

# 가변 샘플링 간격(VSI)을 갖는 적응형 이동평균(A-MA) 관리도

임 태 진<sup>†</sup>

승실대학교 산업정보시스템공학과

## An Adaptive Moving Average (A-MA) Control Chart with Variable Sampling Intervals (VSI)

Tae-Jin Lim

Department of Industrial & Information Systems Engineering, Soongsil University, Seoul 156-743, Korea

This paper proposes an adaptive moving average (A-MA) control chart with variable sampling intervals (VSI) for detecting shifts in the process mean. The basic idea of the VSI A-MA chart is to adjust sampling intervals as well as to accumulate previous samples selectively in order to increase the sensitivity. The VSI A-MA chart employs a threshold limit to determine whether or not to increase sampling rate as well as to accumulate previous samples. If a standardized control statistic falls outside the threshold limit, the next sample is taken with higher sampling rate and is accumulated to calculate the next control statistic. If the control statistic falls within the threshold limit, the next sample is taken with lower sampling rate and only the sample is used to get the control statistic. The VSI A-MA chart produces an 'out-of-control' signal either when any control statistic falls outside the control limit or when  $L$ -consecutive control statistics fall outside the threshold limit. The control length  $L$  is introduced to prevent small mean shifts from being undetected for a long period. A Markov chain model is employed to investigate the VSI A-MA sampling process. Formulae related to the steady state average time-to signal (ATS) for an in-control state and out-of-control state are derived in closed forms. A statistical design procedure for the VSI A-MA chart is proposed. Comparative studies show that the proposed VSI A-MA chart is uniformly superior to the adaptive Cumulative sum (CUSUM) chart and to the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) chart, and is comparable to the variable sampling size (VSS) VSI EWMA chart with respect to the ATS performance.

**Keywords:** Adaptive Scheme, ATS, Control chart, Markov chain, Moving Average

### 1. 서론

관리도의 주된 목적은 공정평균이나 공정산포의 변화를 일으키는 공정의 이상상태를 신속하게 감지하는 것이다. 전통적으로 사용되어온 슈하트(Shewhart) 관리도는 공정평균의 큰 변화는 민감하게 감지하지만, 작은 변화에는 둔감한 것으로 알려져 있다. 누적합(CUSUM) 관리도(Page 1954; Brook and Evans 1972)와 지수이동평균(EWMA) 관리도(Lucas and Saccucci 1990)는 공정평균의 작은 변화에도 민감한 것으로 인정받아왔다.

두 관리도 모두 과거의 표본 통계량을 누적해서 새로운 통계량을 계산하므로 누적형 관리도라 할 수 있다. 최근에는 VSS(Variable Sampling Size), VSI(Variable Sampling Interval) 등의 적응형(adaptive) 관리도(Prabhu *et al.*, 1994; Costa 1997)가 개발되어 기존 관리도의 성능을 더욱 향상시키게 되었다. 적응형 관리도란 현재까지의 표본 통계량을 바탕으로 다음 샘플링 방식을 정하는 관리도를 말하며, Tagaras(1998)는 이에 대하여 방대한 문헌조사를 수행하였다.

선택적 이동평균(Selective-Moving Average; S-MA) 관리도

본 연구는 승실대학교 교내연구비 지원으로 수행되었음.

<sup>†</sup> 연락저자 : 임태진 교수, 156-743 서울시 동작구 상도5동 1-1 승실대학교 산업·정보시스템공학과, Fax : 02-825-1094,

E-mail : tjlim@ssu.ac.kr

2007년 05월 접수; 2007년 08월 수정본 접수; 2007년 08월 게재 확정.

(Lim 2007)는 누적형 관리도와 적응형 관리도의 착안점을 모두 이용하여 개발된 것으로서, 임계한계(threshold limit)를 설정하여 현재 관리통계량의 상태를 기준으로 다음 관리통계량의 누적여부를 결정한다. VSS 관리도와는 달리 샘플링 크기를 고정시키고 관리통계량의 계산방식만을 바꾸기 때문에 합리적 부분군(rational subgroup)을 유지하기 쉬운 장점이 있다.

본 논문에서는 S-MA 관리도에 가변 샘플링 간격(VSI)을 적용한 관리도를 제안하고, 그 통계적 특성을 규명하고자 한다. 일반적으로 VSI 방법을 적용하면 이상신호 발생까지의 시간을 더욱 단축시킬 수 있는 장점이 있다. 단, '선택적'이라는 표현보다는 '적응형'이 더 보편적이므로 제안하는 관리도를 VSI A-MA 관리도라 명명한다.

제 2절에서는 VSI A-MA 관리도의 운영방법을 설명하고, 마코프(Markov)체인으로 샘플링 프로세스를 모형화한다. 제 3절에서는 관리상태에서의 평균 신호 발생시간(Average Time to Signal; ATS) 식을 유도하고, 유용한 통계적 특성을 도출한다. 제 4절에서는 VSI A-MA 관리도의 통계적 설계 방안을 제시하고, 제 5절에서는 기존 적응형 CUSUM 관리도 및 EWMA 관리도와와의 비교연구를 통하여 VSI A-MA 관리도의 민감도를 보인다.

## 2. VSI A-MA 관리도

### 2.1 VSIA-MA 관리도의 운용절차

VSI A-MA 관리도는 표준화된 관리통계량을 사용하며, 표본 크기  $n_0$ , 관리한계  $k$ , 임계한계  $w$ , 관리길이  $L$ , 샘플링 간격  $h_1, h_2$  등 여섯 가지의 설계모수를 갖는다. 표본크기는 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도와 동일하게  $n_0$ 로 설정하지만, 샘플링 간격은 짧은 간격  $h_1$  과 긴 간격  $h_2$  두 가지를 사용한다. 표준화된 통계량을 계산하여 관리하며, 관리통계량이 관리한계  $k$  를 벗어나거나  $L$ 개의 연속된 관리통계량이 임계한계  $w$  를 벗어나면 이상신호를 발생한다. VSI A-MA 관리도는 S-MA 관리도와 유사한 운영방식을 따르지만, 두 가지의 샘플링 간격( $h_1, h_2$ )을 선택적으로 적용함으로써 ATS를 감소시키고자 한 점에서 차이점을 갖는다.

주어진 관리한계  $k$ 와 임계한계  $w$ 에 대하여, 관리통계량  $Z_i$ 의 영역을 다음과 같이 상호 배타적이고 포괄적인(mutually exclusive and exhaustive) 세 영역으로 구분할 수 있다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{Z_i; |Z_i| \leq w\}, \\ I_2 &= \{Z_i; w < |Z_i| \leq k\}, \\ I_3 &= \{Z_i; |Z_i| > k\} \end{aligned} \quad (1)$$

영역  $I_1, I_2$ , 및  $I_3$ 을 각각 일치영역, 의심영역, 불일치영역이

라 하자. VSI A-MA 관리도에서는 관리통계량이 의심영역에 속하면 짧은 샘플링 간격  $h_1$ 으로 다음 샘플링을 행하고 표본을 누적하여 관리통계량을 계산한다. 반면 관리통계량이 일치영역에 속하면 긴 샘플링 간격  $h_2$ 로 다음 샘플링을 행하고 이 표본만으로 관리통계량을 계산한다.

공정의 목표값을  $\mu_0$ , 표준편차를  $\sigma$ 라 하면,  $i$ 번째 샘플링 간격  $h_{(i)}$ 와 관리통계량으로  $Z_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} h_{(1)} &= h_2, \\ h_{(i)} &= \begin{cases} h_2, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ h_1, & \text{if } Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{n_0} (\bar{X}_1 - \mu_0) / \sigma, \\ Z_i &= \begin{cases} \sqrt{n_0} (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-1} \in I_1; \\ \sqrt{j n_0} (\sum_{m=i-j+1}^i \bar{X}_m / j - \mu_0) / \sigma, & \text{if } Z_{i-j} \in I_1, Z_{i-j+1}, \dots, Z_{i-1} \in I_2. \end{cases} \quad (i \geq 2) \end{aligned} \quad (3)$$

공정 특성치는 정규분포를 따르고, 공정은 관리상태  $N(\mu_0, \sigma^2)$ 에서 시작하며, 이상원인이 발생하면 공정평균이  $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma / \sqrt{n_0}$ 으로 이동한다고 가정하자. 관리통계량에 누적된 표본크기가  $j n_0$ 이고, 공정평균이  $\mu_1$ 으로 이동하였다면, 관리통계량이 영역  $I_1, I_2, I_3$ 에 속할 확률은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(j, \delta) &= \Phi(w - \delta\sqrt{j}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{j}), \\ p_3(j, \delta) &= 1 - \Phi(k - \delta\sqrt{j}) + \Phi(-k - \delta\sqrt{j}), \\ p_2(j, \delta) &= 1 - p_1(j, \delta) - p_3(j, \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

단,  $\Phi(\cdot)$ 은 표준정규분포 누적확률을 나타낸다.

