

변형을 경화를 고려한 오버레이 모델의 재료비선형 수치해석기법

Numerical Analysis Method of Overlay Model for Material Nonlinearity Considering Strain Hardening

백 기 열)¹⁾

Baek, Ki Youl

요 약 : 재료비선형 수치해석기법 중, 오버레이 모델은 같은 평면상에 여러 개의 레이어를 배치해 각 레이어의 평균한 값을 모델 전체의 값으로 사용하는 원리를 사용하는 모델로서 구성레이어의 변형을 경화계수, 단면적 및 항복응력 등을 파라메타로 설정함으로써 바우싱거 효과 및 변형을 경화현상을 표현하기에 적합한 모델지만, 응력-변형률관계의 기하학적 특징을 직접적으로 근사하기 위한 파라메타의 설정이 복잡하다는 단점이 있다. 본 논문에서는 평면응력상태를 대상으로 하며, 변형을 경화를 고려한 오버레이 모델의 정식화를 열역학을 사용하여 구체적으로 정의한다. 수치해석에 있어 전체적인 해석파라메타로서는 항복응력분포만을 고려하였으며, 항복응력분포의 설정 방법 및 그에 따른 항복응력분포함수의 p , q , r 값을 정성적으로 비교분석한다. 최종적으로 탄소강과 합금강에 대한 일축, 다축응력의 실험결과와 제안한 수치해석기법의 해석결과를 비교하여 타당성을 검토한다.

ABSTRACT : The overlay model is a certain kinds of numerical analysis method to present the material non-linearly which is represented the bausinger effect and the strain hardening. This model simulates the complex behavior of material by controlling the properties of the layers which like the hardening ratio, the section area and the yield stress. In this paper, the constitutive equation and plastic flow rule of each layer which are laid in the plane stress field are obtained by using the thermodynamics. Two numerical examples were tested for the validity of proposed method in uniaxial stress and plane stress field with comparable experimental results. The only parameter for the test is the yield stress distribution of each layers.

핵심어 : 오버레이 모델, 변형을 경화, 열역학, 평면응력, 미세스 항복함수

KEYWORDS : Overlay model, Strain hardening, Thermodynamics, Plane stress field, von Mises yield function

1. 서론

구조물의 설계에 소성설계의 개념이 도입된 이후, 강재의 바우싱거 효과 및 변형을 경화로 대표되는 재료의 비선형적 거동의 파악은 구조물의 수치해석에 있어 매우 중요한 의미를 갖게 되었다. 구조해석에 있어 이러한 재료 비선형성을 간단히 표현하기 위한 방법으로는 응력-변형률 관계를 바이리니어, 혹은 트리리니어 형태로 설정하는 방법이 일반적이지만, 반복하중을 받는 부재의 소성역에서의 거동을 정확히 표현하기에는 부족함이 있다. 한편 구조물 및 부재의 면외좌굴 등, 국부적인 손상을 해석하는 경우에는 쉘 요소가 일반적으로 사용되며 이 경우, 대상 응력상태는 평면응력상태가 되므로 평면응력상태에서의 재료 비선형성을 간단하면서도 명확히 표현

할 수 있는 수치해석기법의 개발이 필요하다.

오버레이 모델은 항복응력이 틀린 여러 개의 탄성·비탄성 레이어, 혹은 세그먼트를 동일한 평면상에 병렬 배치하여 응력-변형률관계에 있어서의 변형을 경화 및 바우싱거 효과 등을 다중직선(Multi linear)형태로 근사적으로 표현하는 모델로서, 서브레이어 모델(Sub-layer model), 서브엘리먼트(Sub-element) 혹은 분할모델(Fraction model)이라고 불리기도 한다. 이 모델은 각 레이어의 응력을 결합해 그 평균치를 모델전체의 응력으로 나타내는 모델로서 Besseling (1958)에 의해 그 개념이 체계화된 이후, 많은 연구자들에 의해 개발되어져 왔다.(Zeinkiewicz, 1972 ; Owen, 1974 ; Schiffner, 1995 ; Silva, 2000). 그러나 대부분의 연구는 일축응력상태를 대상으로 하고 있으며 재료의 응력-변형률

1) 교신저자, 정회원, 세종대학교 건축공학과 BK21 Postdoc. Researcher, 공학박사
(Tel. 02-3408-3331, Fax. 02-3408-3671 E-mail:catty9@hotmail.com)

본 논문에 대한 토의를 2007년 12월 31일까지 학회로 보내주시면 토의 회답을 게재하겠습니다.

관계의 기하학적 특징을 직접적으로 근사하기 위해서 각 레이어의 단면적, 변형률 경화계수 및 항복응력 등 많은 수의 파라메타 설정을 필요로 하고 있다.

따라서 본 연구에서는 평면응력상태에서의 재료 비선형을 정확하게 표현할 수 있는 수치해석기법을 제안하는 것을 목적으로 오버레이 모델을 대상으로 변형률 경화를 고려한 각 레이어의 정식화 유도 및 구체적인 응력산출방법에 관해 거론하고 해석상에 있어 파라메타 설정을 단순히 하기 위해, 각 레이어의 항복응력분포만을 파라메타로 적용하는 수치해석기법을 제안한다. 또한 제안수법의 수치해석결과와 탄소강 및 합금강의 일축, 다축응력상태의 실험결과를 비교하여 그 유효성을 확인하도록 한다.

2. 오버레이 모델의 정식화

2.1 오버레이 모델의 특성

그림 1은 오버레이 모델의 기본적인 개념을 설명하는 것으로서, 본 절에서는 완전탄소성체인 레이어의 수를 3개로 고려하고 있지만 일반적으로는 변형률 경화 및 n개의 레이어를 고려한다. 그림 1에 나타낸바와 같이 각 레이어의 응력-변형률 관계로부터 모델 전체에 대한 평균 응력-변형률 관계가 구해지는 원리이며 음영표시 한 탄소성 구간에서의 비선형적 거동을 다중직선으로 근사하고 있음을 알 수 있다. 기본개념을 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i \quad (1)$$

위식에서 σ_i 는 임의의 레이어에 대한 응력이며 s는 오버레이 모델 전체의 평균응력이다.

그림 2 및 그림 3은 오버레이 모델을 구성하는 각 레이어의 항복응력 분포에 따른 재료 비선형성 정도를 알아보기 위한 수치해석의 한 예이다. 해석모델은 완전탄소성체인 100개의 레이어로 구성되며, 전 레이어는 동일한 변형률 및 초기강성을 설정함으로써 항복응력분포만을 파라메타로 설정했다.

