등식 제약식을 가지고 있고, 둘째 문제는 오목이 아닌 목적함수와 비선형 등식 제약식을 가지고 있다. 둘째 문제가 전범위 최적점에 수렴하면 원래 문제는 전범위 최적점에 수렴한다. 첫째 문제의 Kuhn-Tucker 해들은 다음과 같다(풀이는 부록 A).

$$* \omega_k^j = \sqrt{\frac{A_k^j}{D_k^j \Psi_k^j}} \quad (12)$$

$$* \omega_i = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j}{\Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in})}} \quad (13)$$

여기서 Ψ_k^j 와 Ψ_i 다음과 같이 정의된다.

$$\Psi_k^j = \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) (1 - x_k^j) + a_k^j \quad (14)$$

$$\Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in}) = \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} [a_{in} y_{in} F_{in}^j + (0.5H^j + b^j) \{F_{in}^j (1 - x_{in}^j y_{in}) y_{in} + G_{in}^j (1 - x_{in}^j y_{in}) y_{in}\}] \quad (15)$$

식 (13)을 조사해 보면 최적점은 작업에 대한 준비비의 합과 모든 다른 비용들의 합이 일치할 때 성립한다는 것을 알 수 있다. 즉

$$\frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j}{(*\omega_i)} = \Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in}) (*\omega_i) \left(\equiv \sqrt{\Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in}) \sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j} \right)$$

이 등식으로부터 받아오는 정도는 최적점에서 멀어지는 정도를 나타낸다. 이러한 관찰로부터 공정의 상대적 최적화 정도를 나타내는 다음과 같은 척도를 제시한다.

$$\text{공정 } i \text{의 상대적 최적화 정도} = \frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j}{\omega_i} - \Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in}) \omega_i \quad (16)$$

$$2 \sqrt{\Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j, y_{in}) \sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j}$$

여기서 왼쪽 위의 별표는 최적화된 값을 나타낸다. 식 (16)의 분모는 공정 i 와 관련된 모든 최적화된 비용들의 합이다. 식 (16)은 다른 공정간의 설계 또는 운전상태의 최적화 정도를 비교할 수 있는 무차원 변수이다.

최적점은 단지 생산물량만으로 이루어 질 수 없다. 공정운전 시작시간 들은 최적점에서 다음과 같은 다음과 같은 선형계를 만족해야 한다.

$$\sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (G_{in}^j - F_{in}^j) y_{in} t_{in} = V^j(0) - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j) D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n=1}^{n-1} y_{in} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \omega_i - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \Delta t_{in} G_{in}^j y_{in} - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in}^j y_{in}) F_{in}^j y_{in} \omega_{in} \quad \forall j \quad (17)$$

위 등식이 성립하는 가장 좋은 방법은 t_k^j 와 t_{in}^j 을 조절하는 것이다. 그러나 이들의 가능한 범위 내에서 등식을 만족시키지 못할 때에는 소비자 수요 시작시간인 t_m^j 를 지연시킬 수도 있다. 이 지연은 또다른 비용인 역주문 비용 또는 판매유실 비용을 초래한다. 이 비용을 추정하는 것은 고객의 사회적 행동양식을 추정해야 하므로 매우 주관적이고 어려운 일이다. 식 (17)은 또한 등식을 성립시키는 많은 다른 매개변수를 포함하고 있다. 예를들면, 초기 재고량 $V^j(0)$ 가 많으면 물질의 부족을 면한다. 또다른 방법으로, 고객이 허락한다면, 부족한 제품을 제 3자로부터 구매하여 고객에게 배달할 수도 있다. 여러가지 방법중에서 어느것이 가장 적절한 방법인지 결정하기가 쉽지않다. 따라서 공장설계 초기에 식 (17)을 고려하여 그런 불확실한 사태가 가능한 발생하지 않도록 설계하는 것이 바람직하다. 최적 목적함수값은 다음과 같다.

