

이동하중을 받는 구조물에 대한 시간영역과 주파수영역에서의 동적해석

Dynamic Analysis of Structures under Moving Loads in Time and Frequency Domain

공 민 식*
Kong, Min Sik

임 성 순**
Yhim, Sung Soon

Abstract

A structural dynamic analysis can be divided into a time domain analysis and a frequency domain analysis. The time domain analysis makes use of a direct integration method or a mode superposition method and the frequency domain analysis applies a DFT method. Generally the DFT method is more effective method in case of calculating response of periodic excitation. But in case of transient excitation exact solution can not be acquired. So, by modifying the response or increasing the period accuracy of solution can be enhanced. Accordingly this study analyzed dynamic responses of structures under aperiodic moving load in time domain and frequency domain. Consequently it is concluded that exact solution would be get enough using DFT method by increasing the duration of free vibration or modifying the dynamic response.

요 지

구조물의 동적해석은 크게 시간영역과 주파수영역해석으로 나눌 수 있다. 시간영역해석은 직접적분법과 모드중첩법 등을 사용하며 주파수영역해석은 DFT법을 적용하고 있다. 일반적으로 DFT법은 주기함수에 대한 응답을 산정할 경우 효과적인 해석방법이지만 비주기함수인 경우 정확한 해석결과를 얻을 수 없어 주기를 크게 하거나 응답을 수정하여 해의 정확성을 향상시키고 있다. 따라서 본 연구는 비주기함수인 이동하중을 받는 구조물에 대해 시간영역과 주파수영역에서 동적응답을 산정하였다. 그 결과 구조물의 자유진동주기를 크게 하거나 응답을 수정하여 DFT법을 적용한다면 주파수영역에서도 충분히 정확한 해석결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

Keywords : Dynamic Analysis, Moving Loads, Time Domain, Frequency Domain

핵심 용어 : 동적해석, 이동하중, 시간영역, 주파수영역

* 정희원, 서울시립대학교 토목공학과 박사과정

** 정희원, 서울시립대학교 토목공학과 교수

E-mail : Yhimss@uos.ac.kr 011-755-8932

• 본 논문에 대한 토의를 2007년 6월 30일까지 학회로 보내 주시면 2007년 9월호에 토론결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

동적하중을 받는 구조물의 해석에 있어서 일반적으로 크게 시간영역해석과 주파수영역해석으로 구분할 수 있다. 시간영역해석 방법으로는 직접적분법과 모드중첩법 등으로 구분할 수 있으며 직접적분법에는 Central Difference 방법, Houbolt 방법, Wilson- θ 방법 그리고 Newmark 방법 등이 있으며 방정식을 전혀 변화시키지 않고 시간순서에 따라서 수치적으로 적분하는 방법이다. 모드중첩법은 구조물의 고유진동수와 진동모드를 이용하여 동적평형방정식을 상호독립적인 모드별 운동방정식으로 분리한 후 Duhamel 적분을 적용하여 응답을 산정하는 방법이다. 주파수영역해석 방법으로는 일반적으로 DFT(Discrete Fourier Transform)법을 이용하고 있다. 이는 모드중첩법과 동일하게 Modal Analysis를 수행하여 모드별 운동방정식으로 분리한 후 푸리에 변환을 통하여 주파수영역에서 응답을 찾은 후 다시 푸리에 역변환으로 구조물의 응답을 산정하는 방법이다.

Veletos 등(1985)에 의하면 FFT(Fast Fourier Transform) 알고리즘을 이용한 주파수영역해석은 하중이 주기함수인 경우 효과적인 해석 방법이지만 이동하중과 같은 비주기함수인 경우는 정확한 해석 결과를 얻을 수 없다. 따라서 Veletos 등(1985), Humar(1990), Clough(1993)와 Chopra(2001)는 해석 결과의 정확성을 향상시키기 위하여 주기를 길게 하여 응답을 산정하거나 초기변위와 초기속도를 이용해 동적응답을 수정하여 사용하였다.