그림 3은 해석결과로부터 얻은 응력-변형률 관계이며, 전 레이어의 항복응력이 같은 경우 전형적인 완전탄소성체 거동을 나타내고 있다. 각 레이어에 대한 항복응력의 최소치 및 최대치의 차이가 클수록 응력-변형률 관계가 비선형적으로 나타남을 알 수 있다. 이와 같이 오버레이 모델은 각 레이어의 항복응력분포의 설정에 따라 다양한 응력-변형률 관계의 형상

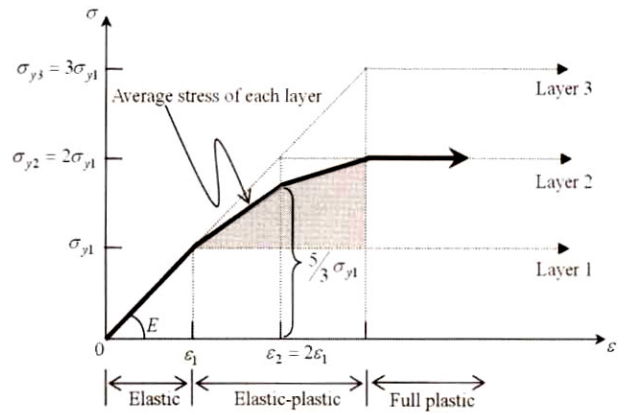


그림 1. 오버레이 모델

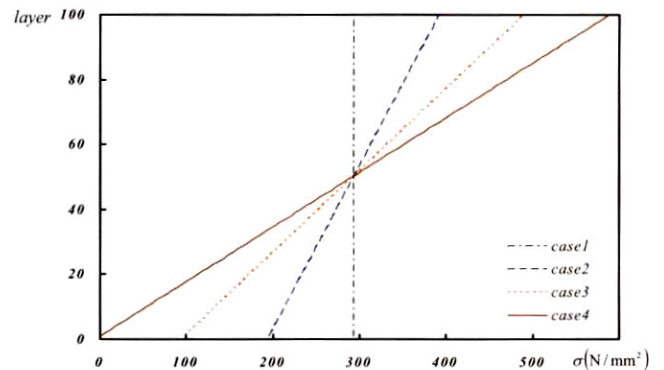


그림 2. 오버레이 모델의 선형적 항복응력 분포

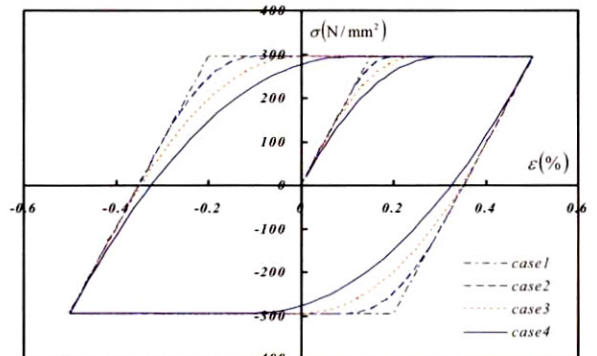


그림 3. 응력-변형률 관계

을 표현할 수 있는 모델이다.

2.2 탄성구성식 및 소성흐름법칙의 정식화

본 절에서는 평면응력상태에서의 이동경화(Kinematic hardening) 및 등방경화(Isotropic hardening)를 동시에 고려한 혼합경화(Combined hardening)를 대상으로 한 오버레이 모델의 각 레이어에 대한 기초식을 유도하도록 한다.

기초식의 전개에는 열역학(Thermodynamics)이 사용되었

으며, 기초식의 전개에 열역학을 사용한 이유를 부록 1에 나타냈다. 먼저 각 레이어의 전변형률(Total strain)은 다음과 같이 분리 가능한 것으로 한다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (2)$$

여기서 $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 는 각각 변형을 벡터의 탄성성분, 소성성분이다. 다음으로 변형을 경화를 고려할 경우, 각 레이어의 자유에너지는 다음과 같다.

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_e \cdot \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_e + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_K \cdot \mathbf{E}^K \boldsymbol{\varepsilon}_K + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_I \cdot \mathbf{E}^I \boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (3)$$

여기서 \mathbf{E} , \mathbf{E}^K , \mathbf{E}^I 는 각각 탄성계수 매트릭스, 이동경화계수 매트릭스, 등방경화계수이며, $\boldsymbol{\varepsilon}_K$ 및 $\boldsymbol{\varepsilon}_I$ 는 이동경화응력 및 등방경화응력에 대응되는 변형률이다. 위식에서 제 1항은 탄성에너지, 제 2항 및 제 3항은 이동경화 및 등방경화에 대한 경화 포텐셜 에너지이다. 식 (3)의 자유에너지를 다음의 클라우지우스 부등식(Clausius-Duhem inequality)에 대입하도록 한다.

$$-\dot{\psi} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \geq 0 \quad (4)$$

자유에너지의 변화율은 다음과 같으며,

$$-\dot{\psi} = -(\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_e) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - (\mathbf{E}^K \boldsymbol{\varepsilon}_K) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K - (\mathbf{E}^I \boldsymbol{\varepsilon}_I) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_I \quad (5)$$

위식을 식 (4)에 대입한 후, 각 변형률의 속도성분으로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$[\boldsymbol{\sigma} - (\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_e)] \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + (\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_p) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \boldsymbol{\sigma}^K \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K + \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_I \geq 0 \quad (6a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^K = -\mathbf{E}^K \boldsymbol{\varepsilon}_K \quad (6b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^I = -\mathbf{E}^I \boldsymbol{\varepsilon}_I \quad (6c)$$

위식에서 $\boldsymbol{\sigma}^K$, $\boldsymbol{\sigma}^I$ 는 각각 이동경화응력, 등방경화응력을 의미하며 식 (6a)이 임의의 변형률 속도에 대해 성립하기 위한 조건으로부터 다음의 식의 유도된다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p) \quad (7a)$$

$$\Gamma = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \boldsymbol{\sigma}^K \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K + \boldsymbol{\sigma}^I \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_I \geq 0 \quad (7b)$$

식 (7a)은 탄성구성식(Elastic constitutive equation)을, 식 (7b)은 변형을 경화를 고려한 경우의 소성일률(Plastic work rate)을 의미한다. 소성일률에 관한 식의 표현으로부터 에너지의 산일(dissipation, 散逸)은 정(正)이거나 0이라는 것을 알 수 있으며, 이는 열역학 제 2법칙을 만족하게 된다. 또한 식으로부터 임의의 소성상태에 대한 독립적인 상태변수는 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^K$, $\boldsymbol{\sigma}^I$ 가 되는 것을 알 수 있다.

이 독립변수들에 대해 혼합경화를 포함한 다음의 미세스 항복함수 f (von Mises yield function)를 제약조건식으로 적용하도록 한다. 평면응력상태에 대한 항복조건식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Phi &= f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - (\sigma_Y + \sigma^I) \leq 0 \\ &= \sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_y^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2} - (\sigma_Y + \sigma^I) \leq 0 \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\sigma}_{eq} - (\sigma_Y + \sigma^I) \leq 0 \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^K, \quad \tilde{\sigma}_{eq} = \sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_y^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2} \end{aligned} \quad (8b)$$

여기서 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 는 실제응력에서 이동경화응력 $\boldsymbol{\sigma}^K$ 을 제외한 유효응력(Effective stress)이며, $\boldsymbol{\sigma}^K$ 는 배응력(Back stress)이라고도 한다. 또한 $\tilde{\sigma}_{eq}$ 수는 유효응력에 대한 미세스 항복함의 상당응력(Equivalent stress)이다.