$$*TC(D_k^j, F_{in}^j, G_{in}^j) = 2 \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} (\sqrt{A_k^j \Psi_k^j} D_k^j + P_k^j D_k^j) + 2 \sum_{i=1}^{|I|} \sqrt{\Psi_i(F_{in}^j, G_{in}^j) \sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j} + \sum_{j=1}^{|J|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \omega_m^j (1 - x_m^j) \quad (18)$$

식 (18)의 각 항은 공정 i 에 대해서 분리가능하다. 공정 i 의 비용은 평균유속의 제곱근에 비례한다는 사실은 공정설계에서 경험적으로 널리 알려진 6/10 법칙과 유사하다[7]. 저장조의 최적크기는 재고량의 상한 값과 식 (17)로부터 계산된다.

$$* \overline{V}^j = \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} [(1-x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} + (1-x'_{in} y_{in}) G_{in}^j y_{in}] \omega_i + \sum_{k=1}^{|K(j)|} (1-x'_k) D_k^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1-x'_m) D_m^j \omega_m^j \quad (19)$$

목적함수 식 (18)은 제약식 식 (4), 식 (5)와 함께 평균유속 D_k^j , F_{in}^j 와 G_{in}^j 에 대하여 최소화 되어야 한다. 이 둘째 단계 문제는 비선형 비오목 최적화 문제로서 전범위 최적점을 구할 수 있는 보장된 방법이 없다. 게다가 작업의 순서도 변수가 될 경우 많은 정수변수를 포함하므로 문제는 더욱 어렵게 된다. 따라서 평균 유속과 작업의 순서는 미리 알려진 경우에 본 연구의 결과인 해석적인 식 (12) ~ 식 (19)가 적용될 수 있다는 점은 본 연구의 큰 한계이다. 그러나 생산계획 문제의 경우 평균유속은 이미 알려져 있고, LDPE의 경우 생산작업의 순서가 이미 정해져 있는 등 실제로 평균유속이나 작업의 순서는 다른 방법으로 구할 수 있는 경우가 많으므로 본 연구의 결과는 아래 예제에서 제시된 준최적 설계방법을 사용할 경우 여전히 유용하다.

3. 복잡한 공급 사슬망의 최적설계

위의 최적화 결과로부터 우리는 복잡한 생산 재고 분배 계에 적용할 수 있는 공정-저장조 망구조의 간편한 최적설계 절차를 소개한다.

- (1) 모든 공정과 저장조를 통과하는 물질들의 최적 평균유속과 주기비를 계산한다. 선형계획법과 같은 다른 모형을 사용해도 다른 설계변수의 최적성에 영향이 없다.
- (2) Fig. 5에 보여진 것 처럼 공정 i 에 있는 작업 n 에 연결된 모든 저장조들을 확인한다. 생산제품이 원료 저장조로 되돌아 가는 재순환 흐름도 포함된다. 원료조성, 제품수율, 저장조 운전 시간분율, 준비비, 재고유지비, 자본비용과 평균유속 등의 입력자료를 준비한다.

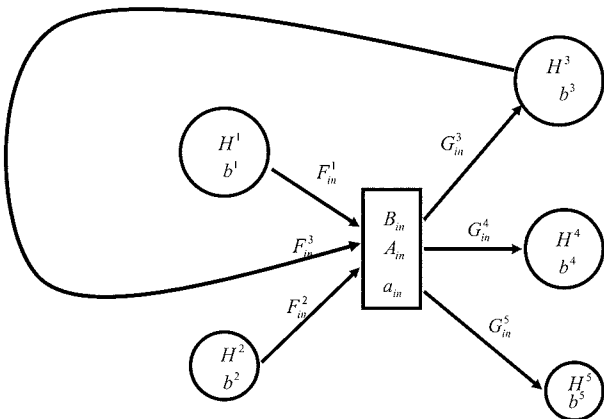


Fig. 5. Optimal size of multitasking batch process connected by storage units.