따라서 본 연구는 비주기함수인 이동하중에 대하여 시간영역과 주파수영역에서 동적응답을 산정하여 주파수영역해석 결과의 정확성을 검토하고자 한다. 시간영역해석 방법으로는 모드중첩법을 이용하였으며 주파수영역해석 방법으로는 FFT 알고리즘을 이용한 DFT법을 적용하였다. 이동하중을 받는 구조물의 동적응답은 속도가 지배적이므로 본 연구는 속도 25km/h와 50km/h에 대하여 검토하였다. 또한 DFT법에 의한 해석결과는 하중주기와 구조물의 감쇠효과 등에 영향을 받기 때문에 하중주기 변화와 감쇠를 변화에 따른

동적응답을 산정하였다.

2. 해석 이론

2.1 Modal Analysis

동적하중이 작용하는 다자유도계의 운동방정식은 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $[m]$ 은 강성 매트릭스, $[c]$ 는 감쇠 매트릭스, $[k]$ 는 질량 매트릭스, $\{x\}$ 는 변위벡터이며 $\{p(t)\}$ 는 하중벡터를 의미한다.

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{p(t)\} \quad (1)$$

식 (1)과 같은 구조물의 동적평형방정식은 일반화 좌표계 $\{y(t)\}$ 를 이용하면 식 (2)와 같이 상호독립적인 모드별 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$[M]\{\ddot{y}\} + [C]\{\dot{y}\} + [K]\{y\} = \{P(t)\} \quad (2a)$$

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{y(t)\} \quad (2b)$$

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] \quad (2c)$$

$$[C] = [\Phi]^T [c] [\Phi] \quad (2d)$$

$$[K] = [\Phi]^T [k] [\Phi] \quad (2e)$$

$$\{P(t)\} = [\Phi]\{p(t)\} \quad (2f)$$

여기서 $[M]$ 은 일반화 질량매트릭스, $[C]$ 는 일반화 감쇠매트릭스, $[K]$ 는 일반화 강성매트릭스, $\{P(t)\}$ 는 일반화 하중매트릭스이며 $[\Phi]$ 는 모달 매트릭스이다.

2.2 시간영역 해석

식 (2)는 각 모드에 대하여 독립이기 때문에 j 번째 모드에 대한 미분방정식을 다음 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_j \ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = P_j(t) \quad (3)$$

여기서 ξ_j 은 j 번째 모드의 감쇠율, ω_j 과 ϕ_j 은 각각 j 번째 모드의 고유진동수와 모드벡터를 나타내며 $M_j = \{\phi_j\}^T [m] \{\phi_j\}$ 이고 $P_j(t) = \{\phi_j\}^T \{p(t)\}$ 이다. 일반화 좌표계로 변환된 모드별 방정식은 일반적인 형태의 단자유도계 미분방정식의 형태이므로 Duhamel 적분을 식 (4)와 같이 적용할 수 있다.

$$y_j(t) = \int_0^t P_j(\tau) h_j(t-\tau) d\tau \quad (4a)$$

$$h_j(t-\tau) = \frac{1}{M_j \omega_j} e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_D (t-\tau) \quad (4b)$$

$$\omega_D = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (4c)$$

2.3 주파수영역 해석

식 (3)의 양변을 푸리에 변환하면 식 (5)와 같이 주파수 영역에서의 방정식을 얻을 수 있다.

$$(-\Omega^2 + i\Omega 2\xi_j \omega_j + \omega_j^2) Y_j(\Omega) = P_j(\Omega) \quad (5a)$$

$$P_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (5b)$$

$$Y_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (5c)$$

$$i\Omega Y_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{y}(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (5d)$$

$$-\Omega^2 Y_j(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{y}(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (5e)$$

식 (5)의 방정식 해는 전달함수 $H_j(\Omega)$ 를 이용하여 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y_j(\Omega) = H_j(\Omega) P_j(\Omega) \quad (6a)$$

$$H_j(\Omega) = 1/(-\Omega^2 + 2i\Omega\xi_j\omega_j + \omega_j^2) \quad (6b)$$

수치적분을 위해 FFT 알고리즘을 이용한 DFT법을 사용하면 식 (6)은 식 (7)과 같이 나타낼 수 있다(Veletos 등, 1985; Humar, 1990; Henchi 등, 1997).