### 2.2 마코프 모형

다음으로 VSI A-MA 관리도의 운영특성을 규명하기 위하여 상태를 정의하고, 마코프체인을 구성한다. 한 번의 샘플링을 행할 때 다음과 같이 여섯 가지의 경우가 발생한다.

- ①: 공정은 관리상태이며 관리통계량이 일치영역( $I_1$ )에 속함
- ②: 공정은 관리상태이며 관리통계량이 의심영역( $I_2$ )에 속함
- ③: 공정은 관리상태이며 관리통계량이 불일치영역( $I_3$ )에 속함
- ④: 공정은 이상상태이며 관리통계량이 일치영역( $I_1$ )에 속함
- ⑤: 공정은 이상상태이며 관리통계량이 의심영역( $I_2$ )에 속함
- ⑥: 공정은 이상상태이며 관리통계량이 불일치영역( $I_3$ )에 속함

불일치영역에 속하면 이상신호가 발생하므로 과도(transient) 상태에서는 고려할 필요가 없다. 가장 최근의  $L-1$ 개 관리통계량  $Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1}$ 을 고려하여 다음 통계량  $Z_i$ 를 결정하는

데, 관리통계량이 일단 일치영역에 속하게 되면(○=① U ①) 그 이전의 표본은 더 이상 사용하지 않으므로 통합하여 \* = ① U ① U ② U ②로 나타낼 수 있다. 따라서  $i$  번째 샘플링 시점에서 <Table 1>과 같이 총  $M \equiv L(L+1)/2$ 개의 과도상태 ( $a, b$ )를 고려한다. 단,  $a$ 는 통계량  $Z_i$ 에 누적될 표본군의 수를 나타내고( $a=1, \dots, L$ ),  $b$ 는 통계량  $Z_i$ 에 누적될 이상 표본군의 수를 나타낸다( $b=1, \dots, a$ ). 일례로 최근 5회의 샘플링 결과가  $Z_{i-5} \in I_1, Z_{i-4} \in I_2, Z_{i-3} \in I_1, Z_{i-2} \in I_2, Z_{i-1} \in I_2$ 와 같고, 이상원인이 샘플링 구간( $i-2, i-1$ )에서 발생했다면,  $a=3, b=2$ 가 되고, 다음 통계량은  $Z_i = \sqrt{3n_0} [(\bar{X}_{i-2} + \bar{X}_{i-1} + \bar{X}_i)/3 - \mu_0]/\sigma$ 와 같이 계산된다. VSI A-MA 관리도에서 상태 간의 전이확률은 샘플링 간격과는 무관하므로 S-MA 관리도에서와 동일하고, 이는 <Table 1>과 같다.

상태 정의에 따라 아래의  $(M+1) \times (M+1)$  전이행렬을 갖는 마코프체인으로 VSI A-MA 관리도의 샘플링 프로세스를 설명할 수 있다.

$$P_\delta = \begin{pmatrix} Q_\delta & (I - Q_\delta)1 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix},$$

단,  $Q_\delta$ 는 과도상태 간의  $M \times M$  전이행렬을 나타내며, 그 원소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} q_{\delta(j, m)(1, 1)} &= p_1(j, m \delta / j), \quad (1 \leq m \leq j \leq L) \\ q_{\delta(j, m)(j+1, m+1)} &= p_2(j, m \delta / j), \\ &(1 \leq m \leq j \leq L-1) \end{aligned} \quad (5)$$

위의 경우를 제외한 나머지 상태전이율은 모두 0이 된다.

Table 1. Transition between state vectors in VSI A-MA chart

State	$(Z_{i-L+1}, \dots, Z_{i-1})$	$n(Z_i)$	$E[Z_i]$	$Z_i$ Region	Next State	$(Z_{i-L+2}, \dots, Z_i)$	Transition Probability
(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$n_0$	$\delta$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(1, \delta)$
				$I_2$	(2, 2)	(*, ..., *, ○, ②)	$p_2(1, \delta)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(1, \delta)$
(2, 1)	(*, ..., *, ○, ②)	$2n_0$	$\delta/\sqrt{2}$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(2, \delta/2)$
				$I_2$	(3, 2)	(*, ..., *, ○, ②, ②)	$p_2(2, \delta/2)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(2, \delta/2)$
(2, 2)	(*, ..., *, ○, ②)	$2n_0$	$\sqrt{2}\delta$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(2, \delta)$
				$I_2$	(3, 3)	(*, ..., *, ○, ②, ②)	$p_2(2, \delta)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(2, \delta)$
(3, 1)	(*, ..., *, ○, ②, ②)	$3n_0$	$\delta/\sqrt{3}$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(3, \delta/3)$
				$I_2$	(4, 2)	(..., *, ○, ②, ②, ②)	$p_2(3, \delta/3)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(3, \delta/3)$
(3, 2)	(*, ..., *, ○, ②, ②)	$3n_0$	$2\delta/\sqrt{3}$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(3, 2\delta/3)$
				$I_2$	(4, 3)	(..., *, ○, ②, ②, ②)	$p_2(3, 2\delta/3)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(3, 2\delta/3)$
(3, 3)	(*, ..., *, ○, ②, ②)	$3n_0$	$\sqrt{3}\delta$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(3, \delta)$
				$I_2$	(4, 4)	(..., *, ○, ②, ②, ②)	$p_2(3, \delta)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(3, \delta)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(L, 1)	(②, ②, ..., ②)	$Ln_0$	$\delta/\sqrt{L}$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(L, \delta/L)$
				$I_2$	(L+1)	Signal	$p_2(L, \delta/L)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(L, \delta/L)$
(L, 2)	(②, ②, ..., ②, ②)	$Ln_0$	$2\delta/\sqrt{L}$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(L, 2\delta/L)$
				$I_2$	(L+1)	Signal	$p_2(L, 2\delta/L)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(L, 2\delta/L)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(L, L)	(②, ②, ..., ②)	$Ln_0$	$\sqrt{L}\delta$	$I_1$	(1, 1)	(*, *, ..., *, ○)	$p_1(L, \delta)$
				$I_2$	(L+1)	Signal	$p_2(L, \delta)$
				$I_3$	(L+1)	Signal	$p_3(L, \delta)$
(L+1)	(Absorbing State) : Signal. The control statistic $Z_i$ falls in $I_3$ , or $L$ consecutive $Z$ s fall in $I_2$ .						

### 3. VSI A-MA 관리도의 통계적 특성

#### 3.1 관리상태 하에서의 ATS

초기상태확률은 공정이 관리상태를 오랫동안 지속해왔다는 전제 하에서 정상상태(steady state) 확률로서 정의하므로 초기상태는  $(1, 1), (2, 1), \dots, (L, 1)$  등  $L$  개의 상태만이 고려된다. 관리상태에서는 평균이동이 발생하지 않으므로  $(\delta=0)$  사용된 표본크기가 식 (4)의 계산에 영향을 미치지 않는다. 따라서 관리상태 하의 과도상태 전이행렬을  $\mathbf{Q}_0$ 이라 하면, 다음과 같은 원소로 구성된다.

$$\begin{aligned} q_{0(j,1)(1,1)} &= p_1(\cdot, 0) \equiv p_1(0), \quad (1 \leq j \leq L) \\ q_{0(j,1)(j+1,1)} &= p_2(\cdot, 0) \equiv p_2(0), \\ &\quad (1 \leq j \leq L-1) \end{aligned} \quad (6)$$

위의 경우를 제외한 나머지 상태전이율은 모두 0이 된다.

관리상태 하의 정상상태 확률벡터  $\boldsymbol{\pi}_0 = (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, \dots, \pi_{(L,1)})^T$ 는 다음 연립식의 해를 구하여 계산할 수 있으며, 이상 원인 발생 시 초기상태확률벡터로 사용된다.

$$\boldsymbol{\pi}_0^T \mathbf{Q}_c = \boldsymbol{\pi}_0^T, \quad \boldsymbol{\pi}_0^T \mathbf{1}_L = 1, \quad (7)$$

단,  $\mathbf{1}_L = (1, \dots, 1)^T$ 이며, 행렬  $\mathbf{Q}_c$ 는 이상신호가 발생하지 않았다는 전제 하의 전이행렬을 나타내며 다음과 같은 원소로 구성된다.

$$\begin{aligned} q_{c(j,1)(1,1)} &= \frac{p_1(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, \quad (1 \leq j \leq L) \\ q_{c(j,1)(j+1,1)} &= \frac{p_2(0)}{p_1(0) + p_2(0)}, \quad (1 \leq j \leq L-1) \end{aligned} \quad (8)$$

먼저, 평균 런 길이(Average Run Length; ARL)를 살펴본다. ARL은 이상신호가 발생하기까지의 평균 샘플링 회수를 나타내므로, 샘플링 간격과는 무관하다. 따라서 VSI A-MA 관리도의 ARL은 S-MA 관리도의 ARL과 동일한 식으로 계산되며, 관리상태 하에서의 ARL은 다음과 같다.