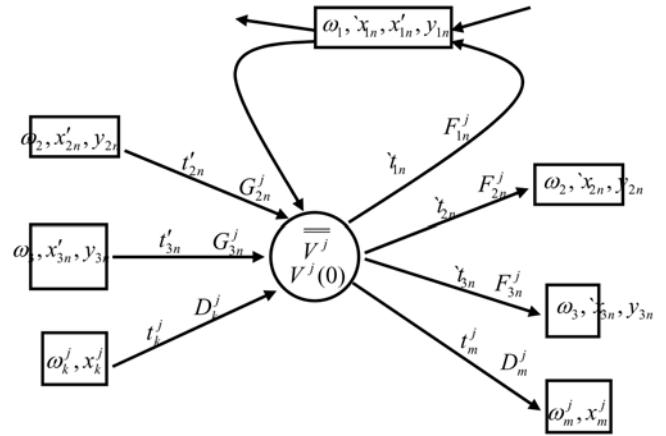


Fig. 6. Optimal size of storage unit connected by multiple supply and consumption processes.

공정 i 에 있는 작업 n 의 최적생산량은 식 (13)에서 유도된 다음식에 의해 계산된다.

$$B_{in} = \omega_i y_{in} \sum_{j=1}^{|M|} F_{in}^j = y_{in} \sum_{j=1}^{|M|} F_{in}^j$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}}{\sum_{j=1}^{|M|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} [a_{in} y_{in} F_{in}^j + (0.5H^j + b^j) (F_{in}^j (1-x_{in} y_{in}) y_{in} + G_{in}^j (1-x'_{in} y_{in}) y_{in})]}} \quad (20)$$

원료구매 최적량은 식 (12)에 의해 계산된다.

(3) Fig. 6에 나타난 바와 같이 저장조 j 에 연결된 모든 공정들을 확인한다. 부분집합 $I' \subseteq I$ 는 공급공정의 집합이고, $I \cap I' \neq \emptyset$ 이다. 공급 사슬 망은 대개 원료부터 최종제품까지 다단계로 배열된다. 각단계의 초기시작시간은 식 (17)에서 유도된 다음 식을 이용하여 최종제품 배달시간부터 순차적으로 계산된다.

$$\sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j t_k^j - \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j t_m^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in} t'_m - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} F_{in}^j y_{in} t'_m = V^j(0) - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1-x'_m) D_m^j \omega_m^j - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1-x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} \omega_i \quad \forall j \quad (21)$$

최적 저장조 크기는 식 (19)로부터 계산된다.

4. HDPE 공장설계 예제

4-1. 단일 반응기 경우

11개의 HDPE 물질등급을 생산하는 단일 반응기로 구성된 반응속 공정을 고려하자. Table 1은 열에 있는 물질로부터 행에 있는 물질등급으로 생산물질등급 변환비용을 보여준다. 이 비용은 생산물질등급 변환 동안 생산된 비규격 제품의 가치로부터 평가되었다. Table 2는 제품수요 평균유속(D_m^j), 주기비(y_{in})와 재고유지비(H^j)를 나타낸다. 반응기가 하나이기 때문에 제품수요량의 비로부터 주기비를 쉽게 계산할 수 있다. 공정과 저장창고와 관련된 자본비용, 원

Table 1. Grade transition costs of HDPE plant(\$/batch)

	F5502	F607LD	F6060P	F50100	TR158	TR570	TR144	TR130	TR147	F5811	HX100
F5502	0	2,040	3,570	4,080	5,610	6,120	4,080	4,590	4,080	4,590	8,160
F607LD	2,889	0	2,408	4,815	4,334	6,741	5,297	5,297	4,815	3,371	9,630
F6060P	2,895	2,413	0	4,825	4,825	6,755	5,308	5,790	4,825	2,895	9,650
F50100	3,206	5,954	6,870	0	3,206	4,580	4,122	4,122	4,580	5,954	6,412
TR158	3,916	4,895	5,385	3,427	0	4,895	3,916	4,406	4,406	4,895	7,832
TR570	5,632	5,632	7,168	4,096	4,608	0	4,096	4,608	4,608	5,632	7,168
TR144	4,433	5,910	5,910	2,463	5,418	7,388	0	3,448	4,925	6,895	6,403
TR130	5,841	7,434	7,434	3,717	6,372	7,965	3,717	0	5,310	9,558	8,496
TR147	3,512	3,951	3,951	3,512	4,390	5,268	3,512	4,829	0	3,073	7,024
F5811	3,272	3,272	3,272	3,272	4,090	4,908	4,090	4,908	3,272	0	6,544
HX100	5,750	8,050	8,050	4,600	6,900	8,625	4,600	6,325	5,750	8,050	0