$$Y_j(n\Delta\Omega) = H_j(n\Delta\Omega) P_j(n\Delta\Omega) \quad (7a)$$

$$P_j(n\Delta\Omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} p(k\Delta t) e^{-i(2\pi kn/N)} \quad (7b)$$

$$H_j(n\Delta\Omega) = 1/(-(n\Delta\Omega)^2 + i(n\Delta\Omega)2\omega_j\xi_j + \omega_j^2) \quad (7c)$$

여기서 전체주기 T 를 N 등분하면 $\Delta t = T/N$ 이며 $n = 0, \dots, N-1$ 이다. 또한 T 는 식 (8)와 Fig. 1과 같이 하중작용시간 t_d 과 구조물의 자유진동시간 t_f 의 합으로 나타낼 수 있다(Chopra, 2001).

$$T = t_d + t_f \quad (8)$$

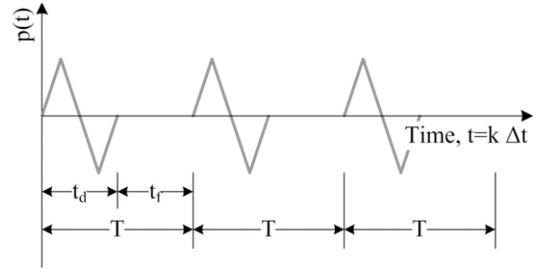


Fig. 1 전체 주기

FFT 알고리즘은 주기 T 의 크기에 따라 해의 정확성이 달라지기 때문에 정확한 구조계의 응답특성을 산정하기 위해서는 t_f 의 크기를 충분히 크게 하거나 초기조건을 수정하여야 한다. 식 (7)에서 푸리에 역변환을 하면 구조계의 응답 $y_j(k\Delta t)$ 를 얻을 수 있으며 초기 조건 $y_j(0)$ 와 $\dot{y}_j(0)$ 를 이용하여 수정된 응답 $y_j^*(k\Delta t)$ 를 식 (9)와 같이 얻을 수 있다(Veletos 등, 1985; Humar, 1990; Henchi 등, 1997; Clough 등, 1993).

$$y_j^*(k\Delta t) = y(k\Delta t) + x_1(k\Delta t) + x_2(k\Delta t) \quad (9a)$$

$$x_1(t) = \Delta y(0)r(t) \quad (9b)$$

$$x_2(t) = \Delta \dot{y}(0)s(t) \quad (9c)$$

$$r(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \{ \cos(\omega_D t) + \xi_j \omega_j \sin(\omega_D t) / \omega_D \} \quad (9d)$$

$$s(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \sin(\omega_D t) / \omega_D \quad (9e)$$

$$\dot{y}(0) = -\frac{\Delta\Omega^2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Im} \{ Y_j(\Delta\Omega) \} \quad (9f)$$

3. 수치 예제 및 결과

3.1 해석 모델

본 연구는 Fig. 2와 같이 속도가 v 인 이동하중 P 를 받는 단순지지된 보 구조물에 대한 동적해석을 수행하였다. 요소 수는 20개이며 구조물의 기하학적 조건과 단면특성은 Table 1과 같다.

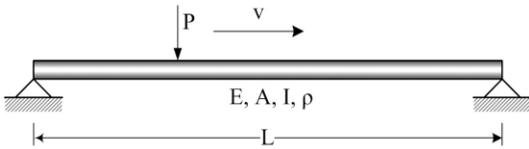


Fig. 2 이동하중을 받는 보 구조물

Table 1 기하학적 조건 및 특성치

구분	특성치
경간길이(L)	50 m
하중크기(P)	1000 kN
탄성계수(E)	2.0594×10^8 kN/m ²
단위질량(ρ)	7.850 kg/m ³
단면적(A)	1.0 m ²
단면2차모멘트(I)	0.0833 m ⁴

3.2 고유치 해석

Fig. 2과 같은 보 구조물의 진동특성을 산정하기 위하여 고유치해석을 수행하였으며 그 결과를 Blevins (1979)의 식 (10)과 비교하여 Table 2에 나타내었다.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (10a)$$

$$\lambda_i = i\pi \quad (10b)$$

3.3 동적응답

전술한 바와 같이 주파수 영역에서 응답을 산정할 경우 주기 T 의 크기와 구조물의 감쇠효과 등에 따

Table 2 고유진동수[Hz]