다음으로 소성흐름법칙(Plastic flow rule)을 구하기 위해 최대소성일의 원리(Drucker, 1950)라는 가설을 도입하도록 한다. 이것은 식 (8a)의 부등호 제약조건을 만족하면서 식 (7b)의 소성일률을 최대로 할 때의 조건을 구하는 것으로써, 다음의 라그랑지안(Lagrangian)을 생각할 수 있다.

$$L = -\Gamma + \Phi \lambda \quad (9)$$

여기서 λ 는 미정계수이다. 식 (9)에 식 (7b) 및 식 (8a)을 대입하여 각 독립변수에 대해 편미분을 하여 극값을 구함으로써, 소성일률이 최대로 될 때의 소성흐름법칙을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \lambda = 0 \quad (10a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}^K} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_K + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^K} \lambda = 0 \quad (10b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}^I} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_I + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^I} \lambda = 0 \quad (10c)$$

위식을 다시 정리하면,

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad (11a)$$

$$\dot{\epsilon}_K = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^K} \dot{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \sigma^K} \dot{\lambda} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad (11b)$$

$$\dot{\epsilon}_I = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^I} \dot{\lambda} = -\dot{\lambda} \quad (11c)$$

식 (11a)은 미제스의 항복함수를 포텐셜(Potential)로 설정한 경우의 관련흐름법칙(Associated flow rule)이 되며, 이것은 소성변형률이 미제스의 항복함수로 형성되는 항복곡면의 법선방향으로 발생한다는 것을 의미한다. 미정계수 $\dot{\lambda}$ 는 상당소성변형률(Equivalent plastic strain)의 크기에 해당하는 스칼라 양으로서 소성진전 파라메타(Plastic consistency parameter)라고 한다. 또한 혼합경화에 대한 경화법칙(Hardening rule)은 식 (6b), (6c) 및 식 (11b), (11c)의 관계로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{\sigma}^K = -E^K \dot{\epsilon}_K = E^K \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad (12a)$$

$$\dot{\sigma}^I = -E^I \dot{\epsilon}_I = E^I \dot{\lambda} \quad (12b)$$

여기서 정식화를 간단히 하기 위해 이동경화계수 매트릭스 E^K 의 가장 단순한 형태로 표현하도록 한다. 즉 스칼라인 이동경화계수와 단위매트릭스를 사용해 E^K 를 다음과 같이 표현하도록 한다.

$$E^K = E^K I \quad (13)$$

위식을 사용하면 식 (12.a)은 다음과 같이 된다.

$$\dot{\sigma}^K = E^K \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda} \quad (14)$$

위식의 표현은 Prager(1959)의 이동경화법칙과 일치하며 본 논문에서는 경화법칙(Hardening rule)으로써 이동경화의 경우 식 (14)을, 등방경화에 관해서는 식 (12b)을 사용한다.

다음으로 소성상태에 대한 부하조건은 항복조건식 및 소성진전 파라메타를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\Phi = 0, \dot{\Phi} = 0, \dot{\lambda} \geq 0 \quad (15)$$

지금까지 평면응력상태에서의 혼합변형률 경화를 각 레이어에 대한 기초식을 유도하였으며, 최종적으로 오버레이 모델 전체의 응력은 식 (7a)로부터 구한 각 레이어의 응력을 식 (1)을 사용함으로써 구할 수 있다.

2.3 오버레이 모델의 항복응력분포

본 절에서는 오버레이 모델의 항복응력분포를 설정하는 방법에 관해 거론하기로 한다. 재료의 비선형적 거동을 비교적 간단하게 계산하기 위해, 본 연구에서는 오버레이 모델의 여러 파라메타 중, 각 레이어의 항복응력분포만을 고려하므로 항복응력분포의 설정은 해석에 있어 중요한 요소이다.

2장 1절 오버레이 모델의 특성에서 나타낸바와 오버레이 모델의 항복응력분포가 선형적인 경우에도 응력-변형률 관계의 비선형성은 충분히 표현된다. 하지만 이러한 경우 소성진전 파라메타 $\dot{\lambda}$ 의 값이 모든 레이어에서 일정한 값을 가지게 되며 결과적으로는 각 레이어의 접선강성(Tangent stiffness)이 일정한 크기를 가지게 되므로 평면응력상태에서의 복잡한 응력-변형률 관계를 표현하기에는 다소 불충분한 면이 있다. 따라서 실제 재료의 거동을 나타내기 위해서는 다음과 같은 지수함수형태의 비선형적인 항복응력분포가 필요하다(元結 등, 2007).

$$\sigma_r(\zeta) = \left\{ 1 + \frac{q(1/2 - \zeta)}{2\sqrt{p + \zeta}} \right\} r e^{-q\sqrt{\zeta + p}} \quad (16a)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} - \frac{(1-i)}{n} \quad (16b)$$

위식에서 ζ 는 오버레이 모델을 구성하는 n 개의 레이어를 가상의 좌표계 $[-1/2 \leq \zeta \leq 1/2]$ 로 치환한 값이며 i 는 i 번째 레이어를 의미한다. 또한 식 (16a)에서 p, q, r 은 오버레이 모델의 항복응력분포 형상을 결정하는 파라메타로써 각 값들의 설정에 따른 항복응력의 분포변화 및 응력-변형률 관계를 부록 2에 나타낸다.

3. 오버레이 모델의 수치해석

3.1 기본 알고리즘

2장에서 유도한 오버레이 모델의 기초식을 이용하여 시각

(t)에서의 변형을 및 소성변형을 기지량(Known value)으로 해, 시각(t+Δt)에서의 응력을 산정하는 방법에 대해서 설명하도록 한다. 즉 시각(t+Δt)에서의 평면응력상태 변형률의 각 성분 ${}^{t+\Delta t}\epsilon_x, {}^{t+\Delta t}\epsilon_y, {}^{t+\Delta t}\epsilon_{xy}$ 및 시각(t)에서의 소성 변형률의 각 성분 ${}^t\epsilon_{px}, {}^t\epsilon_{py}, {}^t\epsilon_{pxy}$ 은 기지량이다. 기본적으로 리턴 핑 알고리즘(Return Mapping Algorithm; Simo, 1987)을 사용하도록 한다. 2장에서 구한 기초식을 다시 한 번 정리하면 다음과 같다.