Table 2. Input and output data of single reactor design

Sequence	Product Code	A^{ij} (\$/Batch)	D'_m (ton/day)	y_m	H^j (\$/ton/day)	$0.5H^j y_m (1-y_m)$ (\$/ton/day)	B_m (ton)
1	F5502	2,040	30,587	0.110993	84.315	4.159843	1,792.499
2	F607LD	2,408	2,920	0.010596	85.41	0.447709	190.4467
3	F6060P	2,895	5,913	0.021457	86.14	0.904322	381.4212
4	F5811	6,544	7,665	0.027815	87.235	1.179457	491.2225
5	HX100	4,600	2,847	0.010331	96.725	0.494477	185.7353
6	TR144	3,448	90,885	0.329801	86.14	9.519866	4,015.252
7	TR130	3,717	33,580	0.121854	89.79	4.804027	1,943.857
8	F50100	3,206	16,571	0.060133	85.775	2.423853	1,026.674
9	TR158	4,895	14,454	0.05245	84.68	2.104268	902.8322
10	TR570	4,608	11,753	0.042649	85.045	1.736197	741.7148
11	TR147	3,512	58,400	0.211921	86.14	7.19313	3,033.89
sum=		4,1873	275,575	1		34.96715	

료물질의 재고유지비용과 원료 및 제품 가격은 편의상 생략했다. 물질등급 생산순서는 Table 2에 나타난 바와 같이 하나의 공통 생산주기내에서 생산물질등급 변환비용의 합이 최소화되도록 결정되었다. 이 문제는 11개의 도시를 방문하는 외판원 문제와 같다. 하나의 공통 생산주기내에서 각 물질등급은 한번만 생산된다. 이 경우 식 (15)는 $\Psi_i = 0.5 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{N(i)} H^j y_m (1 - y_m)$ 로 단순화된다. 그러면 식 (13)은 공통 생산주기에 대한 다음 값을 계산해 준다.

$$\omega = \sqrt{\frac{(41,873)}{(275,575)(34.96715)}} \approx 24 \text{ days} \quad (22)$$

고객의 주문이 일정하다는 가정하에 저장조 크기는 식 (18)에 의해 계산된다. 최종제품은 포장되어서 창고에 저장되는데 그 크기는 각 제품의 저장조의 크기의 합과 같다.

$$1,792.499 * (1 - 0.110993) + 190.4467 * (1 - 0.010596) + 381.4212 * (1 - 0.021457) + 491.2225 * (1 - 0.027815) + 185.7353 * (1 - 0.010331) + 4,015.252 * (1 - 0.329801) + 1,943.857 * (1 - 0.121854) + 1,026.674 * (1 - 0.060133) + 902.8322 * (1 - 0.05245) + 741.7148 * (1 - 0.042649) + 3,033.89 * (1 - 0.211921) = 12,136.04 \text{ tons}$$

4-2. 두개 반응기 경우

두개 반응기의 경우에 같은 문제를 다시 풀어보자. 두 반응기의 생산속도는 같은 용량의 반응기를 제작할 경우 얻는 비용절감을 고려하여 같게 둔다. 비선형 혼합정수 계획법 문제를 푸는 것은 매우