모드	Blevins(1979)	Present
1	0.92883	0.92883
2	3.71533	3.71536
3	8.35950	8.35979
4	14.86134	14.86293
5	23.22084	23.22687
6	33.43801	33.45588
7	45.51284	45.55750
8	59.44535	59.54383
9	75.23552	75.43288
10	92.88336	93.24996

라 해의 정확성이 다르게 나타난다(Veletos 등, 1985). 따라서 본 연구는 이러한 특성을 살펴보기 위하여 주기 T 의 변화와 구조계의 감쇠효과에 따라 동적응답을 산정하였다. 또한 이동하중을 받는 구조물의 동적응답은 하중의 이동속도가 지배적이므로 속도 25km/h와 50km/h에 대하여 보 중앙부 수직처짐에 대한 응답을 산정하였다.

주기 T 는 식 (8)과 같이 t_d 와 t_f 로 나누어 생각할 수 있다. 따라서 본 연구는 식 (8)과 Fig. 1의 t_d 와 t_f 를 식 (11)과 같이 계수 α 와 β 를 도입하여 주기 T 의 크기에 따른 동적응답을 산정하였다. α 는 하중 작용 후 구조물의 자유진동시간을 나타내는 계수를 의미하며 β 는 이동하중이 작용하는 시간을 나타내는 계수를 의미한다. 여기서 $\beta > 1$ 인 경우는 이동하중이 구조물을 통과한 후의 응답을 산정하는 것을 의미하며 β 크기에 따른 하중작용시간 t_d 를 Fig. 3과 같이 나타낼 수 있다.

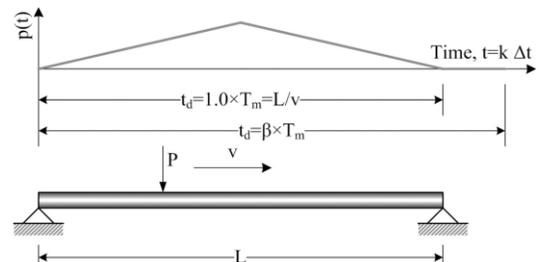


Fig. 3 하중작용시간 t_d

Table 3 속도 25km/h인 경우 최대수직처짐[m]

구 분	$t_d=1.0T_m$						$t_d=1.2T_m$					
	$\xi=0.0$		$\xi=0.02$		$\xi=0.05$		$\xi=0.0$		$\xi=0.02$		$\xi=0.05$	
	FFT	수정FFT										
시간영역	0.16094		0.15685		0.15358		0.16094		0.15685		0.15358	
$t_f=0.0T_n$	0.16168 (1.005)	0.16093 (1.000)	0.16020 (1.021)	0.16020 (1.021)	0.15610 (1.016)	0.15610 (1.016)	0.22238 (1.382)	0.16090 (1.000)	0.16173 (1.031)	0.16173 (1.031)	0.15471 (1.007)	0.15471 (1.007)
$t_f=0.5T_n$	0.15262 (0.948)	0.16058 (0.998)	0.15247 (0.972)	0.15247 (0.972)	0.15227 (0.991)	0.15227 (0.991)	0.15806 (0.982)	0.16044 (0.997)	0.15715 (1.002)	0.15715 (1.002)	0.15380 (1.001)	0.15380 (1.001)
$t_f=1.0T_n$	0.16168 (1.005)	0.16092 (1.000)	0.15992 (1.020)	0.15992 (1.020)	0.15542 (1.012)	0.15542 (1.012)	0.22238 (1.382)	0.16089 (1.000)	0.16061 (1.024)	0.16061 (1.024)	0.15428 (1.005)	0.15428 (1.005)
$t_f=5.0T_n$	0.16169 (1.005)	0.16090 (1.000)	0.15893 (1.013)	0.15893 (1.013)	0.15409 (1.003)	0.15409 (1.003)	0.22240 (1.382)	0.16091 (1.000)	0.15834 (1.009)	0.15834 (1.009)	0.15372 (1.001)	0.15372 (1.001)
$t_f=10.0T_n$	0.16169 (1.005)	0.16092 (1.000)	0.15805 (1.008)	0.15805 (1.008)	0.15368 (1.001)	0.15368 (1.001)	0.22245 (1.382)	0.16095 (1.000)	0.15742 (1.004)	0.15742 (1.004)	0.15361 (1.000)	0.15361 (1.000)
$t_f=20.0T_n$	0.16170 (1.005)	0.16093 (1.000)	0.15720 (1.002)	0.15720 (1.002)	0.15359 (1.000)	0.15359 (1.000)	0.22240 (1.382)	0.16082 (0.999)	0.15699 (1.001)	0.15699 (1.001)	0.15359 (1.000)	0.15359 (1.000)