탄성구성식 : $\sigma = E\epsilon_e = E(\epsilon - \epsilon_p)$ (17a)

항복조건식 : $\Phi = \sqrt{\sigma - \sigma^K} - (\sigma_Y + \sigma^I) \leq 0$ (17b)

소성흐름법칙 : $\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda}$ (17c)

이동경화법칙 : $\dot{\sigma}^K = E^K \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\lambda}$ (17d)

등방경화법칙 : $\dot{\sigma}^I = E^I \dot{\lambda}$ (17e)

먼저 탄성예측자(Elastic predictor)라고 하는 시행계산을 하도록 한다. 이 계산단계에서는 증분구간에서 소성변형이 발생하지 않는 것으로 가정하여 응력을 계산한다. 따라서 다음의 식이 성립되다. 여기서, 수식의 이해를 돕기 위해 변형률 및 응력의 표기는 평면응력상태에서의 각 방향성분에 대해 스칼라 표기를 하도록 한다.

$\Delta\epsilon_{px} = \Delta\epsilon_{py} = \Delta\epsilon_{pxy} = 0$ (18a)

$\Delta\sigma_x^K = \Delta\sigma_y^K = \Delta\sigma_{xy}^K = 0$ (18b)

$\Delta\sigma^I = 0$ (18c)

여기서 Δ의 기호는 증분구간에 있어서의 변화량을 의미하며, 변화량이 0이므로 소성변형률은 시각(t)에서의 상태를 유지하게 된다.

${}^{trial}\epsilon_{px} = {}^t\epsilon_{px}, {}^{trial}\epsilon_{py} = {}^t\epsilon_{py}, {}^{trial}\epsilon_{pxy} = {}^t\epsilon_{pxy}$ (19)

또한 탄성변형률은 전변형률에서 소성변형률을 제외한 것이므로 탄성변형률은 식 (2)로부터 다음과 같이 구해진다.

${}^{trial}\epsilon_{ex} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_x - {}^{trial}\epsilon_{px}$ (20a)

${}^{trial}\epsilon_{ey} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_y - {}^{trial}\epsilon_{py}$ (20b)

${}^{trial}\epsilon_{exy} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_{xy} - {}^{trial}\epsilon_{pxy}$ (20c)

시행응력은 식 (17a)을 이용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} {}^{trial}\sigma_x \\ {}^{trial}\sigma_y \\ {}^{trial}\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{trial}\epsilon_{ex} \\ {}^{trial}\epsilon_{ey} \\ {}^{trial}\epsilon_{exy} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

위식에서 E, ν는 각각 탄성계수 및 프아송비이다. 다음으로 각 경화응력의 시행값은 다음과 같다.

${}^{trial}\sigma_x^K = {}^t\sigma_x^K, {}^{trial}\sigma_y^K = {}^t\sigma_y^K,$ (22a)

${}^{trial}\sigma_{xy}^K = {}^t\sigma_{xy}^K$

${}^{trial}\sigma^I = {}^t\sigma^I$ (22b)

각 시행응력 값들이 구해졌으므로 시행응력값을 사용하여 다음의 항복함수의 값을 계산한다.

${}^{trial}\tilde{\sigma} = {}^{trial}\tilde{\sigma} - {}^{trial}\tilde{\sigma}^K$ (23a)

${}^{trial}\Phi = \sqrt{{}^{trial}\tilde{\sigma}_x^2 - {}^{trial}\tilde{\sigma}_x {}^{trial}\tilde{\sigma}_y + {}^{trial}\tilde{\sigma}_y^2 + 3{}^{trial}\tilde{\sigma}_{xy}^2} - (\sigma_Y + {}^{trial}\sigma^I)$ (23b)

이상이 탄성예측자의 시행계산이며, 식 (23b)의 값이 음의 값일 경우 식 (17b)의 항복조건을 만족하게 되므로 새로운 소성변형이 발생하지 않았다는 것을 의미한다. 즉 식 (18)의 설정이 타당하다는 것을 의미한다. 반면 식 (23b)의 값이 양의 값일 경우, 소성변형이 발생했다는 것을 의미하므로 식 (18)의 설정을 수정해서 계산을 할 필요가 있다. 이러한 계산을 소성수정자(Plastic corrector)라고 하며, 다음과 같은 계산 과정을 거치게 된다.

먼저 식 (20)의 탄성변형률을 다음과 같이 수정할 필요가 있다.

${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ex} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_x - ({}^{trial}\epsilon_{px} + \Delta\epsilon_{px}) = {}^{trial}\epsilon_{ex} - \Delta\epsilon_{px}$ (24a)

${}^{t+\Delta t}\epsilon_{ey} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_y - ({}^{trial}\epsilon_{py} + \Delta\epsilon_{py}) = {}^{trial}\epsilon_{ey} - \Delta\epsilon_{py}$ (24b)

${}^{t+\Delta t}\epsilon_{exy} = {}^{t+\Delta t}\epsilon_{xy} - ({}^{trial}\epsilon_{pxy} + \Delta\epsilon_{pxy}) = {}^{trial}\epsilon_{exy} - \Delta\epsilon_{pxy}$ (24c)

소성변형상태에서의 응력은 탄성구성식 식 (17a)을 사용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\sigma_x \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_y \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{trial}\sigma_x \\ {}^{trial}\sigma_y \\ {}^{trial}\sigma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_{p_x} \\ \Delta\varepsilon_{p_y} \\ \Delta\varepsilon_{p_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

위식에 소성흐름법칙 식 (20c)을 대입한다.

$$\begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\sigma_x \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_y \\ {}^{t+\Delta t}\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{trial}\sigma_x \\ {}^{trial}\sigma_y \\ {}^{trial}\sigma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial\phi/\partial\sigma_x \\ \partial\phi/\partial\sigma_y \\ \partial\phi/\partial\sigma_{xy} \end{Bmatrix} \Delta\lambda \quad (26)$$

이동경화응력 및 등방경화응력은 식 (17d) 및 식 (17e)로부터 다음과 같이 수정된다.

$${}^{t+\Delta t}\sigma^K = {}^{trial}\sigma^K + E^K \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\lambda \quad (27a)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma^I = {}^{trial}\sigma^I + E^I \Delta\lambda \quad (27b)$$

지금까지의 계산과정을 보면 변형률 및 응력의 수정을 위해 서 소성진전 파라메타 $\Delta\lambda$ 가 필요하다는 것을 알 수 있다. $\Delta\lambda$ 를 구하기 위해 수정된 각 응력을 항복조건식에 대입한다.

$${}^{t+\Delta t}\Phi = \sqrt{{}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}_x^2 - {}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}_x {}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}_y + {}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}_y^2 + 3({}^{t+\Delta t}\tilde{\sigma}_{xy})^2} - (\sigma_y + {}^{t+\Delta t}\sigma^I) \quad (28)$$

일반적으로 위식은 비선형방정식이 되므로 다음과 같이 테일러 전개를 하여 선형화하도록 한다.

$${}^{t+\Delta t}\Phi \approx \Phi(0) + \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial\lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^K} \cdot \frac{\partial\sigma^K}{\partial\lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^I} \cdot \frac{\partial\sigma^I}{\partial\lambda} \Delta\lambda = 0 \quad (29)$$