어려우므로 손쉬운 준최적화 절차를 이용할 것이다. 먼저 수요량이 가장 큰 TR144 등급을 제외하고 각 물질 등급을 어느 한쪽의 반응기에 배당한다. 각 등급을 배당하는 방법은 여러가지가 있지만 총 물질등급 변환비용을 줄이기 위하여 Table 3에 나타난 것처럼 단일 반응기 물질등급 생산순서를 TR144가 가운데 오도록 배열한 다음 TR144 부분을 두개로 나눈다. TR144는 수요량이 가장 크므로 그 생산량은 비교적 쉽게 양쪽 반응기에 배당할 수 있다. 그런 뒤 Table 3에 요약되어 있는 것 처럼 나머지 계산은 각 반응기에 대하여 단일 반응기 경우와 동일하게 진행된다. 두 반응기의 최적 생산주기는 다음과 같다.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(22,386)}{(137,787.5)(31.54842)}} \approx 26 \text{ days} \quad (23)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{(22,920)}{(137,787.5)(23.15767)}} \approx 31 \text{ days} \quad (24)$$

생산주기는 두 반응기 경우에 단일 반응기보다 늘어났음을 보이고 있는데 이는 주로 생산물질 등급변환 비용의 증가로 기인한다. Table 1에 있는 등급변환 비용 입력자료는 두 반응기를 보유한 공정에서 수집되었다. 이 비용은 보통 등급이 바뀔 때 발생하는 불량품의 용량과 비례한다. 만약에 등급변환 시간이 일정하다고 가정하면 유속이 빠른 반응기의 등급변환 비용은 느린 것에 비해 커지게 된다. 만약 등급변환 비용이 평균유속에 비례한다고 가정하면 단일 반응기의 실제 생산주기는 $\sqrt{2} * 24 \approx 34$ 로 바뀐다.

Table 3. Input and output data of two reactors design

Process	Sequence	Product	A^{ij} (\$/Batch)	y_{in}	H^i (\$/ton/day)	$0.5H^i y_{in}(1-y_{in})$ (\$/ton/day)	D_m^j (ton/day)	B_m (ton)
R1	1	TR130	3,717	0.243709	89.79	8.27481	33,580	2,409.768
R1	2	F50100	3,206	0.120265	85.755	4.536492	16,571	1,189.168
R1	3	TR158	4,895	0.104901	84.68	3.975578	14,454	1,037.248
R1	4	TR570	4,608	0.085298	85.045	3.317702	11,753	11,339.94
R1	5	TR147	3,512	0.423841	86.14	10.51769	58,400	4,190.901
R1	6	TR144	3,448	0.021987	86.14	0.926149	3,029.5	217.403
sum=			22,386	1		31.54842	137,787.5	
R2	1	TR144	4,433	0.637616	86.14	9.951835	87,855.5	7,446.016
R2	2	F5502	2,040	0.221987	84.315	7.280964	30,587	2,592.34
R2	3	F607LD	2,408	0.021192	85.41	0.885828	2,920	247.4787
R2	4	F6060P	2,895	0.042914	86.14	1.768984	5,913	501.1444
R2	5	F5811	6,544	0.055629	87.235	2.291425	7,665	649.6316
R2	6	HX100	4,600	0.020662	96.725	0.978631	2,847	241.2917
sum=			22,920	1		23.15767	137,787.5	

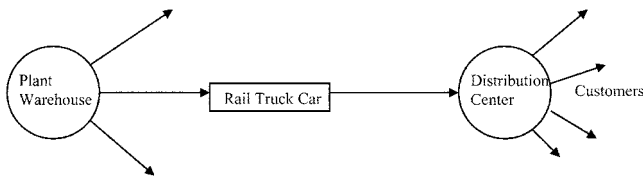


Fig. 7. An example product distribution branch.

4-3. 수송 분배 시설

Fig. 7은 HDPE 공장의 제품 분배 예를 보여주고 있다. 공장 창고에 있는 제품은 기차를 통하여 분배 센터로 수송된다. 이 분배 센터의 고객의 수요는 각 제품에 대하여 Table 2에 있는 총 수요의 30%라고 가정한다. 고객은 주중에 주문을 한다. 공장과 분배 센터 사이에 기차에 의한 수송의 고정비는 5만불이며 편의상 재고유지비를 제외한 다른 비용은 생략한다. 수송과정은 단일 작업이며 ($|N(i)| = y_{in} = 1$), 각 기차의 저장조 운전 시간분율은 0.9로 가정한다. 기차와 분배시설의 최적용량은 식 (19)와 식 (20)에 의해 계산된다.