Table 4 속도 50km/h인 경우 최대수직처짐[m]

구 분	$t_d=1.0T_m$						$t_d=1.2T_m$					
	$\xi=0.0$		$\xi=0.02$		$\xi=0.05$		$\xi=0.0$		$\xi=0.02$		$\xi=0.05$	
	FFT	수정FFT										
시간영역	0.1776		0.17317		0.16800		0.1776		0.17317		0.16800	
$t_f=0.0T_n$	0.18154 (1.022)	0.17759 (1.000)	0.1804 (1.042)	0.1804 (1.042)	0.17689 (1.053)	0.17689 (1.053)	0.44874 (2.527)	0.17738 (0.999)	0.19577 (1.131)	0.19577 (1.131)	0.16869 (1.004)	0.16869 (1.004)
$t_f=0.5T_n$	0.15521 (0.874)	0.17697 (0.996)	0.15591 (0.900)	0.15591 (0.900)	0.15695 (0.934)	0.15695 (0.934)	0.17497 (0.985)	0.17668 (0.995)	0.17425 (1.006)	0.17425 (1.006)	0.17111 (1.019)	0.17111 (1.019)
$t_f=1.0T_n$	0.18148 (1.022)	0.17746 (0.999)	0.17995 (1.039)	0.17995 (1.039)	0.17495 (1.041)	0.17495 (1.041)	0.44874 (2.527)	0.17739 (0.999)	0.18801 (1.086)	0.18801 (1.086)	0.16735 (0.996)	0.16735 (0.996)
$t_f=5.0T_n$	0.18147 (1.022)	0.17746 (0.999)	0.17816 (1.029)	0.17816 (1.029)	0.17026 (1.013)	0.17026 (1.013)	0.44882 (2.527)	0.17746 (0.999)	0.17691 (1.022)	0.17691 (1.022)	0.16739 (0.996)	0.16739 (0.996)
$t_f=10.0T_n$	0.18145 (1.022)	0.17747 (0.999)	0.17627 (1.018)	0.17626 (1.018)	0.16849 (1.003)	0.16849 (1.003)	0.44877 (2.527)	0.17739 (0.999)	0.17413 (1.006)	0.17413 (1.006)	0.16785 (0.999)	0.16785 (0.999)
$t_f=20.0T_n$	0.18141 (1.021)	0.17757 (1.000)	0.1742 (1.006)	0.1742 (1.006)	0.16801 (1.000)	0.16801 (1.000)	0.4486 (2.526)	0.17741 (0.999)	0.17327 (1.001)	0.17327 (1.001)	0.16799 (1.000)	0.16799 (1.000)

$$t_d = \beta T_m \quad (11a)$$

$$t_f = \alpha T_n \quad (11b)$$

여기서 T_m 은 이동하중이 구조물을 통과하는데 걸리는 시간이며 T_n 은 n 번째 구조물의 고유주기를 의미하며 본 연구는 가장 긴 주기를 사용하였다.

해석결과 속도 25km/h인 경우 Fig. 4와 같이, 속도 50km/h인 경우는 Fig. 5와 같이 동적응답이 나타났다. 최대수직처짐의 절대값은 Table 3~4와 같다. 여기서 ()안의 숫자는 해당되는 응답을 시간영역 해석 결과로 나눈 값을 의미한다.