위식에 식 (26)과 식 (27)를 대입하면 다음의 식이 되며,

$${}^{t+\Delta t}\Phi = {}^{trial}\Phi - \left[\frac{\partial f}{\partial\sigma} \cdot E + \frac{\partial f}{\partial\sigma^K} \cdot E^K + \frac{\partial f}{\partial\sigma^I} \cdot E^I \right] \Delta\lambda = 0 \quad (30)$$

소성진전 파라메타는 다음과 같이 구해진다.

$$\Delta\lambda = \frac{{}^{trial}\Phi}{\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma} \cdot E + \frac{\partial f}{\partial\sigma^K} \cdot E^K + \frac{\partial f}{\partial\sigma^I} \cdot E^I \right]} \quad (31)$$

여기서, 항복함수 f 를 응력의 각 성분으로 편미분한 값을 구체적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \partial f/\partial\sigma_x \\ \partial f/\partial\sigma_y \\ \partial f/\partial\sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_y^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2}} \\ \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{2\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_y^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2}} \\ \frac{6\sigma_{xy}}{2\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2 - \tilde{\sigma}_x\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_y^2 + 3\tilde{\sigma}_{xy}^2}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\tilde{\sigma}^{eq}} \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_x - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_y \\ \tilde{\sigma}_y - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}_x \\ 3\tilde{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

계산된 $\Delta\lambda$ 의 값을 사용하여 변형률 및 응력의 값을 갱신하고, 다시 식 (31)의 항복조건식에 대입하여 항복조건식이 오차범위를 만족할 때까지 수렴 계산한다. 지금까지의 응력산출에 대한 계산방법을 그림 4에 나타낸다.

3.2 해석모델

지금까지 평면응력상태에 대한 오버레이 모델의 기초식 유도 및 구체적인 응력산출 방법에 관하여 논하였다. 본 절에서는 열역학적 전개를 통해서 얻어진 정식화의 유효성을 검토하기 위해, 제안모델의 수치해석결과와 재료실험을 통해 얻어진 응력-변형률 관계를 비교하도록 한다.

해석패턴은 Dafalias 등(1976)의 Grade 60 강재에 대한 일축응력상태 실험결과를 대상으로 한 Case 1 및 Wu (1986)에 의한 A304 스테인레스 강재의 평면응력상태 실험결과를 대상으로 한 Case 2, 이상 두 종류의 해석패턴에 관해서 해석을 행하였다.

해석모델은 100개의 레이어로 구성되며, 각 레이어에 대한 단면적, 탄성계수, 경화계수 및 변형률은 전 레이어가 동일한 값을 가지는 것으로 한다. 제어방법으로는 실험결과와 응력-변형률 관계로부터 얻은 변형률을 입력 값으로 사용하였다. 해석에 있어 주된 파라메타는 각 레이어의 항복응력분포식 (16)의 p, q, r 값을 조절함으로써 실험결과에 해석결과 값을 근접시키는 방법을 사용하였다. 최종적으로 얻어진 p, q, r 값 등, 각 해석모델에 대한 구체적인 제원을 표 1에 나타냈다.

표 1. 해석모델의 제원

	Case 1	Case 2
탄성계수 (E)	0.196 [GN/mm ²]	0.196 [GN/mm ²]
전단계수 (G)	-	0.0754 [GN/mm ²]
이동경화계수 (E^K)	$E/100$	-
등방경화계수 (E^I)	$E/400$	$E/100$
프라이송 비 (n)	-	0.3
p	0.52	0.56
q	6.4	4.2
r	1.6	1.2
s_y	530 [N/mm ²]	287 [N/mm ²]

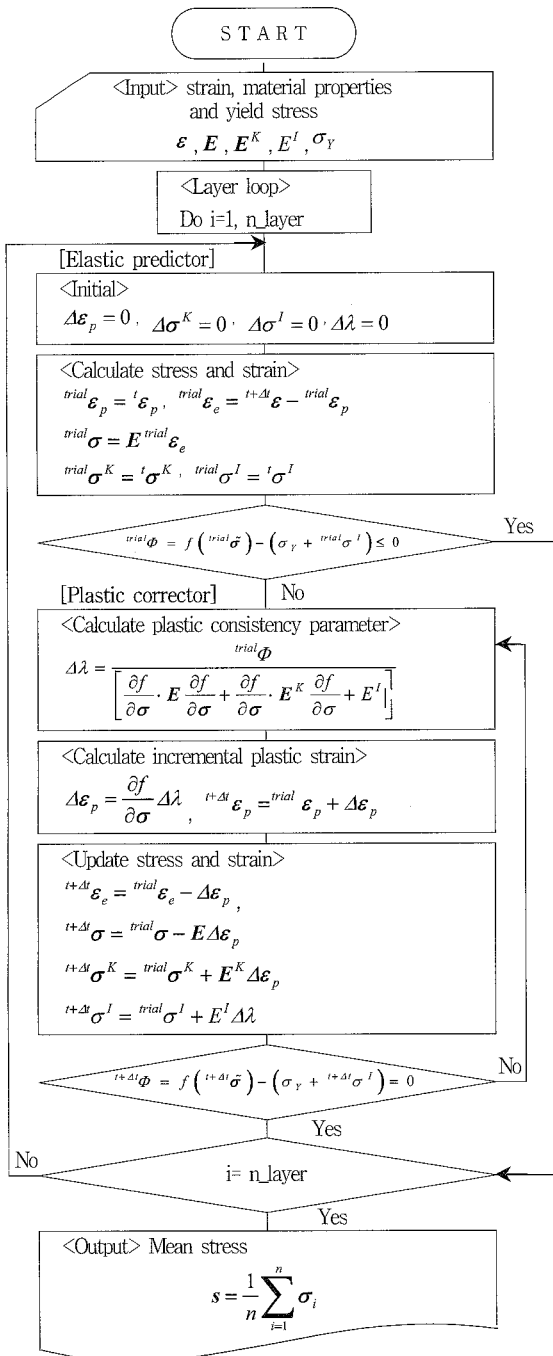


그림 4. 오버레이 모델의 응력산출 흐름

표 안의 내용 중, s_y 는 각 레이어의 항복응력을 평균한 값으로서, 오버레이 모델 전체의 항복응력을 의미한다. 그림 5는 Case 1 및 Case 2의 해석에 사용된 각 레이어의 항복응력분포로서 탄소강 및 합금강 등, 강재의 종류에 따라 항복응력분포의 형상이 다르게 나타난다는 것을 알 수 있다.