$$\Psi_{RTC} = 2 * 0.5 * 0.3 * (1 - 0.9)(30587 * 84.315 + 2920 * 85.41 + 5913 * 86.14 + 7665 * 87.235 + 2847 * 96.725 + 90885 * 86.14 + 33580 * 89.79 + 16571 * 85.775 + 14454 * 84.68 + 11753 * 85.045 + 58400 * 86.14) = 2380115.251 \quad (25)$$

$$B_{RTC} = (0.3 * 275575) \sqrt{\frac{50,000}{2,380,115.251}} = 11,982.49 \text{ tons} \quad (26)$$

$$\sqrt{DC} = 11,982.49 * (1 - 0.9) + (0.3 * 275,575) * 7 * (1 - 5/7) = 166,543.249 \text{ tons} \quad (27)$$

5. 결 론

원료조성과 제품수율이 가변적일 때 다수의 작업을 수행하는 회분식 또는 반연속 공정의 최적생산량에 관한 해석적인 해가 공정-저장조 망구조의 틀안에서 유도되었다. 여기서 발표된 방법은 정밀 화학제품 뿐만 아니라 연료유, 석유화학제품, 고분자, 용제, 윤활유와 같은 대용량 화학제품을 생산하는 다양한 공정에 적용될 수 있

다. 생산작업의 순서가 고정되었다는 가정하에 사각과 모형의 응용 범위는 회분식 공정에서 대부분의 화학공정에 적용이 가능하게 되었다. 따라서 여기서 제안된 방법은 서로 다른 작업 준비비를 가지는 생산작업의 순서의 갯수가 제한적일 때 매우 유용하다. 주기비는 이미 알려진 상수로 가정되었는데 이 가정은 공정이 하나이거나 작업의 분리가 없는 여러개의 공정에 대해 성립한다. 일반적으로는 주기비는 변수로서 식 (18)은 심한 비선형의 최적화 목적함수가 된다. 그 결과 나타나는 비선형 혼합정수 계획법 문제는 매우 풀기 어려운 문제가 되는데 향후 많은 연구가 필요하다. 본 연구에서는 실제로 적용가능한 쉬운 준최적 방법을 제안하여 HDPE 공장의 설계 문제에 적용하는 예를 보였다.

추가적으로 어떤 공정에도 적용될 수 있는 실질적인 공정 최적화 척도를 제시하였다. 이 척도는 경험적인 수식이 아니라 공정-저장조 망구조 최적화 모형의 결과로 부터 유도된 수식이다. 이 척도를 잘 활용할 경우 전사적인 최적화를 위한 부족한 가용자원의 효율적인 배분에 기여할 것이다.

감 사

이 논문 또는 저서는 2006년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2006-311-D00382).

사용기호

- a_k^j : annualized capital cost of raw material purchasing facility, dollars per unit of item per year
- a_i : annualized capital cost of process i , dollars per unit of item per year
- b^j : annualized capital cost of storage facility, dollars per unit of item per year
- A_k^j : ordering cost of feedstock materials, dollars per order
- A_{in} : ordering cost of noncontinuous process i , task n , dollars per order
- A^{ij} : product change-over cost from product j to product j' , dollars per order