**[보조정리 1]** 관리상태 하의  $L$  개 상태에 대한 ARL 벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{ARL}_{R,0} \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{1}_L = (a_{(1,1)}, a_{(2,1)}, \dots, a_{(L,1)})^T,$$

$$\text{단, } a_{(i,1)} = \sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j / D_0, \quad (9)$$

$$D_0 = |\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0| = 1 - p_1(0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(0)^j, \quad (10)$$

**[증명]** (Lim 2007) 참조.

**[보조정리 2]** 식 (7)으로부터 계산된 정상상태 확률은 다음과 같다( $i = 1, \dots, L$ ).

$$\pi_{(i,1)} = \frac{[p_2(0) / \{p_1(0) + p_2(0)\}]^{i-1}}{\sum_{j=1}^L [p_2(0) / \{p_1(0) + p_2(0)\}]^{j-1}}. \quad (11)$$

**[증명]** (Lim 2007) 참조.

다음의 정리는 관리상태 하의 ATS 계산을 위하여 본 연구에서 도출된 것이다.

**[정리 1]** 관리상태 하의 ATS 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{ATS}_{R,0} &\equiv (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{h}_L \\ &= (t_{(1,1)}, t_{(2,1)}, \dots, t_{(L,1)})^T, \\ t_{(1,1)} &= \left[ h_1 \sum_{j=1}^{L-1} p_2(0)^j + h_2 \right] / D_0, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$t_{(i,1)} = [h_1 \{1 - p_1(0)\} + h_2 p_1(0)] \sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j / D_0, \quad (2 \leq i \leq L) \quad (12b)$$

**[증명]**

<Figure 1>에 나타난 바와 같이 상태  $(1, 1)$ 에서 시작하여 상태  $(1, 1)$ 로 돌아오는 주기의 확률은  $p_1(0) \sum_{j=0}^{L-1} p_2(0)^j$ 이다. 따라서 식 (10)의  $D_0$ 은 상태  $(1, 1)$ 에서 시작하여 상태  $(1, 1)$ 로 다시 돌아오지 않고 흡수상태로 전이할 확률을 나타내고, 역수  $1/D_0$ 은 평균 주기수를 나타낸다. 식 (11)의  $a_{(i,1)}$ 의 분자 항  $\sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j$ 은 한 주기에서 상태  $(i, 1)$ 에서 시작하여 흡수상태로 전이할 때까지 과도상태에 머문 회수를 나타낸다. 상태  $(1, 1)$ 에서 시작한 경우에는 이때의 샘플링 간격  $h_2$ 에 나머지 과도상태에서 머문 시간  $h_1 \sum_{j=1}^{L-1} p_2(0)^j$ 이 합쳐져 주기당 과도상태에 머문 평균시간이 되므로 식 (12a)를 얻는다. 상태  $(i, 1)$  ( $i \geq 2$ )에서 시작한 경우에는 주기당 과도상태에 머문 회수  $\sum_{j=0}^{L-i} p_2(0)^j$ 이 각각 상태  $(1, 1)$ 을 거치는 경우의  $h_2 p_1(0)$ 과 아닌 경우의  $h_1 \{1 - p_1(0)\}$ 로 나뉘므로 식 (12b)를 얻는다. ■  
샘플링 간격  $h_1 = h_2 = 1$ 인 경우, 식 (12)의 ATS는 식 (9)의 ARL과 같아진다.

#### 3.2 이상상태 하에서의 ATS

식 (7)으로부터 구한 해를 대입하여 전체 과도상태에 대한

$M \times 1$  초기상태확률 벡터를  $\pi = (\pi_{(1,1)}, \pi_{(2,1)}, 0, \pi_{(3,1)}, 0, 0, \dots, \pi_{(L,1)}, 0, \dots, 0)^T$ 와 같이 설정하면, 정상상태의 ARL과 ATS는 각각 다음과 같이 계산된다.

$$ARL_\delta = \pi^T(I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{1}_M, \tag{13}$$

$$ATS_\delta = \pi^T(I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{h}_M, \tag{14}$$

단,  $\mathbf{h}_M = (h_2, h_1, \dots, h_1)^T$ 인  $M \times 1$  샘플링 간격 벡터를 나타낸다.

식 (13)의 이상상태 하의 ARL은 S-MA 관리도에서와 같이, 다음과 같이 계산된다.

**[보조정리 3]** 이상상태 하에서의 ARL 벡터를

$$ARL_\delta = (I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{1}_M \quad \text{라 하면,}$$

$$= (a_{1,1}(\delta), a_{2,1}(\delta), a_{2,2}(\delta), \dots, a_{L,L}(\delta))^T$$

$$a_{1,1}(\delta) = \sum_{i=1}^L u_i(\delta) / D_{1,\delta}, \tag{15}$$

$$a_{i,1}(\delta) = v_i(\delta) a_{1,1}(\delta) + e_i(\delta), \quad (2 \leq i \leq L) \tag{16}$$

단,

$$D_{1,\delta} = |I - Q_\delta| = 1 - \sum_{i=1}^L \left[ p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right], \tag{17}$$

$$u_1(\delta) = 1, \quad u_i(\delta) = \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta), \quad (2 \leq i \leq L) \tag{18}$$

$$v_1(\delta) = 1, \quad v_i(\delta) = \sum_{j=1}^{L-i+1} \left[ p_1(i+j-1, \frac{j\delta}{i+j-1}) \times \prod_{m=1}^{i-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right] \quad (2 \leq i \leq L) \tag{19}$$

$$e_1(\delta) = 0, \quad e_i(\delta) = \sum_{j=2}^{L-i+1} \left[ \prod_{m=1}^{j-1} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}) \right], \quad (2 \leq i \leq L) \tag{20}$$

단,  $\prod_{j=1}^0 (\cdot) \equiv 1$ 로 정의한다.

**[증명]** (Lim 2007) 참조.

식 (14)의 이상상태 하의 ATS를 구하기 위해 본 연구에서 도출된 결과는 다음과 같다.

**[정리 2]** 이상상태 하에서의 ATS 벡터를

$$ATS_\delta = (I - Q_\delta)^{-1} \mathbf{h}_M \quad \text{라 하면,}$$

$$= (t_{1,1}(\delta), t_{2,1}(\delta), t_{2,2}(\delta), \dots, t_{L,L}(\delta))^T$$

$$t_{1,1}(\delta) = \left[ h_2 u_1(\delta) + h_1 \sum_{i=2}^L u_i(\delta) \right] / D_{1,\delta}, \tag{21}$$

$$t_{i,1}(\delta) = v_i(\delta) t_{1,1}(\delta) + h_1 e_i(\delta), \quad (2 \leq i \leq L) \tag{22}$$

**[증명]**

<Figure 2>에 예시된 바와 같이 전체  $M = L(L+1)/2$ 개의 상태 중 자기 자신으로 돌아올 수 있는 상태는 (1,1), (2,2), ..., (L,L) 등  $L$ 개 뿐이다. 이들을 ‘유효상태’라 명명한다. 또한 이들 유효상태는 초기상태로부터 상태 (1,1)을 거쳐야 도달할 수 있다. 이에 착안하여 전이행렬  $Q_\delta$ 를 다음과 같이 두 부분으로 나눈다. ① 초기상태로부터 상태 (1,1)까지의 전이 ② 상태 (1,1)로부터 유효상태까지의 전이. 상태 (1,1)에서 시작하여 상태 (1,1)로 돌아오는 주기의 확률은  $\sum_{i=1}^L$

$\left[ p_1(i, \delta) \prod_{j=1}^{i-1} p_2(j, \delta) \right]$ 이다. 따라서 식 (17)의 행렬값  $D_{1,\delta}$ 는 상태 (1,1)에서 시작하여 상태 (1,1)로 돌아오지 않고 흡수상태로 전이하는 확률을 나타낸다. <Figure 3>에 나타난 바와 같이  $u_i(\delta)$ 는 상태 (1,1)로부터 유효상태 (i,i)까지 직접 이르는 확률을 나타내므로 식 (15)의  $a_{1,1}(\delta)$ 는 상태 (1,1)에서 시작하여 흡수상태로 들어가기까지의 기대 전이회수를 나타낸다. 상태 (1,1)에서 머문 시간은  $h_2$ 이고, 나머지 과도상태에서 머문 시간은  $h_1$ 이므로 식 (15)로부터 식 (21)을 얻는다. 또한  $v_i(\delta)$ 는 초기상태 (i,1)로부터 상태 (1,1)까지 직접 이르는 확률을 나타내고,  $e_i(\delta)$ 는 초기상태 (i,1)로부터 상태