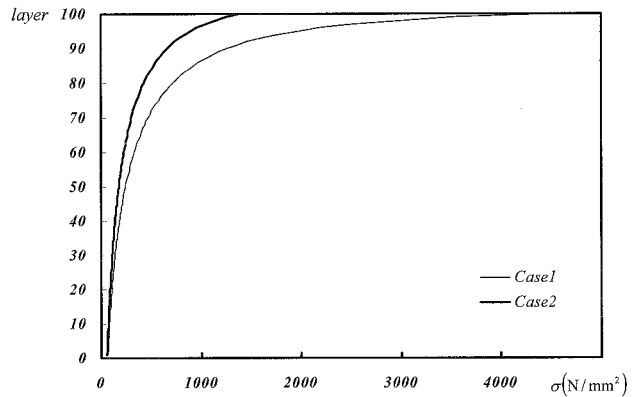


그림 5. 해석모델의 항복응력분포

3.3 해석 결과 및 고찰

그림 6~그림 8에 각 케이스에 대한 해석결과를 나타낸다. 그림에서 실선으로 표기한 것이 오버레이 모델의 해석결과이며 점선으로 표기한 것이 실험결과이다. 그림 6은 일축응력상태에 대한 응력-변형률 관계로서 최대 변형률 4%의 랜덤한 재하과정에 관한 해석결과이다. 해석결과는 실험결과의 복잡한 응력-변형률 거동을 잘 추적하고 있음을 알 수 있다. 변형률 1%에서 전 레이어가 항복하며, 그 후 소성이 진전됨에 따라 변형률 경화가 일어나고 있는 것을 알 수 있다. 전체적인 응력-변형률 관계는 변형률의 정(正)방향 범위에서 반복하중을 받는 형상이므로 등방경화특성에 비해 이동경화특성이 상대적으로 크게 나타나는 양상이다. 따라서 이동경화계수의 값을 등방경화계수의 4배 값으로 입력하였으며, 해석결과는 반복하중에 대한 비우싱거 효과를 응력 진폭의 크기에 관계없이 정확히 나타내고 있다.

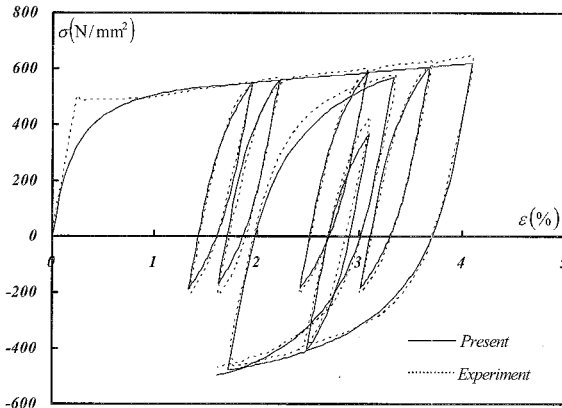


그림 6. 일축응력상태에서의 응력-변형률 관계 (Case 1)

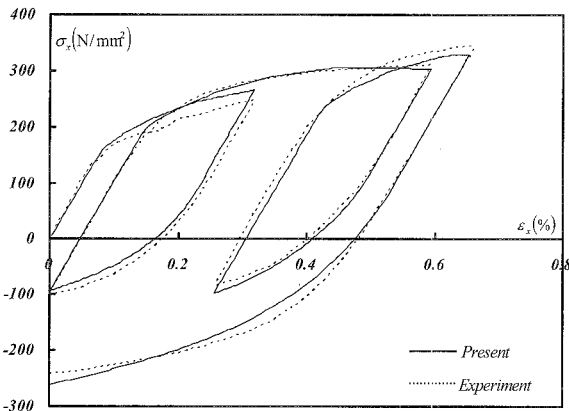


그림 7. 평면응력상태에서의 수직응력-변형률 관계 (Case 2)

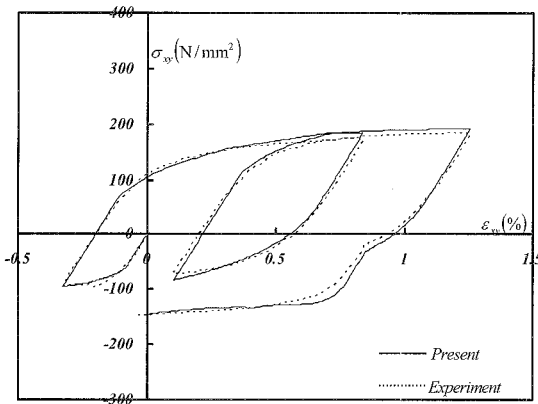


그림 8. 평면응력상태에서의 전단응력-변형률 관계 (Case 2)

다음으로 그림 7 및 그림 8는 합금강의 평면응력상태에 대한 응력-변형률 관계의 해석결과 및 실험결과를 비교한 것이다. 실험결과는 수직응력과 전단응력을 동시에 가력하여 얻은 결과로서 해석에서도 평면변형률의 성분 중, 수직변형률과 전단변형률을 동시 제어하였다. 수직응력-변형률 관계는 전단응력-변형률 관계와 비교하여 상대적으로 높은 응력을 나타내

고 있으나, 이는 평면응력의 특징으로부터 기인되는 현상이라 판단된다. 그림 7은 수직응력(x방향)-변형률 관계의 해석결과이며, 그림 8는 전단응력(xy방향)에 대한 해석결과이다. 그림 7에 있어 초기재하과정을 거친 첫 번째 제하(Unloading) 지점에서의 응력 및 변형률은 각각 254 N/mm², 0.31%이며, 그림 8의 경우에는 96 N/mm², -0.32%이다. 이 경우, 각각의 응력 값은 항복응력 287 N/mm² 보다 작은 값이지만, 위의 두 응력 값을 미제스의 상당응력으로 환산하면 303.6 N/mm²으로서 첫 번째 제하지점에서 이미 전소성 상태에 도달하여 변형률 경화가 일어났음을 알 수 있다.

수직응력 및 전단응력에 관한 해석결과와 실험결과는 서로 일치하고 있으며, 이상의 결과로부터 평면응력상태를 대상으로 한 오버레이 모델의 정식화 및 응력산출방법 등, 본 논문에서 제안한 수치해석기법은 유효한 방법이라고 판단된다.

4. 결론

본 연구는 평면응력상태에서의 재료 비선형을 정확하게 표현할 수 있는 수치해석기법의 제안에 관한 것으로서, 변형률 경화를 고려한 오버레이 모델의 정식화 및 응력산출방법에 관해 구체적으로 거론하였다. 제안된 해석기법은 오버레이 모델의 항복응력분포를 주된 해석파라미터로 사용하는 방법이며, 수치해석결과와 탄소강 및 합금강의 일축, 다축응력상태의 실험결과를 비교하여 그 유효성을 확인하였다. 본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 변형률 경화를 고려한 각 레이어의 기초식의 전개에 열역학을 사용함으로써 탄소구성식 및 소성일률이 가지는 역학적 의미를 명확히 하여, 정식화의 평면응력상태로의 확장을 이론적으로 명확히 하였다.
- (2) 정식화 과정에서 유도된 경화응력 및 소성흐름법칙은 프래거의 이동경화법칙 및 관련흐름법칙과 일치하며, 이로부터 본 연구의 제안수법은 일반적 소성론에 이론적으로 부합하는 탄소성 역학모델임을 확인하였다.
- (3) 100개의 레이어로 구성된 오버레이 모델의 항복응력분포의 설정한 본 제안수법의 해석결과와 실험결과를 비교하여 오버레이 모델은 평면응력상태에서의 재료 비선형성을 정확하게 표현할 수 있는 유효한 역학 모델이라는 것을 검증하였다.
- (4) 본 연구에서 제안된 수치해석기법을 다양한 강재의 실험결과에 적용하여 식 (16)의 p, q, r 값을 정량적으로 산출한다면, 향후 재료 비선형성을 고려한 구조해석에 매우 유용할 것으로 사료된다.