B_k^j : raw material order size, unit of items per lot
 B_{in} : noncontinuous process size, unit of items per lot
 B_m^j : final product delivery size, unit of items per lot
 D_k^j : average material flow of raw material supply, unit of items per year
 D_m^j : average material flow of customer demand, unit of items per year
 D_i : average material flow through noncontinuous processes, unit of items per year
 f_{in}^j : feedstock composition of process i, task n
 F_{in}^j : average flow rate of feedstock material j to process i, task n, unit of items per year
 g_{in}^j : product yield of process i, task n
 G_{in}^j : average flow rate of product material j from process i, task n, unit of items per year
 H^j : annual inventory holding costs, dollars per unit of item per year
 I : noncontinuous process set
 J : storage set
 $K(j)$: raw material supplier set for storage j
 $M(j)$: consumer set for storage j
 $N(i)$: Task set for process i
 P_k^j : price of raw material j from supplier k, \$/units of item
 t_m^j : start-up time of customer demand, year
 τ_i : start-up time of the first task feedstock feeding to noncontinuous process i, year
 τ_{in} : start-up time of feedstock feeding of task n to noncontinuous process i, year
 t_{in}' : start-up time of product discharging of task n from noncontinuous process i, year
 t_k^j : start-up time of raw material purchasing, year
 \overline{V}^j : upper bound of inventory hold-up, units of item
 \underline{V}^j : lower bound of inventory hold-up, units of item
 $V^j(t)$: inventory hold-up, units of item
 $V^j(0)$: initial inventory hold-up, units of item
 \overline{V}^j : time averaged inventory hold-up, units of item
 x_k^j : storage operation time fraction of purchasing raw materials
 x_{in} : storage operation time fraction of feeding to noncontinuous process i, task n
 x_{in}' : storage operation time fraction of discharging from noncontinuous process i, task n
 x_m^j : storage operation time fraction of customer demand
 y_{in} : cycle time ratio, ω_{in}'/ω_i
 $Z_{in}^{jj'}$: $Z_{in}^{jj'} = 1$ if the n-th task on process i produces a product j and the (n+1)-th task produces a product j' and otherwise, $Z_{in}^{jj'} = 0$

그리이스 문자

λ_{ij}^j : Lagrangian multipliers
 $\phi^{jj'}$: the composition of feedstock j to produce product j'
 ω_m^j : cycle time of customer demand, year
 ω_k^j : cycle time of raw material purchasing, year
 ω_i : cycle time of noncontinuous process i, year
 ω_{in} : duration of noncontinuous process i, task n, year

Ψ_i : aggregated cost defined by Eq. 15

Ψ_k^j : aggregated cost defined by Eq. 14

위첨자

j : storage index

아래첨자

i : noncontinuous process index

k : raw material vendors

m : finished product customers

n : task index

Special Functions

int[.] : truncation function to make integer

res[.] : positive residual function to be truncated

|X| : Number of elements in set X

참고문헌

1. Yi, G. and Reklaitis, G. V., "Optimal Design of Multiple Batch Units With Feedstock/product Storages," *Chem. Eng. Comm.*, **181**(1), 79-106(2000).
2. Yi, G. and Reklaitis, G. V., "Optimal Design of Batch-Storage Network Using Periodic Square Model," *AIChE J.*, **48**(8), 1737-1753(2002).
3. Yi, G. and Reklaitis, G. V., "Optimal Design of Batch-Storage Network with Recycle Streams," *AIChE J.*, **49**(12), 3084-3094 (2003).
4. Yi, G. and Reklaitis, G. V. "Optimal Design of Batch-Storage Network with Financial Transactions and Cash Flows," *AIChE J.*, **50**(11), 2849-2865(2004).
5. Floudas, C. A. and Lin, X., "Continuous-time Versus Discrete-time Approaches for Scheduling of Chemical Processes: A Review," *Computers & Chemical Engineering*, **28**(11), 2109-2129(2004).
6. Karimi, I. A. and McDonald, C. M., "Planning and Scheduling of Parallel Semicontinuous Processes. 2. Short-Term Scheduling" *I&EC Res.*, **36**(7), 2701-2714(1997).
7. Peters, M. S., Timmerhaus, K. D. and West, R. E., *Plant Design and Economics for Chemical Engineers*, McGraw-Hill, New York, NY(2003).