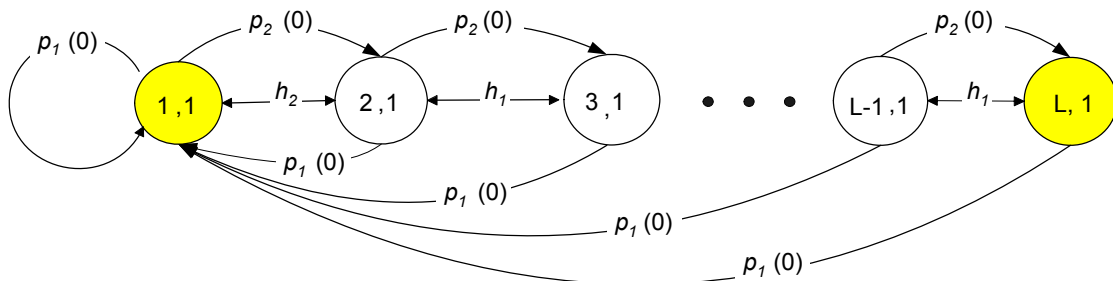


Figure 1. State transition diagram during in-control state

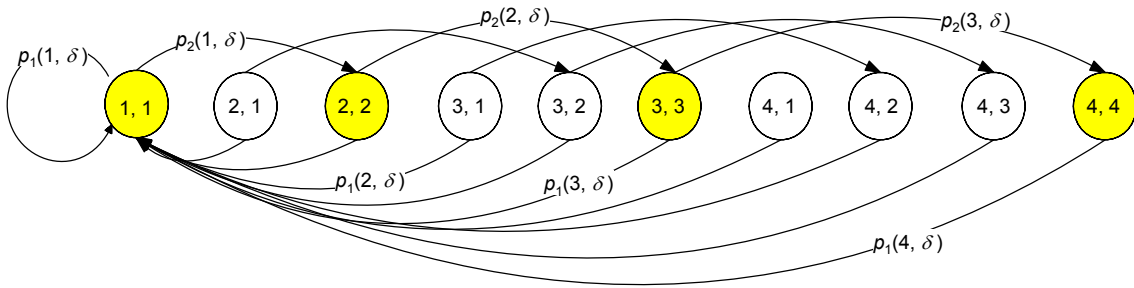


Figure 2. Transition diagram for transient states during out-of-control state ( $L = 4$ )

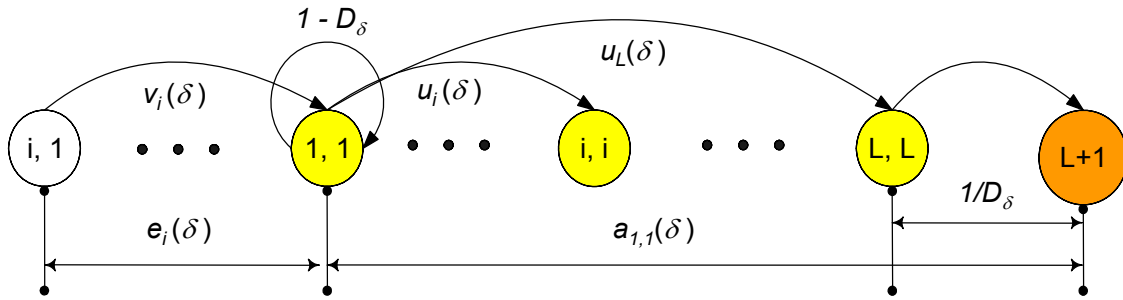


Figure 3. Analysis of transition between transient states

(1, 1)까지 이르는 기대 전이회수를 나타낸다. 상태 (1, 1)에서 머문 시간은  $h_2$  이고, 나머지 과도상태에서 머문 시간은  $h_1$  이므로 식 (16)으로부터 식 (22)를 얻는다. ■  
 이상의 결과를 종합하여 정상상태 ATS를 계산하는 알고리즘을 다음과 같이 정리할 수 있다.

**ATS 계산 알고리즘**

- [단계 0] 설계변수  $k, w, L, n_0, h_1, h_2$  와 평균 이동폭  $\delta$  를 정한다.
  - [단계 1] 식 (4)의 전이확률  $p_i(j, m\delta/j)$  를 계산한다 ( $i=1, 2, 3; 1 \leq j \leq L; 1 \leq m \leq j$ ).
  - [단계 2] 식 (13)의 정상상태 확률  $\pi_{(i,1)}$  을 계산한다 ( $1 \leq i \leq L$ ).
  - [단계 3] 식 (17)의  $D_{1,\delta}$  를 계산한다.
  - [단계 4] 식 (18)의  $u_i(\delta)$  를 계산한다 ( $1 \leq i \leq L$ ).
  - [단계 5] 다음과 같은 크기  $(L-i+1)$  벡터를 계산한다 ( $2 \leq i \leq L$ ).
- $$\mathbf{b}_i^T(\delta) = (1, p_2(i, \delta), \dots, \prod_{m=1}^{L-i} p_2(i+m-1, \frac{m\delta}{i+m-1}))$$
- $$\mathbf{c}_i^T(\delta) = (p_1(i, \delta/i), p_1(i+1, 2\delta/(i+1)), \dots, p_1(L, (L-i+1)\delta/L))$$
- [단계 6]  $v_1(\delta) = 1, e_1(\delta) = 0$  으로 놓는다.  
 $v_i(\delta) = \mathbf{c}_i^T(\delta) \mathbf{b}_i(\delta), e_i(\delta) = \mathbf{b}_i^T(\delta) \mathbf{1}_{L-i+1}$  을 계산한다 ( $2 \leq i \leq L$ ).
  - [단계 7] 식 (21)과 식 (22)로부터  $t_{(i,1)}(\delta)$  를 계산한다 ( $1 \leq i \leq L$ ).

**4. VSI A-MA 관리도의 통계적 설계**

앞에서 도출한 통계적 특성을 이용하여 VSI A-MA 관리도의 통계적 설계 절차를 제안한다. 먼저 유의수준  $\alpha$  를 지정하면, 관리상태 하의 ARL은 다음과 같이 결정된다.

$$ARL_0 = \pi^T(I - Q_0)^{-1} \mathbf{1}_M = \pi_0^T ARL_{R,0} \equiv 1/\alpha \quad (23)$$

정규분포를 따르는 경우, 관리한계  $k_0$  인 일반적 슈하트  $\bar{X}$  관리도에서는  $\alpha = 2\Phi(-k_0)$  와 같다. 여기서  $\pi_0$  와  $ARL_{R,0}$  는 관리길이  $L, p_1(0)$  및  $p_2(0)$  만의 함수이다. 따라서  $L$  과  $k$  가 정해지면, 식 (23)으로부터 임계한계  $w$  를 결정할 수 있다. 관리한계  $k = 3.1$  과  $k = 4.0$  에 대하여 임계한계를 계산한 결과는 <Table 2>와 같다.

다음으로 관리상태 하의 ATS에 대한 제약을 다음과 같이 부과한다.

$$ATS_0 = \pi^T(I - Q_0)^{-1} \mathbf{h}_M = \pi_0^T ATS_0 \equiv h_0/\alpha \quad (24)$$

따라서  $L, k, w, h_1$  등이 정해지면 식 (24)로부터  $h_2$  를 구할 수 있다. 또한 [정리 3]으로부터 주어진  $L$  과  $k$  에 대하여 최소의  $ATS_\delta$  를 갖는  $h_1$  을 쉽게 결정할 수 있다.

[정리 3] 현실적으로 실현 가능한 최소의 샘플링 간격을  $h_{min}$  이라 하자. 주어진  $L$  과  $k$  에 대하여 최소의  $ATS_\delta$  를 갖는  $h_1$  은 다음과 같이 결정된다.

$$h_1^* = \begin{cases} h_{\min}, & \text{if } ATS_\delta < h_0 ARL_\delta, \text{ for some } h_1 < h_0; \\ h_0, & \text{if } ATS_\delta > h_0 ARL_\delta, \text{ for some } h_1 < h_0 \end{cases} \quad (25)$$

$$ATS_0 = A_{0,1}h_1 + A_{0,2}h_2, ARL_0 = A_{0,1} + A_{0,2}, \quad (26)$$

$$ATS_\delta = A_{\delta,1}h_1 + A_{\delta,2}h_2, ARL_\delta = A_{\delta,1} + A_{\delta,2}. \quad (27)$$

[증명]

먼저  $ATS_0$  와  $ATS_\delta$  를 다음과 같이 나타낼 수 있음에 주목      따라서 제약식  $ATS_0 = h_0 ARL_0$  로부터 다음과 같이  $h_2$  를 나타낼 수 있다.