참고 문헌

Besseling, J.F.(1958) A Theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic Material Showing anisotropic Strain-hardening, creep recovery, and secondary creep, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, pp. 529-536

Zienkiewicz, O.C., Nayak and Owen, D.R.J.(1972) Composite and overlay models in numerical analysis of elasto-plastic continua, *Int. Symp. Foundation of Plasticity*, Sawczuk, Warsaw

Owen, D.R.J., Prakash, A. and Zienkiewicz, O.C.(1974) Finite element analysis of non-linear composite materials by use of overlay systems. *Comput. Struct.* Vol 4, pp. 1251-1267

Schiffner, K.(1995) Overlay models for structural analysis under cyclic loading, *Comput. Struct.* Vol 56, pp. 321-328

Silva, R.C.C., Landau, L. and Rebeiro, F.L.B(2000) Visco plastic h-adaptive analysis, *Comput. Struct.* Vol 78, pp. 123-131

Drucker, D.C.(1950) Some implications of work-hardening and ideal plasticity, *J. Appl. Mech.* Vol.7, pp. 411-418

Prager, W.(1959) A new method of analyzing stress and strain in work-hardening, *J. Appl. Math.* Vol.23, pp. 529-535

元結 正次浪, 白奇烈(2007) 完全彈塑性體から成るサブレイヤーモデルの1軸応力場に對する巨視的評價 手法, 日本建築學會構造系論文集, No. 611, pp. 87-94

Simo, J.C., Ju, J.W.(1987) Strain and stress baesed continuum damage models I : formulation, *Int. J. Solid Struct.* Vol 23, No. 7, pp. 821-840

Dafalias, Y.F., Popov, E.P (1976) Plastic internal-variables formulation of cyclic plasticity, *J. Appl. Mech.* Vol 43, pp. 645-650

Wu, H.C., Yao, J.C, Chu, S.C.(1986) Investigation of endochronic constitutive equation subject to plastic strain-controlled axial-torsional deformation, *J. Eng. Mech.* Vol 108, pp. 262-269

石川 博將 (2000) 個體的非線形力學, 養賢堂

부록 1. 소성론의 열역학적 전개

본 논문의 정식화에 이용된 열역학적 전개가 가지는 역학적 의미에 관해 기술하기 위해 먼저 본 논문에서 사용한 형식의

클라우스 듀헴 부등식(Clausius-Duhem inequality)을 구체적으로 유도하도록 한다(石川, 2000) 여기서 변형률 경화에 관한 사항은 고려하지 않는 것으로 한다.

열역학 제 1법칙 [내부 에너지의 변화는 계에 유입된 열량과 계에서 일어난 일의 양으로 나타난다]는 다음의 식으로 표현된다.

$$\dot{e} = \dot{q} + \dot{w} = \dot{q} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (33)$$

여기서, \dot{e} , \dot{q} , \dot{w} 는 각각 계 내부의 에너지, 열량 및 계에서 일어난 일의 변화율 표시이며, σ 는 응력벡터, $\dot{\epsilon}$ 는 변형률 벡터의 변화율이다. 다음으로 열역학 제2법칙 [엔트로피의 증가]를 의미하는 클라우지우스 부등식은 다음과 같다.

$$\dot{\eta} \geq \frac{1}{T} \dot{q}, \quad T\dot{\eta} - \dot{q} \geq 0 \quad (34)$$

위 식에서 $\dot{\eta}$ 는 엔트로피의 변화율이며, T 는 온도이다. 또한 비가역 반응(소성화)에 의해 발생하는 엔트로피의 증가 $\dot{\eta}^i$ 를 식 (36) 및 식 (37)을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T\dot{\eta}^i = T\dot{\eta} - \dot{q} = T\dot{\eta} - \dot{e} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (35)$$

여기서 계의 내부 상태를 나타내는 독립변수를 변형률과 온도라고 한다면, 헬름홀츠의 자유에너지(Helmholtz free energy) 및 그 변화율은 다음과 같다.

$$\psi = e - T\eta, \quad -\dot{\psi} = \dot{e} - \dot{T}\eta - T\dot{\eta} \quad (36)$$

위 식을 식 (35)에 대입하면,

$$T\dot{\eta}^i = -(\dot{\psi} + \dot{T}\eta) + \sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (37)$$

본 논문에서는 상온상태에서의 응력-변형률 관계를 대상으로 하므로, 온도변화의 의한 영향은 고려하지 않는 것으로 한다. 따라서 온도 T 는 정수로서 취급되며, 그 변화율은 0이 된다. 이 점을 고려하면 식 (36)은 다음과 같이 된다.

$$T\dot{\eta}^i = -\dot{\psi} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (38)$$

위 식은 클라우지우스 부등식인 식 (34)로부터 직접 유도한 결과이며 본문의 식 (4)과 동일한 표현임을 알 수 있다. 또한 본문에서와 같이 자유에너지 변화율을 위 식에 대입하여 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} T\dot{\eta}^i &= -\dot{\psi} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} = -[E(\epsilon - \epsilon_p) \cdot (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_p)] + \sigma \cdot \dot{\epsilon} \\ &= [\sigma - E(\epsilon - \epsilon_p)] \cdot \dot{\epsilon} + E(\epsilon - \epsilon_p) \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0 \end{aligned} \quad (39)$$

위식이 계의 내부 상태를 나타내는 독립변수인 변형률 속도 성분에 대해 성립하기 위한 조건으로부터,

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad E(\epsilon - \epsilon_p) \cdot \dot{\epsilon}_p = \sigma \cdot \dot{\epsilon}_p \geq 0 \quad (40)$$

위 식의 제 1항이 탄성구성식, 제 2항이 소성일률이라는 것은 본문에서 나타낸바 있으며, (39) 및 식 (40)의 표현으로부터 엔트로피 증가는 응력 및 소성변형률 속도성분의 곱으로 나타나는 소성일률로써 나타난다는 것을 명확하게 알 수 있다.

부록 2. 식 (16)의 p, q, r 의 설정에 따른 항복응력의 분포변화 및 응력-변형률의 관계

본문의 식 (16.1)의 p, q, r은 오버레이 모델의 항복응력 분포 형상을 결정하는 중요한 파라메타로써 각 값들의 설정에 따른 항복응력의 분포변화 및 이에 따른 응력-변형률 관계를 수치해석 예를 통해 알아보도록 한다.