부록 A: 첫째단계 최적화 문제의 Kuhn-Tucker 해

식 (2)와 식 (3)에 의해 시작시간 τ_{in} 와 t_{in}' 는 τ_i 로 바뀐다. 식 (7) 과 식 (9)에 의해 식 (10)은 독립변수에 대한 다음식으로 바뀐다.

$$\begin{aligned}
 TC = & \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\frac{A_k^j}{\omega_k^j} \right] + \sum_{i=1}^{|I|} \left[\frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}}{\omega_i} \right] + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} \left[\left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) (1 - x_k^j) + \alpha_k^j \right] D_k^j \omega_k^j \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{k=1}^{|K(j)|} (H^j + b^j) D_k^j t_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \omega_i \sum_{n=1}^{|N(i)|} \sum_{j=1}^{|J|} a_{in}^j F_{in}^j y_{in} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in}') y_{in} G_{in}^j y_{in} \omega_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \Delta t_{in} G_{in}^j y_{in} \\
 & -\sum_{j=1}^{|J|} \frac{H^j}{2} \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} \omega_i \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \omega_i \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \tau_{in} \\
 & + \text{constants}
 \end{aligned} \tag{A1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{constants} &= \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) V^j(0) - \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} \left(\frac{H^j}{2} \right) (1 - x_m^j) D_m^j \omega_m^j \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \sum_{m=1}^{|M(j)|} (H^j + b^j) D_m^j \tau_m^j
 \end{aligned} \tag{A2}$$

변수 ω_k^j , ω_p , τ_k^j 와 τ_{in}^j 에 대하여 식 (11)의 제약하에 식 (10)을 최소화하는 최적화문제의 Lagrange 함수는

$$\begin{aligned}
 L = TC & - \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j \left[V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \tau_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \tau_i \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \omega_i \\
 & - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \Delta t_{in} G_{in}^j y_{in} - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} \omega_i \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j) D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \tau_m^j \right]
 \end{aligned} \tag{A3}$$

여기서 λ^j 는 Lagrange 승수이다. Kuhn-Tucker 조건들은

$$\frac{\partial L}{\partial \tau_k^j} = -(H^j + b^j) D_k^j + \lambda^j D_k^j = 0 \tag{A4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_k^j} = -\frac{A_k^j}{(\omega_k^j)^2} + \left[\left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) (1 - x_k^j) + a_k^j \right] D_k^j = 0 \tag{A5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} - \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j \\
 & \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} = 0
 \end{aligned} \tag{A6}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \omega_i} &= -\frac{\sum_{n=1}^{|N(i)|} A_{in}^j}{(\omega_i)^2} + \sum_{n=1}^{|N(i)|} \sum_{j=1}^{|J|} a_{in}^j \Gamma_{in}^j y_{in} \\
 & + \sum_{j=1}^{|J|} \left(\frac{H^j}{2} + b^j \right) \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) G_{in}^j y_{in} - \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in} \frac{\partial \Delta t_{in}}{\partial \omega_i} \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \frac{H^j}{2} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} + \sum_{j=1}^{|J|} (H^j + b^j) \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \\
 & - \sum_{j=1}^{|J|} \lambda^j \left[\sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} - \sum_{n=1}^{|N(i)|} G_{in}^j y_{in} \frac{\partial \Delta t_{in}}{\partial \omega_i} - \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{A7}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda^j & \left[V^j(0) - \sum_{k=1}^{|K(j)|} D_k^j \tau_k^j + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \tau_i \right. \\
 & + \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \left(\sum_{n'=1}^{n-1} y_{in'} \right) (F_{in}^j - G_{in}^j) y_{in} \omega_i \\
 & - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} \Delta t_{in} G_{in}^j y_{in} - \sum_{i=1}^{|I|} \sum_{n=1}^{|N(i)|} (1 - x_{in} y_{in}) F_{in}^j y_{in} \omega_i \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{|M(j)|} (1 - x_m^j) D_m^j \omega_m^j + \sum_{m=1}^{|M(j)|} D_m^j \tau_m^j \right]
 \end{aligned} \tag{A8}$$

식 (A4)와 식 (A6)을 풀면;

$$\lambda^j = H^j + b^j \tag{A9}$$

식 (A9)와 함께 식 (A5)와 식 (A7)을 풀면 본문에 있는 식 (12)와 식 (13)이 유도된다. 식 (A8)을 풀면 식 (17)이 된다.