Table 2. Threshold limits for  $k = 3.1$  and  $k = 4.0$  ( $k_0 = 3.0$ )

$k = 3.1$										
$L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	$w = k_0$	2.17096	1.66327	1.35319	1.14150	0.98660	0.86785	0.77371	0.69717	0.63369
10	0.58018	0.53446	0.49496	0.46051	0.43019	0.40332	0.37935	0.35784	0.33844	0.32086
20	0.30486	0.29023	0.27682	0.26448	0.25309	0.24255	0.23277	0.22366	0.21518	0.20725
30	0.19982	0.19286	0.18631	0.18015	0.17434	0.16885	0.16366	0.15875	0.15409	0.14966
40	0.14546	0.14145	0.13764	0.13401	0.13054	0.12722	0.12405	0.12102	0.11811	0.11532
50	0.11265	0.11008	0.10762	0.10524	0.10296	0.10076	0.09865	0.09661	0.09464	0.09274
60	0.09090	0.08913	0.08742	0.08576	0.08416	0.08260	0.08110	0.07964	0.07823	0.07686
70	0.07553	0.07424	0.07299	0.07178	0.07060	0.06945	0.06833	0.06724	0.06619	0.06516
80	0.06416	0.06318	0.06223	0.06131	0.06040	0.05952	0.05867	0.05783	0.05701	0.05621
90	0.05543	0.05467	0.05393	0.05321	0.05250	0.05180	0.05112	0.05046	0.04981	0.04918
100	0.04856	0.04795	0.04735	0.04677	0.04620	0.04564	0.04510	0.04456	0.04403	0.04352
110	0.04301	0.04252	0.04203	0.04155	0.04109	0.04063	0.04018	0.03974	0.03930	0.03888
120	0.03846	0.03805	0.03764	0.03725	0.03686	0.03648	0.03610	0.03573	0.03537	0.03501
130	0.03466	0.03431	0.03398	0.03364	0.03331	0.03299	0.03267	0.03236	0.03205	0.03175
140	0.03145	0.03116	0.03087	0.03058	0.03030	0.03003	0.02975	0.02949	0.02922	0.02896
150	0.02870	0.02845	0.02820	0.02796	0.02772	0.02748	0.02724	0.02701	0.02678	0.02656
160	0.02634	0.02612	0.02590	0.02569	0.02548	0.02527	0.02506	0.02486	0.02466	0.02447
170	0.02427	0.02408	0.02389	0.02370	0.02352	0.02334	0.02316	0.02298	0.02280	0.02263
180	0.02246	0.02229	0.02212	0.02196	0.02180	0.02164	0.02148	0.02132	0.02116	0.02101
190	0.02086	0.02071	0.02056	0.02041	0.02027	0.02013	0.01999	0.01985	0.01971	0.01957
$k = 4.0$										
$L$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	$w = k_0$	1.93757	1.45656	1.16930	0.97515	0.83422	0.72699	0.64259	0.57442	0.51824
10	0.47117	0.43120	0.39685	0.36703	0.34094	0.31792	0.29747	0.27921	0.26280	0.24800
20	0.23457	0.22234	0.21117	0.20093	0.19151	0.18282	0.17478	0.16732	0.16039	0.15393
30	0.14789	0.14225	0.13696	0.13200	0.12732	0.12292	0.11877	0.11485	0.11114	0.10763
40	0.10429	0.10113	0.09812	0.09526	0.09253	0.08993	0.08745	0.08508	0.08281	0.08064
50	0.07856	0.07657	0.07466	0.07283	0.07107	0.06938	0.06775	0.06619	0.06468	0.06323
60	0.06183	0.06048	0.05917	0.05791	0.05670	0.05552	0.05438	0.05328	0.05222	0.05119
70	0.05019	0.04922	0.04829	0.04738	0.04649	0.04564	0.04480	0.04400	0.04321	0.04245
80	0.04170	0.04098	0.04028	0.03960	0.03893	0.03828	0.03765	0.03704	0.03644	0.03585
90	0.03528	0.03473	0.03419	0.03366	0.03314	0.03264	0.03214	0.03166	0.03119	0.03073
100	0.03029	0.02985	0.02942	0.02900	0.02859	0.02819	0.02779	0.02741	0.02703	0.02666
110	0.02630	0.02595	0.02560	0.02526	0.02493	0.02461	0.02429	0.02397	0.02367	0.02336
120	0.02307	0.02278	0.02250	0.02222	0.02194	0.02167	0.02141	0.02115	0.02090	0.02065
130	0.02040	0.02016	0.01992	0.01969	0.01946	0.01924	0.01902	0.01880	0.01858	0.01837
140	0.01817	0.01797	0.01777	0.01757	0.01738	0.01719	0.01700	0.01681	0.01663	0.01645
150	0.01628	0.01611	0.01594	0.01577	0.01560	0.01544	0.01528	0.01512	0.01497	0.01481
160	0.01466	0.01451	0.01437	0.01422	0.01408	0.01394	0.01380	0.01367	0.01353	0.01340
170	0.01327	0.01314	0.01301	0.01289	0.01276	0.01264	0.01252	0.01240	0.01229	0.01217
180	0.01206	0.01194	0.01183	0.01172	0.01162	0.01151	0.01140	0.01130	0.01120	0.01110
190	0.01100	0.01090	0.01080	0.01070	0.01061	0.01051	0.01042	0.01033	0.01024	0.01015

$$h_2 = (h_0 ANSS_0 - A_{0,1}h_1) / A_{0,2} \tag{28}$$

이를  $ATS_\delta$ 의 식에 대입하면 다음의 식을 얻는다.

$$ATS_\delta = A_{\delta,2}h_0ARL_0 / A_{0,2} + (A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2})h_1 \tag{29}$$

즉,  $ATS_\delta$ 는  $h_1$ 의 선형함수가 된다. 만약  $A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2}$  항이 양수이면  $ATS_\delta$ 는  $h_1$ 에 대하여 증가함수가 되므로 최적의  $h_1$ 은 최소 샘플링 간격  $h_{min}$ 이 된다. 반대의 경우 최적의  $h_1$ 은 최대값  $h_0$ 가 된다. 또한 식 (26), 식 (27), 식 (28)로부터 다음의 식을 얻는다.

$$ATS_\delta - h_0ARL_\delta = (A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2})(h_1 - h_0) \tag{30}$$

따라서  $h_1 < h_0$ 인 임의의  $h_1$ 에 대하여  $ATS_\delta < h_0ARL_\delta$ 이면  $A_{\delta,1} - A_{\delta,2}A_{0,1}/A_{0,2}$ 는 양수가 되므로 최적의  $h_1$ 은  $h_{min}$ 이 된다. 반대로  $ATS_\delta > h_0ARL_\delta$ 이면 최적의  $h_1$ 은  $h_0$ 가 된다. ■

이상의 결과를 토대로 VSI A-MA 관리도의 통계적 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

**VSI A-MA 관리도의 통계적 설계 절차**

- [단계 0] 비교하고자 하는 Shewhart  $\bar{X}$ -관리도의 설계모수  $n_0$ ,  $h_0$ ,  $k_0$ 와  $ARL_0$ ,  $h_{min}$ ,  $\delta$  등을 정한다. 관리한계  $k$ 의 최대값  $k_{max}$ 와 증분  $\Delta k$ 를 결정한다. 경험상 관리한계  $k$ 의 최대값  $k_{max} = k_0 + 1$ , 증분  $\Delta k = 0.1$ 로 설정하면 충분하다.
- [단계 1]  $L = 1$ ,  $k = k_0 + \Delta k$ 로 초기화 한다.
- [단계 2] 식 (23)의 해  $w$ 를 계산한다.
- [단계 3]  $h_1 = h_{min}$ 으로 놓고 식 (24)의 해  $h_2$ 를 계산한다.
- [단계 4]  $L$ ,  $k$ ,  $w$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ 와  $\delta$ 를 대입하여  $ARL_\delta$ 와  $ATS_\delta$ 를 계산하고, 식 (25)를 기준으로 최적의  $h_1$ 을 결정한다. 만약  $h_1^* = h_0$ 이면  $h_2^* = h_0$ 로 놓는다. 최적해를 저장한다.
- [단계 5]  $ATS_\delta$ 가 감소하는 한  $L$ 을 1씩 증가시켜가면서 [단계 2]~[단계 4]를 반복한다.
- [단계 6] 주어진  $k$ 에 대해 최적해가 구해지면  $k = k + \Delta k$ 로 증가시키고  $L = 1$ 로 재설정 후 [단계 2]~[단계 5]를 반복한다.
- [단계 7]  $k = k_{max}$ 에 다다르면 종료하고, 최소의  $ATS_\delta$ 를 갖는  $L$ ,  $k$ ,  $w$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ 를 최적해로 한다.