먼저 구조물의 감쇠효과를 고려하지 않은 경우를 살펴보면 Fig. 4a와 4g, Fig. 5a와 5g에 나타나는 것과 같이 주파수영역해석 결과는 이동하중에 의한 구조물의 동적응답을 정확하게 산정하지 못 하는 것을 알 수 있다. 또한 t_f 의 크기가 커져도 해의 정확성이 향상되지 않는 것을 알 수 있다. 하지만 식 (9)와 같이 FFT 알고리즘에 의한 응답을 수정하면 Fig. 4d와 4j, Fig. 5d와 5j에 나타나는 것과 같이 t_f 가 작은 경우에도 거의 정확한 해석 결과를 얻을 수 있는 것으로 나타났다. 따라서 구조물의 감쇠효과를 고려하지 않는 경우에는 초기조건을 이용하여 응답을 수정하여 사용해야 할 것으로 판단된다.

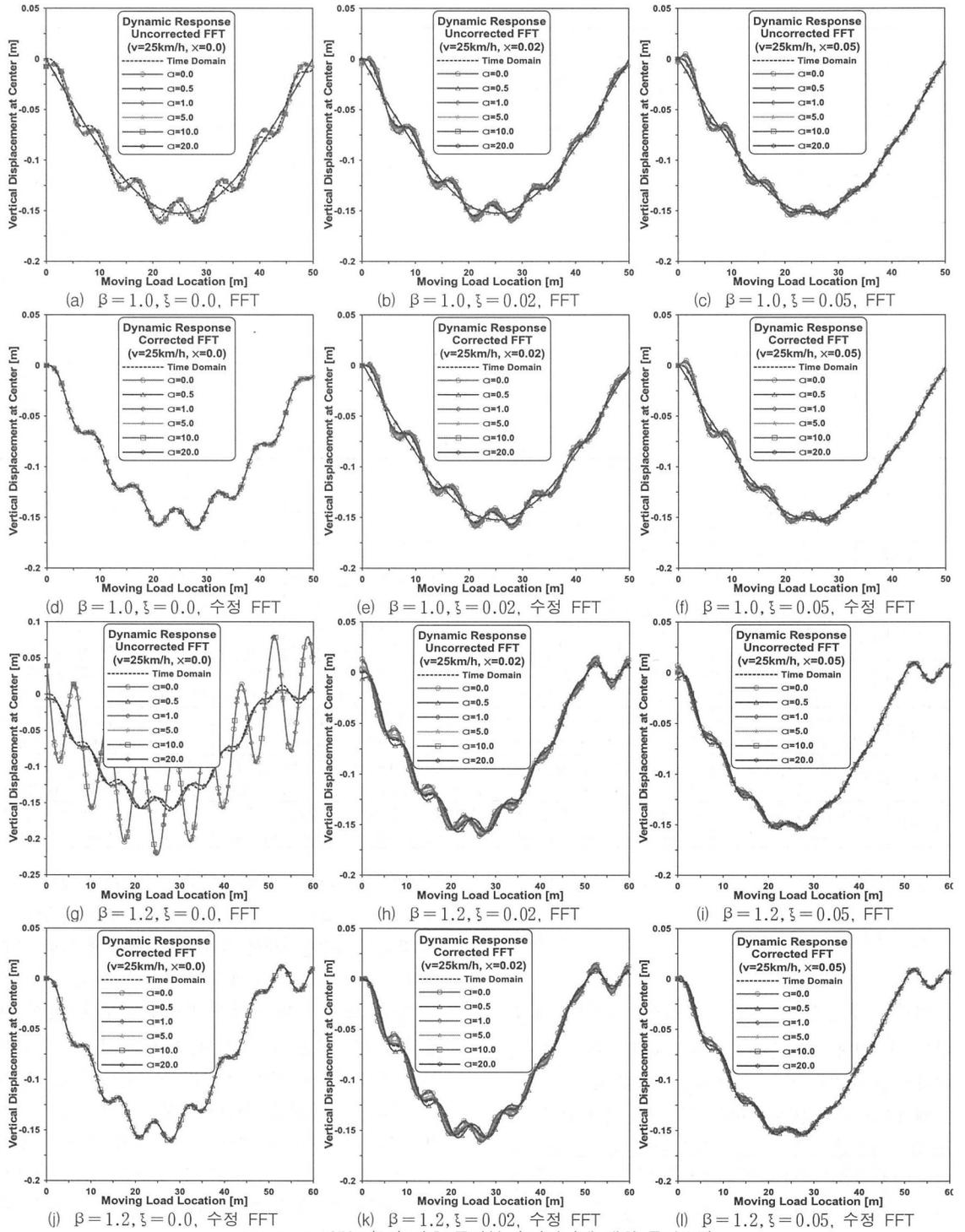


Fig. 4 $v = 25\text{km/h}$ 인 경우 중앙부 수직처짐에 대한 동적응답

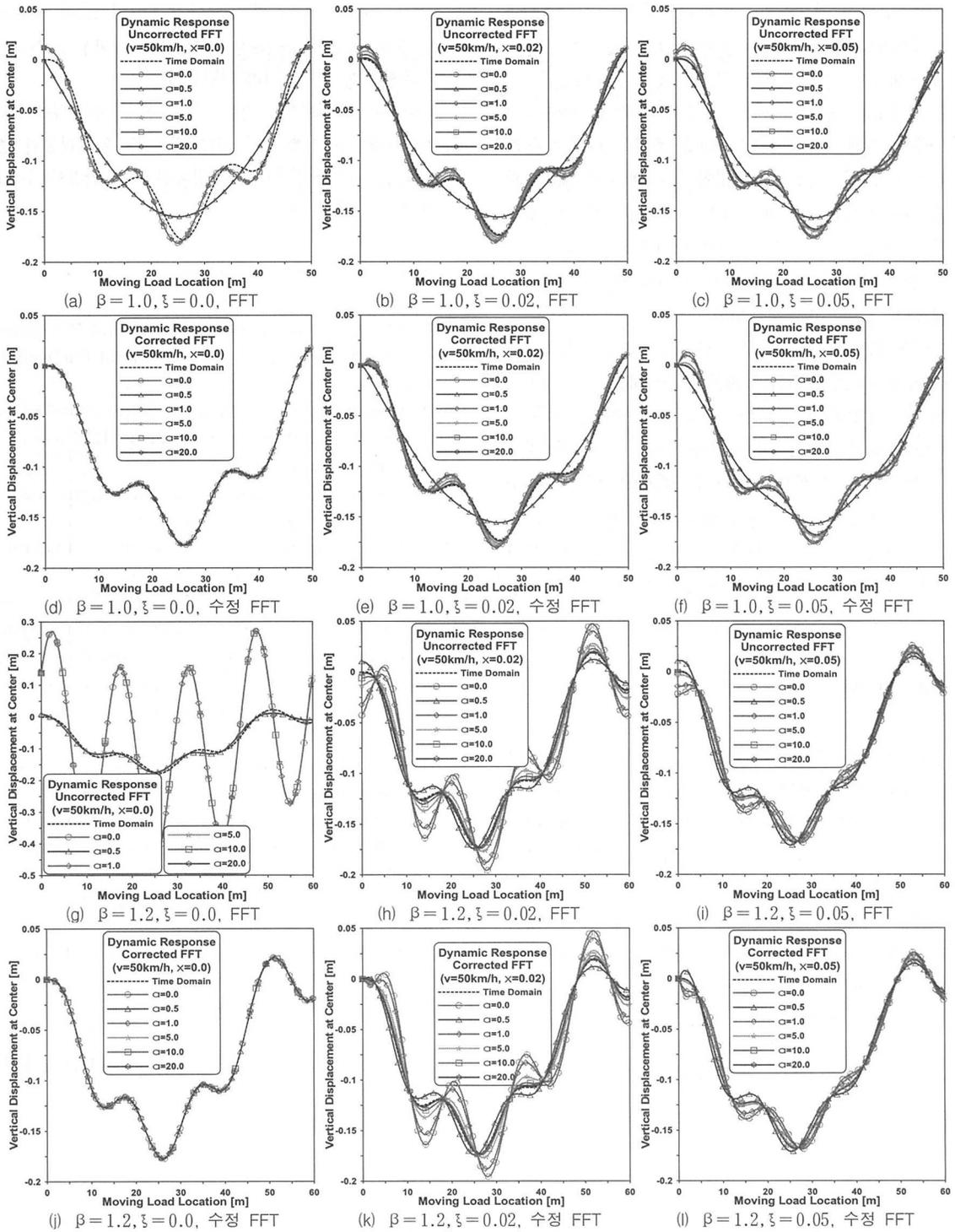


Fig. 5 50km/h인 경우 중앙부 수직처짐에 대한 동적응답

구조물의 감쇠효과를 고려하는 경우 t_f 가 커질수록 해석결과의 정확성이 향상되는 것을 알 수 있으며 $\alpha = 20.0$ 인 경우 거의 일치하는 것으로 나타났다. 하지만 Table 3~4와 Fig. 4~5와 같이 FFT와 수정 FFT에 의한 응답은 초기응답을 제외한 나머지 구간에서는 t_f 의 크기에 관계없이 서로 비슷한 해석결과를 나타내었다. 따라서 구조물의 감쇠효과를 고려하는 경우 FFT 알고리즘을 수정하여 사용하기 보다는 t_f 를 충분히 크게 하는 것이 해의 정확성을 향상시키는데 더욱 효과적이라 판단된다.