해석모델의 제원 및 레이어의 수는 기본적으로 본문의 해석 모델과 같으며 변형률 경화는 고려하지 않았다. 해석상에 있어 사용된 파라메타는 다음과 같으며 표 2, 3, 4 에 해석에 사용된 p, q, r의 값을 나타낸다.

Case a : p의 값을 해석변수로 한 경우.

Case b : q의 값을 해석변수로 한 경우.

Case c : r의 값을 해석변수로 한 경우.

표 2. Case a의 p, q, r

	p	q	r
Basic Value	0.7	1.0	5.0
Case I	0.6	1.0	5.0
Case II	0.8	1.0	5.0

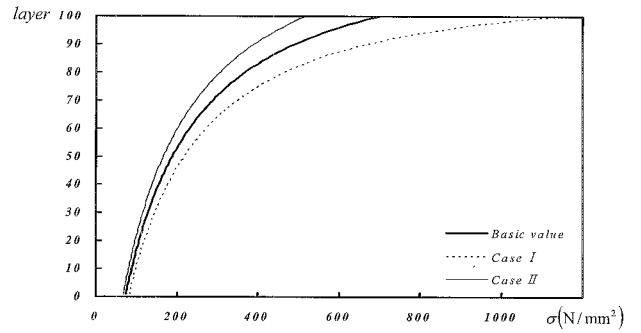


그림 9. Case a의 항복응력분포

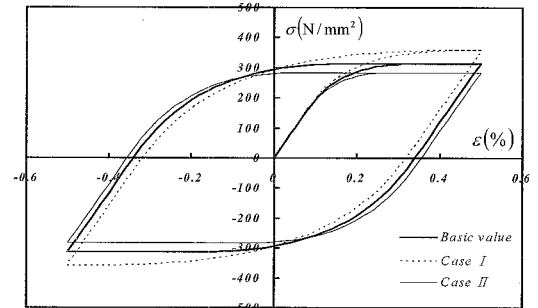


그림 10. Case a의 응력-변형률 관계

그림 9와 그림 10은 p의 값을 변화시킨 경우의 항복응력분포와 그에 따른 응력-변형률 해석결과를 나타낸 것이다. 결과로부터 알 수 있듯이 각 레이어의 항복응력분포에서 최소치는 동일하지만 p 값의 변화에 따라 점진적으로 항복응력의 최대치가 변화하는 것을 알 수 있다.

표 3. Case a의 p, q, r

	p	q	r
Basic Value	0.7	1.0	5.0
Case I	0.7	0.5	5.0
Case II	0.7	1.5	5.0

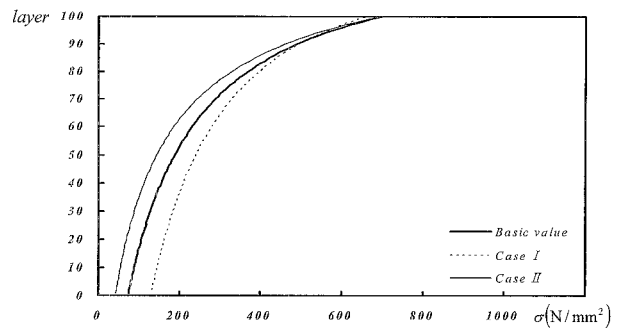


그림 11. Case b의 항복응력분포

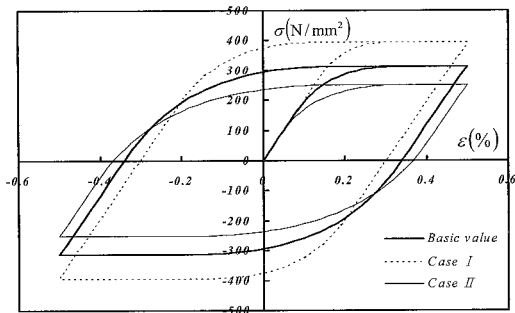


그림 12. Case b의 응력-변형을 관계

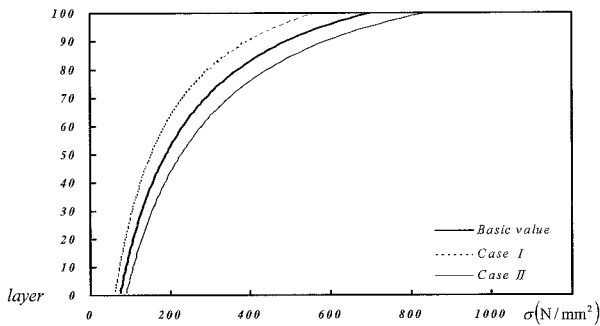


그림 13 Case c의 항복응력분포

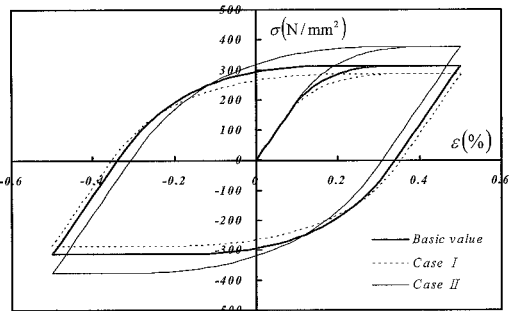


그림 14. Case c의 응력-변형을 관계

표 4. Case a의 p, q, r

	p	q	r
Basic Value	0.7	1.0	5.0
Case I	0.7	1.0	4.0
Case II	0.7	1.0	6.0

또한 그림 11과 그림 12는 q 의 값을 변화시킨 경우의 항복응력분포와 그에 따른 응력-변형을 해석결과로서 Case a와는 반대로 각 레이어의 최대항복응력은 같은 값을 가지며, 최소항복 응력이 서로 다른 값을 가지는 분포를 나타내고 있다. 이에 따라 그림 12에서 알 수 있듯이 응력-변형을 관계에서 초기 선형구간의 길이가 다르게 나타나는 것, 즉 전체 모델에 대한 항복응력이 다르게 나타나는 것을 알 수 있다.

그림 13과 그림 14는 r 의 값을 변화시킨 경우의 항복응력 분포와 응력-변형을 해석결과로서 r 값의 변화가 항복이후의 비선형구간에서의 강성구배에 영향을 미친다는 것을 알 수 있다.

이상과 같이 오버레이 모델의 항복응력분포함수에 관한 식 (16)의 p, q, r 값 변화가 응력-변형을 관계에 미치는 영향을 수치해석을 통해 알아보았다. 본 연구에서는 오버레이 모델의 파라메타 중, 각 레이어의 항복응력분포를 주 파라메타로 설정하고 있으므로 상기의 p, q, r 값 특성을 이용하여 실제 재료의 응력-변형을 관계를 표현할 수 있는 항복응력분포를 설정하였다.

(접수일자 : 2007. 3. 15 / 심사일 : 2007. 4. 10 /

심사완료일 : 2007. 5. 15)