<Figure 4>는  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.0$ ,  $k = 3.2$ ,  $h_{min} = 0.1$ ,  $\delta = 1$ 인 경우, 관리길이  $L$ 값의 증가에 따른 최소의  $ATS_\delta$ 와 이때의  $ARL_\delta$ 의 변화를 나타낸다. 여기서 주목할 점은  $L$ 값이 증가함에 따라 단조감소 후 단조증가하는 경향을 나타낸다는 점이다. 이러한 특성은 위의 알고리즘의 [단계 5]를 뒷받침한다.

<Figure 5>는  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.0$ ,  $h_{min} = 0.1$ ,  $\delta = 1$ 인 경우, 몇 가지 관리한계  $k$  값에 대하여  $\delta$ 에 따른 최적  $ATS_\delta$ 의 변화를 나타낸다. 그림에서 나타난 바와 같이 관리한계의 변화는 최적  $ATS_\delta$ 에 큰 영향을 미치지 않는다. 이러한 특성은 위의 알고리즘에서  $k_{max} = k_0 + 1$ , 증분  $\Delta = 0.1$ 로 설정하면 충분하다는 이유를 뒷받침한다.

<Table 3>은  $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3.0$ ,  $h_0 = 1.0$  ( $ARL_0 = ATS_0, \approx 370.4$ )  $h_{min} = 0.1$ 인 경우,  $\delta$ 가 0.25에서 5까지 증가할 때 다양한  $k$ 값(3.1, 3.2, 3.5, 4.0)에 따른  $ATS_\delta$ 와  $ARL_\delta$ 의 변화를 나타낸다. 모든 경우에 있어서  $\delta$ 가 작을수록 최적 관리길이 ( $L$ )는 증가하고 임계한계 ( $w$ )는 감소하는 경향을 보인다. 즉, 공정평균의 작은 변화에 대해서는 임계한계를 작게 설정하여 일치영역을 줄이는 것이 좋으며, 이때  $ATS_0$ 와  $ARL_0$ 를 유지하기 위해 관리길이는 크게 잡는 것이다. 고정 샘플링 간격을 사용한 S-MA 관리도와 비교해 보면, 대부분의 경우 ATS가 개선된 효과를 보인다. 단, 표에서  $RR = (ARL_{\delta(S-MA)} -$

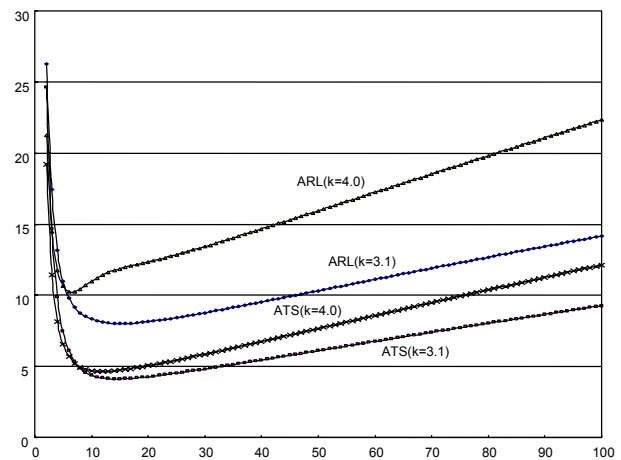


Figure 4. Monotone property of  $ARL_\delta$  and  $ATS_\delta$  with respect to  $L$  ( $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3$ ,  $h_{min} = 0.1$ ,  $\delta = 1$ ) ( $k = 3.1, 4.0$ )

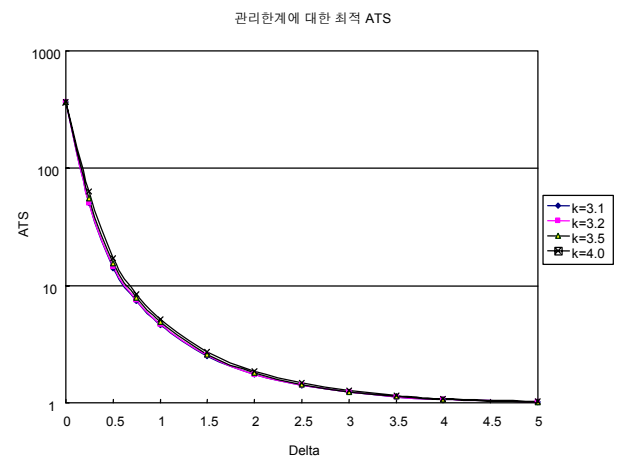


Figure 5. Robustness of optimal  $ATS_\delta$  with respect to  $k$  ( $n_0 = 1$ ,  $k_0 = 3$ ,  $h_{min} = 0.1$ )



$ATS_\delta$ ) /  $ARL_{\delta(S-MA)}$ 로서, 상대적 감소율을 나타낸다. 이는 VSI 방식이 S-MA 관리도의 통계적 성능을 향상시킨다는 것을 입증한다. VSI A-MA 관리도의  $ATS_\delta$ 와  $ARL_\delta$ 는  $k=3.1$ 에서 전반적으로 가장 우수한 특성을 보였으나,  $k=3.2$ 인 경우와 큰 차이를 보이지는 않는다. 단,  $k=3.5$ 나  $k=4.0$ 과 같이

넓은 관리한계를 사용하면 전반적인 ATS 성능이 저하되는 경향을 보이므로 바람직하지 않다. 마지막 열의  $E[h]$ 는 관리상태 하에서 샘플링 간격의 기댓값을 나타내며, 이들 값이 1 이상이므로 고정 샘플링 방식에 비해 샘플링 비용이 더 소요되지 않음을 의미한다.