이동하중이 구조물을 통과한 후의 응답을 살펴보기 위해 $\beta = 1.2$ 에 대하여 해석을 수행하였다. 본질적으로 $\beta = 1.0$ 와 $\beta = 1.2$ 인 경우 같은 해석결과가 나타나야 하지만 Fig. 4g~4l과 Fig. 5g~5l과 같이 t_f 가 작은 경우 서로 상이하게 나타나고 t_f 가 커질수록 $\beta = 1.0$ 와 $\beta = 1.2$ 의 해석결과가 서로 비슷해지는 것을 볼 수 있다. 따라서 이러한 경우는 구조물의 자유진동주기 t_f 를 충분히 크게 고려함으로써 해석결과의 정확성을 향상시킬 수 있을 것으로 판단된다.

4. 결 론

본 연구는 이동하중을 받는 보 구조물에 대하여 시간영역과 주파수영역에서 동적응답을 산정하였다. 시간영역해석 방법으로는 모드중첩법을 주파수영역 해석 방법으로는 FFT 알고리즘을 이용한 DFT법을 적용하였으며 그 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째 구조물의 감쇠효과를 고려하지 않는 경우에는 초기변위와 초기속도를 이용해 응답을 수정하여 사용하면 주파수영역해석 결과의 정확성을 향상시킬 수 있을 것으로 판단된다.

둘째 구조물의 감쇠효과를 고려하는 경우 FFT 알고리즘을 수정하여 사용하기 보다는 구조물의 자유진

동주기 t_f 를 구조물의 고유주기 T_n 의 20배 이상으로 충분히 크게 고려하는 것이 해의 정확성을 향상시키는데 더욱 효과적이라 판단된다.

따라서 이동하중을 받는 구조물에 대하여 주파수영역해석에서 해석할 경우 수정된 FFT 알고리즘과 충분히 큰 주기를 사용하면 정확한 해를 산정할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Blevins, R. D., "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape", Litton Educational Publishing, 1979.
2. Chopra, A. K., "Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering", Prentice Hall, 2001.
3. Clough, R. W. and Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill, 1993.
4. E. Oran Brigham, "The Fast Fourier Transform", Prentice-Hall, 1974.
5. Henchi, K., Fafard, M., Dhatt, G. and Talbot, M., "Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams under Moving Loads", Journal of Sound and Vibration, Vol. 199, 1997, pp.33-50.
6. Humar, J. L., "Dynamics of Structures", Prentice Hall, 1990.
7. Mario Paz, "Structural Dynamics: Theory and Computation", Chapman & Hall, 1997.
8. Veletos, A. S. and Kumar, A., "Steady-State and Transient Responses of Linear Structures", Journal of the Engineering Mechanics, Vol. 109, No. 5, October 1983, pp.1215-1230.
9. Veletos, A. S. and Ventura, C. E., "Dynamic Analysis of Structures by the DFT Method", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, No. 12, Dec. 1985, pp.2625-2642.

(접수일자 : 2006년 7월 18일)