**Table 3.**  $ATS_\delta$  for various  $k$  and  $\delta(n_0 = 1, k_0 = 3.0, h_{min} = 0.1)$

$\delta$	VSI A-MA Control Chart								S-MA Control Chart				
	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$k$	$w$	$ARL_\delta$	$RR$
0.25	107	3.1	0.0451	0.1	25.0531	51.6591	38.9761	1.0173	111	3.1	0.0430	51.6336	24.5%
0.5	43	3.1	0.1376	0.1	8.2986	21.9384	14.0802	1.0054	45	3.1	0.1305	21.9265	35.8%
0.75	23	3.1	0.2768	0.1	4.2157	12.7175	7.3522	1.0024	24	3.1	0.2645	12.7089	42.1%
1	15	3.1	0.4302	0.1	2.7959	8.4984	4.6157	1.0014	15	3.1	0.4302	8.4984	45.7%
1.5	8	3.1	0.7737	0.1	1.7002	4.7359	2.5011	1.0005	7	3.1	0.8678	4.7320	47.1%
2	6	3.1	0.9866	0.1	1.4274	3.1375	1.7486	1.0003	4	3.1	1.3532	3.0905	43.4%
2.5	4	3.1	1.3532	0.1	1.1893	2.2437	1.4046	1.0001	3	3.1	1.6633	2.2188	36.7%
3	3	3.1	1.6633	0.1	1.0932	1.7254	1.2286	1.0001	2	3.1	2.1710	1.7072	28.0%
3.5	3	3.1	1.6633	0.1	1.0932	1.4354	1.1232	1.0001	2	3.1	2.1710	1.3951	19.5%
4	2	3.1	2.1710	0.1	1.0253	1.2038	1.0666	1	1	3.1	3.0000	1.1886	10.3%
5	2	3.1	2.1710	0.1	1.0253	1.0384	1.0153	1	1	3.1	3.0000	1.0233	0.8%
$\delta$	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$k$	$w$	$ARL_\delta$	$RR$
0.25	100	3.2	0.0410	0.1	27.5301	54.9304	40.4736	1.032	100	3.2	0.0410	54.9304	26.3%
0.5	39	3.2	0.1353	0.1	8.4400	23.1535	14.4339	1.0094	42	3.2	0.1238	23.1220	37.6%
0.75	21	3.2	0.2743	0.1	4.2531	13.3422	7.4857	1.0042	23	3.2	0.2482	13.3283	43.8%
1	13	3.2	0.4524	0.1	2.6716	8.8824	4.6808	1.0022	14	3.2	0.4200	8.8755	47.3%
1.5	7	3.2	0.8070	0.1	1.6467	4.9069	2.5272	1.0008	6	3.2	0.9208	4.8992	48.4%
2	5	3.2	1.0696	0.1	1.3550	3.2142	1.7578	1.0005	3	3.2	1.5739	3.1610	44.4%
2.5	4	3.2	1.2737	0.1	1.2258	2.3326	1.4099	1.0003	2	3.2	2.0705	2.2590	37.6%
3	3	3.2	1.5739	0.1	1.1148	1.7864	1.2289	1.0001	2	3.2	2.0705	1.7341	29.1%
3.5	3	3.2	1.5739	0.1	1.1148	1.4867	1.1295	1.0001	2	3.2	2.0705	1.4315	21.1%
4	2	3.2	2.0705	0.1	1.0334	1.2329	1.0663	1	1	3.2	3.0000	1.1886	10.3%
5	2	3.2	2.0705	0.1	1.0334	1.0471	1.0174	1	1	3.2	3.0000	1.0233	0.6%
$\delta$	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$k$	$w$	$ARL_\delta$	$RR$
0.25	98	3.5	0.0342	0.1	33.0085	66.4990	45.3750	1.0618	100	3.5	0.0332	66.4507	31.7%
0.5	38	3.5	0.1209	0.1	9.4304	27.1626	15.5211	1.0176	40	3.5	0.1134	27.1385	42.8%
0.75	20	3.5	0.2581	0.1	4.5076	15.3577	7.8883	1.0075	21	3.5	0.2443	15.3552	48.6%
1	12	3.5	0.4455	0.1	2.7086	10.0625	4.8755	1.0037	8	3.5	0.6609	9.9728	51.1%
1.5	7	3.5	0.7466	0.1	1.7478	5.4906	2.5964	1.0016	4	3.5	1.1950	5.1962	50.0%
2	5	3.5	0.9984	0.1	1.4163	3.5865	1.7971	1.0009	3	3.5	1.4854	3.3233	45.9%
2.5	4	3.5	1.1950	0.1	1.2689	2.5964	1.4375	1.0006	2	3.5	1.9703	2.3246	38.2%
3	3	3.5	1.4854	0.1	1.1406	1.9728	1.2451	1.0003	2	3.5	1.9703	1.8476	32.6%
3.5	2	3.5	1.9703	0.1	1.0436	1.5516	1.1437	1.0001	1	3.5	3.0000	1.4462	20.9%
4	2	3.5	1.9703	0.1	1.0436	1.3303	1.0743	1.0001	1	3.5	3.0000	1.1886	9.6%
5	2	3.5	1.9703	0.1	1.0436	1.0785	1.0220	1.0001	1	3.5	3.0000	1.0233	0.1%
$\delta$	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$ARL_\delta$	$ATS_\delta$	$E[h]$	$L$	$k$	$w$	$ARL_\delta$	$RR$
0.25	105	4	0.0286	0.1	39.4450	88.3284	52.7158	1.0847	108	4	0.0274	88.3195	40.3%
0.5	38	4	0.1149	0.1	9.9157	34.4126	17.0784	1.0217	22	4	0.2223	33.5265	49.1%
0.75	19	4	0.2628	0.1	4.4297	18.6812	8.4557	1.0086	11	4	0.4712	17.3870	51.4%
1	12	4	0.4312	0.1	2.7899	11.9262	5.1443	1.0045	7	4	0.7270	10.7452	52.1%
1.5	6	4	0.8342	0.1	1.6064	6.1637	2.6990	1.0015	4	4	1.1693	5.5205	51.1%
2	4	4	1.1693	0.1	1.2846	3.9383	1.8571	1.0007	2	4	1.9376	3.5025	47.0%
2.5	3	4	1.4566	0.1	1.1501	2.8178	1.4777	1.0004	2	4	1.9376	2.4499	39.7%
3	3	4	1.4566	0.1	1.1501	2.2958	1.2776	1.0004	1	4	3.0000	2.0000	36.1%
3.5	2	4	1.9376	0.1	1.0475	1.7494	1.1613	1.0001	1	4	3.0000	1.4462	19.7%
4	2	4	1.9376	0.1	1.0475	1.5204	1.0931	1.0001	1	4	3.0000	1.1886	8.0%
5	2	4	1.9376	0.1	1.0475	1.1675	1.0314	1.0001	1	4	3.0000	1.0233	-0.8%

5. 비교실험

5.1 CUSUM 관리도와의 비교

다양한  $\delta$  값에 대하여 계산한 VSI A-MA 관리도( $k = 3.1$ )의 최적  $ATS_\delta$ 를 Reynolds *et al.*(1990)의 <Table 2>에 나타난 VSI-CUSUM 관리도의  $ATS_\delta$ 와 비교한 결과를 <Table 4>에 정리하였다. 단, CUSUM 열에서 FSI는 고정 샘플링간격(Fixed

Sampling Interval), VSI는 가변 샘플링 간격(Variable Sampling Interval), R-rate는  $ATS_\delta$ 의 상대적 감소율, 참조값( $\delta$ )은 감지하고자 하는 공정평균 목표값으로부터의 이탈도 등을 나타낸다. 모든 경우에 있어서 VSI A-MA 관리도의  $ATS_\delta$  값이 현저히 감소한 것을 알 수 있다.

실제 공정에서는 공정평균의 변화량  $\delta$ 를 정확히 알 수 없으므로, 하나의  $\delta$  값에 대응하는 최적 설계가 다른  $\delta$  값에 대해서는 좋지 않은 결과를 가져올 수 있다. 앞의 실험결과를 참고하

Table 4. Comparison of  $ATS_\delta$  with CUSUM and VSI CUSUM charts

$\delta$	VSI A-MA					CUSUM( $\delta = 0.25$ )			CUSUM( $\delta = 1.0$ )		
	$L$	$k$	$w$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	FSI	VSI	R-rate	FSI	VSI	R-rate
0				370.3984	370.3984	370.4	370.4	-	370.4	370.4	-
0.25	107	3.1	0.1155	51.1591	38.4761	76.3	62.8	38.7%	195.2	187.9	79.5%
0.5	43	3.1	0.1155	21.4384	13.5802	25.1	16.4	17.2%	68.0	57.5	76.4%
1	15	3.1	0.6341	7.9984	4.1157	9.4	5.2	20.9%	12.8	7.5	45.1%
1.5	8	3.1	0.6341	4.2359	2.0011	5.6	2.9	31.0%	4.8	2.4	16.6%
2	6	3.1	0.6341	2.6375	1.2486	4.0	2.0	37.6%	2.7	1.4	10.8%
3	3	3.1	0.6341	1.2254	0.7286	2.5	1.3	44.0%	1.3	1.0	27.1%
4	2	3.1	0.6341	0.7038	0.5666	1.8	1.1	48.5%	0.8	0.9	37.0%

$\delta$	VSI A-MA					CUSUM( $\delta = 0.25$ )			CUSUM( $\delta = 1.0$ )		
	$L$	$k$	$w$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	FSI	VSI	R-rate	FSI	VSI	R-rate
0				370.3984	370.3984	370.4	370.4	-	370.4	370.4	-
0.25	50	3.1	0.1155	63.8800	49.8563	76.3	62.8	20.6%	195.2	187.9	73.5%
0.5	50	3.1	0.1155	21.4893	13.7061	25.1	16.4	16.4%	68.0	57.5	76.2%
1	10	3.1	0.6341	8.3146	4.3753	9.4	5.2	15.9%	12.8	7.5	41.7%
1.5	10	3.1	0.6341	4.3087	2.0365	5.6	2.9	29.8%	4.8	2.4	15.1%
2	10	3.1	0.6341	2.9278	1.3979	4.0	2.0	30.1%	2.7	1.4	0.2%
3	10	3.1	0.6341	1.8062	0.9628	2.5	1.3	25.9%	1.3	1.0	3.7%
4	10	3.1	0.6341	1.3225	0.7905	1.8	1.1	28.1%	0.8	0.9	12.2%

Table 5. Comparison of  $ATS_\delta$  with EWMA chart

$\delta$	$L$	$k$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AARL_\delta$	$AATS_\delta$	$\lambda$	$ARL_{EWMA}$	R-rate
0.25	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	75.0628	57.9814	0.03	74.1	21.8%
0.5	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	23.0746	14.2163	0.05	28.6	50.3%
0.75	50	3.2	0.1208	0.1	9.4398	14.2431	8.2539	0.1	15.5	46.7%
1	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	8.8740	4.5500	0.1	10.1	55.0%
1.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	4.5203	2.0606	0.25	5.37	61.6%
2	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	3.0438	1.4010	0.4	3.47	59.6%
2.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	2.3029	1.1155	0.5	2.47	54.8%
3	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.8569	0.9587	0.75	1.87	48.7%
3.5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.5589	0.8578	0.75	1.46	41.2%
4	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.3474	0.7857	1	1.22	35.6%
5	10	3.2	0.6518	0.1	1.9502	1.0955	0.6911	1	1.03	32.9%

Table 6. Comparison of  $AATS_\delta$  with VSSVSI EWMA chart( $\delta = 0.5, \delta = 1.0$ )

$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AATS_\delta$	$E[h]$	$AATS_R$	VSEW1	VSEW2	VSEW3	VSEW4
0	43	0.1378	0.1	8.2899	370.40	1.0054	368.41	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	43	0.1378	0.1	8.2899	55.77	1.0054	55.47	57.70	58.82	58.66	58.99
0.5	43	0.1378	0.1	8.2899	13.58	1.0054	13.51	14.65	15.12	14.75	15.16
0.75	43	0.1378	0.1	8.2899	7.72	1.0054	7.68	7.86	7.99	7.89	7.99
1	43	0.1378	0.1	8.2899	5.63	1.0054	5.60	5.42	5.34	5.42	5.31
1.5	43	0.1378	0.1	8.2899	3.89	1.0054	3.87	3.34	3.11	3.30	3.09
2	43	0.1378	0.1	8.2899	3.10	1.0054	3.08	2.40	2.17	2.36	2.17
3	43	0.1378	0.1	8.2899	2.32	1.0054	2.31	1.53	1.38	1.51	1.41
4	43	0.1378	0.1	8.2899	1.91	1.0054	1.90	1.14	1.04	1.17	1.13
5	43	0.1378	0.1	8.2899	1.65	1.0054	1.64	0.94	0.87	1.04	1.02
$\delta$	$L$	$w$	$h_1$	$h_2$	$AATS_\delta$	$E[h]$	$AATS_R$	VSEW1	VSEW2	VSEW3	VSEW4
0	15	0.4305	0.1	2.7939	370.40	1.0014	369.90	370.40	370.40	370.40	370.40
0.25	15	0.4305	0.1	2.7939	132.05	1.0014	131.87	109.45	112.30	111.36	111.77
0.5	15	0.4305	0.1	2.7939	22.44	1.0014	22.41	22.54	22.26	22.78	22.03
0.75	15	0.4305	0.1	2.7939	7.39	1.0014	7.38	7.78	7.91	7.81	7.89
1	15	0.4305	0.1	2.7939	4.12	1.0014	4.11	4.33	4.55	4.36	4.58
1.5	15	0.4305	0.1	2.7939	2.27	1.0014	2.27	2.39	2.45	2.44	2.50
2	15	0.4305	0.1	2.7939	1.66	1.0014	1.66	1.68	1.65	1.73	1.73
3	15	0.4305	0.1	2.7939	1.18	1.0014	1.18	1.08	1.05	1.18	1.17
4	15	0.4305	0.1	2.7939	0.97	1.0014	0.97	0.87	0.85	1.02	1.01
5	15	0.4305	0.1	2.7939	0.84	1.0014	0.84	0.79	0.77	0.96	0.95

여  $\delta < 1$ 인 경우에는 관리 길이를 길게 잡아  $L = 50$ 으로,  $\delta \geq 1$ 인 경우에는  $L = 10$ 으로 정하여 비교한 결과, 역시 우수한 성능을 보였다. 단, 공정한 비교를 위하여 Reynolds *et al.*(1990)이 사용한 보정된(adjusted)  $ARL_\delta$ 와  $ATS_\delta$ 를 다음과 같이 계산하여 사용하였다.

$$AARL_\delta = \pi^T[(I - Q_\delta)^{-1} - 1/2]1_M \quad (31)$$

$$AATS_\delta = \pi^T[(I - Q_\delta)^{-1} - 1/2]h_M \quad (32)$$

### 5.2 EWMA 관리도와의 비교

표준 슈하트 관리도의  $n_0 = 1, k_0 = 3.09$ 인 경우, A-MA 관리도의  $k = 3.2$ 로 설정하였을 때, Lucas and Saccucci(1990)가 제안한 EWMA 관리도의 최적  $ARL_\delta$ 와 비교한 결과는 <Table 5>와 같다. 앞에서와 같이  $\delta < 1$ 인 경우에는  $L = 50$ 으로,  $\delta \geq 1$ 인 경우에는  $L = 10$ 으로 정하였다. 표에서 EWMA 관리도의  $ARL_\delta$ 는 Lucas and Saccucci(1990)의 <Table 3>에서 각  $\delta$ 에 대한 최소값을 정리한 것이다. 모든 경우에 있어서 VSI

A-MA 관리도의  $ATS_\delta$ 가 감소한 것을 알 수 있다. EWMA 관리도에서는  $\delta$  값에 따라 가중치  $\lambda$ 를 각각 달리한 결과이므로 실질적인 적용이 어려운 반면, VSI A-MA 관리도는 단 두 가지 기준만을 적용하고도 우수한 효율을 나타내었다.

다음으로 Reynolds and Arnold(2001)가 제안한 VSSVSI EWMA 관리도의 ATS와 비교하였다. 그들의 <Table 5>와 <Table 6>에는  $k_0 = 3.0$ 일 때 각각  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ 에서 최적인 네 가지 형태의  $AATS_\delta / E[h]$  값이 나와 있다. <Table 3>으로부터  $k = 3.1$ 일 때  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ 에서 최적인 관리길이는 각각 43과 15이므로 이를 사용하여 비교한 결과가 <Table 6>과 같다. 전체적으로 큰 차이를 보이지는 않으나, 목표점  $\delta = 0.5$ 와  $\delta = 1.0$ (굵은 글씨)에서는 VSI A-MA 관리도의 ATS가 더 작은 것으로 나타났다. VSI A-MA 관리도는  $L = 43$ 인 경우에는  $\delta \leq 0.75$ 에서 다소 우수하며,  $L = 15$ 인 경우에는  $0.75 \leq \delta \leq 1.5$ 에서 다소 우수하게 나타났다. <Table 6>에서 나타난 바와 같이 VSI A-MA 관리도의 ATS 성능이 VSSVSI EWMA 관리도보다 항상 우수하다고 볼 수는 없다. 그러나 VSSVSI EWMA 관리도는 운영이나 해석이 복잡하여 현장에서 쉽게 적용할 수 없는 반면, VSI A-MA 관리도는 고정된 표

본크기를 사용하므로 보다 적용하기 쉽다는 장점이 있다.

이동에 대한 적용, ④ VSI A-MA 관리도의 경제적 설계 등을 고려해 볼 수 있다.

## 6. 요약 및 결론

본 논문에서는 CUSUM 관리도와 적응형 관리도의 특성을 결합하여 VSI A-MA 관리도를 제안하고, 마코프연쇄 모형을 적용하여 유용한 통계적 특성을 도출하였다. 이를 바탕으로 ATS 계산 알고리즘 및 통계적 최적설계 절차를 제시하였다. [정리 3]에서  $ATS_{\delta}$ 가 짧은 샘플링 간격  $h_1$ 의 선형함수임을 규명하여 최적해를 쉽게 구할 수 있었다. 일반적으로 마코프연쇄 모형은 상태의 개수가 많아지면 계산이 어려워지지만, 본 연구에서는 주요 통계 특성을 수식 형태로 도출하였다. 따라서 제안된 알고리즘은 관리길이  $L$ 이 큰 경우에도 통계적 특성을 계산할 수 있는 장점이 있다. 비교분석 결과, VSI A-MA 관리도는 기존의 CUSUM 관리도나 EWMA 관리도에 비해 우수한 ATS 성능을 나타냈다. 또한 현존하는 가장 복잡한 관리도 중의 하나인 VSSVSI EWMA 관리도에 비견할만한 ATS 성능을 보였다. 현장에서 VSI A-MA 관리도는 다음과 같이 간편하게 적용하는 방법을 제안한다. 관리한계  $k \approx k_0 + 0.1$ 로 정하고, 평균의 이동이 작은( $\delta < 1$ ) 공정에 대해서는 관리 길이  $L = 50$ , 평균의 이동이 큰( $\delta \geq 1$ ) 공정에 대해서는  $L = 10$ 으로 정하면 현장에서 쉽게 사용할 수 있을 것이다.

추후연구로는 ① 비정규분포에 대한 적용, ② 모표본편차  $\sigma$ 를 모르는 경우의 민감도 분석, ③ 단측(one-sided) 공정평균

## 참고문헌

- Brook, D. and Evans, D. A. (1972), An Approach to the Probability Distribution of CUSUM Run Length, *Biometrika*, **59**, 639-549.
- Costa, A. F. B. (1997),  $\bar{X}$  Chart with Variable Sample Size and Sampling Interval, *Journal of Quality Technology*, **29**, 197-204.
- Lim, T. J. (2007), The ARL of Selectively Moving Average Control Chart, *J. Korean Society for Quality Management*, **35**, 24-34.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990), Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements, *Technometrics*, **32**, 1-12.
- Page, E. S. (1954), Continuous Inspection Schemes, *Biometrika*, **41**, 100-114.
- Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C. (1994), A Combined Adaptive Sample Size and Sampling Interval  $\bar{X}$  Control Scheme, *Journal of Quality Technology*, **26**, 164-176.
- Reynolds, M. R., Amin, R. W., and Arnold, J. C. (1990), CUSUM Charts with Variable Sampling Intervals, *Technometrics*, **32**, 371-384.
- Reynolds, M. R. and Arnold, J. C. (2001), EWMA Control Charts with Variable Sample Sizes and Sampling Intervals, *IIE Transactions*, **33**, 511-530.
- Tagaras, G. (1998), A Survey of Recent Developments in the Design of Adaptive Control Charts, *Journal of Quality Technology*, **30**, 212-231.